Einführung in die Stochastik — Sommersemester 07
Dr. Walter Oevel — 7. 5. 2007

Übungsblatt 5

Mit $*$ und $**$ gekennzeichnete Aufgaben können zum Sammeln von Bonuspunkten verwendet werden. Lösungen von $*$-Aufgaben sind schriftlich abzugeben im Zettelkasten Nr. 5 auf dem D1 bis Mittwoch, 16.5.07, 11:00 Uhr. Lösungen von $**$-Aufgaben sind per Web-Formular unter `http://www.math.upb.de/~walter` ($\longrightarrow$ Lehre SS 07 $\longrightarrow$ Übungen) abzuliefern bis spätestens Mittwoch, 16.5.07, $23^{\underline{59}}$ Uhr.

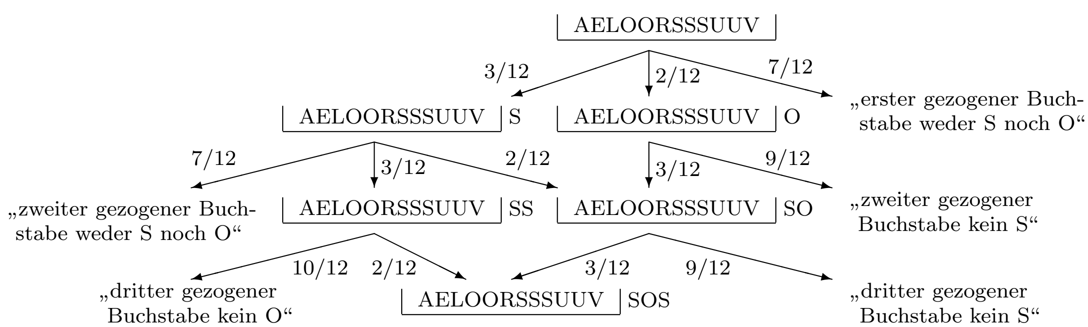
Aufgabe 26*: (Wahrscheinlichkeitsgraphen, 15 + 15 Punkte)
Aus der Urne $\lfloor$ SAVE OUR SOULS $\rfloor$ werden

a) mit Zurücklegen

b) ohne Zurücklegen

drei Buchstaben gezogen. Mit welcher W'keit kann aus den gezogenen Buchstaben das Wort SOS gebildet werden? Berechne die gefragten Wahrscheinlichkeiten über einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsgraphen!

Musterlösung:
Zu Beginn ist die Urne $\lfloor$ SAVE OUR SOULS $\rfloor$ = $\lfloor$ AELOORSSSUUV $\rfloor$. Wir betrachten als Einzelexperimente die drei einzelnen Züge.
a) Der entsprechende W'keitsbaum mit Zurücklegen ist:



Die Übergangsw'keiten ergeben sich dabei leicht folgendermaßen aus den Einzelexperimenten:

Zug 1: Die Wahrscheinlichkeit ist 3/12, aus einer Urne mit 12 Buchstaben, von denen 3 ein S sind, ein S zu ziehen.

Zug 1: Die Wahrscheinlichkeit ist 2/12, aus einer Urne mit 12 Buchstaben, von denen 2 ein O sind, ein S zu ziehen.

Zug 2: entspricht Zug 1.

Zug 3: entspricht Zug 1.

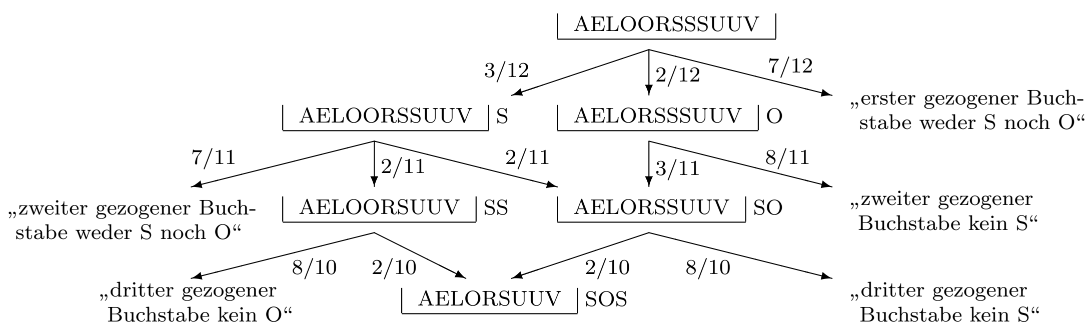
Die Pfadwahrscheinlichkeiten sind:

$$P_{SSO} = \frac{3}{12} \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{12} = \frac{1}{96}, \quad P_{SOS} = \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{3}{12} = \frac{1}{96}, \quad P_{OSS} = \frac{2}{12} \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{3}{12} = \frac{1}{96}$$

Als Endergebnis erhält man über die Pfadregel 2:

$$P(„\text{SOS}“) = P_{SSO} + P_{SOS} + P_{OSS} = \frac{1}{96} + \frac{1}{96} + \frac{1}{96} = \frac{1}{32}.$$

b) Der entsprechende W'keitsbaum ohne Zurücklegen ist:



Die Übergangsw'keiten ergeben sich dabei leicht folgendermaßen aus den Einzelexperimenten:

Zug 1: Die Wahrscheinlichkeit ist 3/12, aus einer Urne mit 12 Buchstaben, von denen 3 ein S sind, ein S zu ziehen.

Zug 1: Die Wahrscheinlichkeit ist 2/12, aus einer Urne mit 12 Buchstaben, von denen 2 ein O sind, ein S zu ziehen.

Zug 2: Die Wahrscheinlichkeit ist 2/11, aus einer Urne mit 11 Buchstaben, von denen 2 ein S sind, ein S zu ziehen.

Zug 2: Die Wahrscheinlichkeit ist 2/11, aus einer Urne mit 11 Buchstaben, von denen 2 ein O sind, ein O zu ziehen.

Zug 2: Die Wahrscheinlichkeit ist 3/11, aus einer Urne mit 11 Buchstaben, von denen 3 ein S sind, ein S zu ziehen.

Zug 3: Die Wahrscheinlichkeit ist 2/10, aus einer Urne mit 10 Buchstaben, von denen 2 ein O sind, ein O zu ziehen.

Zug 3: Die Wahrscheinlichkeit ist 2/10, aus einer Urne mit 10 Buchstaben, von denen 2 ein S sind, ein S zu ziehen.

Die Pfadwahrscheinlichkeiten sind:

$$P_{SSO} = \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{110}, \quad P_{S0S} = \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{110}, \quad P_{OSS} = \frac{2}{12} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{110}$$

Als Endergebnis erhält man über die Pfadregel 2:

$$P(„\text{SOS}“) = P_{SSO} + P_{SOS} + P_{OSS} = \frac{1}{110} + \frac{1}{110} + \frac{1}{110} = \frac{3}{110}.$$

Aufgabe 27: (Produktmodelle)

Löse Aufgabe 26.a) (drei Urnenzüge mit Zurücklegen) über ein entsprechendes Produktmodell.

Musterlösung:
Wegen des Zurücklegens gezogener Buchstaben sind die 3 Urnenzüge unabhängig, so dass sich das Produktmodell

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3); \omega_i \in \{A, E, L, O, R, S, U, V\}\}$$

mit

$$P(\{S\}) = \frac{3}{12}, \quad P(\{O\}) = \frac{2}{12}$$

anbietet. Mit

$$\text{“}SOS\text{“} = \{(S, S, O), (S, O, S), (O, S, S)\}$$

und

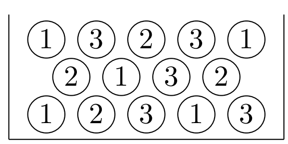
$$\begin{aligned} P(\{S, S, O\}) = P(\{S\}) \cdot P(\{S\}) \cdot P(\{O\}) &= \frac{3}{12} \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{12} = \frac{1}{96}, \\ P(\{S, O, S\}) = P(\{S\}) \cdot P(\{O\}) \cdot P(\{S\}) &= \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{3}{12} = \frac{1}{96}, \\ P(\{O, S, S\}) = P(\{O\}) \cdot P(\{S\}) \cdot P(\{S\}) &= \frac{2}{12} \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{3}{12} = \frac{1}{96} \end{aligned}$$

ergibt sich wieder

$$P(\text{“}SOS\text{“}) = P(\{S, S, O\}) + P(\{S, O, S\}) + P(\{O, S, S\}) = \frac{3}{96} = \frac{1}{32}.$$

Aufgabe 28:** (Unabhängige Wiederholungen, Produktmodelle, 10 Punkte)
Dies ist eine Online-Aufgabe, die bis zum 16.5.06, 23^{59} Uhr, abzuliefern ist. Der Aufgabenserver ändert die Aufgabenstellung dabei zufällig ab.

Aus der folgenden Urne werden nacheinander Kugeln gezogen und wieder zurückgelegt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit addieren sich die Nummern auf den gezogenen Kugeln nach 3 Zügen zu 7 auf?



Musterlösung:
Die Urne hat 14 Kugeln, bei einem einzelnen Zug gilt damit

$$\begin{aligned} P(1) &= \frac{5}{14} \quad \text{(5 Kugeln mit der Nummer 1 in der Urne)} \\ P(2) &= \frac{4}{14} \quad \text{(4 Kugeln mit der Nummer 2 in der Urne)} \\ P(3) &= \frac{5}{14} \quad \text{(5 Kugeln mit der Nummer 3 in der Urne)} \end{aligned}$$

Wegen der Unabhängigkeit der Ziehungen (die Kugeln werden zurückgelegt) ist das Produktmaß $P(\{(a_1, a_2, a_3)\}) = P(a_1)\, P(a_2)\, P(a_3)$ auf

$$\Omega = \{(a_1, a_2, a_3) \ ; \ a_1, a_2, a_3 \in \{1, 2, 3\}\}$$

zu wählen. Für das Ereigniss

$$E = \text{„die Summe ist 7“} = \{(3,3,1),(3,1,3),(1,3,3),(3,2,2),(2,3,2),(2,2,3)\}$$

folgt

$$\begin{aligned} P(E) = \quad & P(\{(3,3,1)\}) + P(\{(3,1,3)\}) + P(\{(1,3,3)\}) \\ & + P(\{(3,2,2)\}) + P(\{(2,3,2)\}) + P(\{(2,2,3)\}) \\ = 3 \cdot \Big(\frac{5}{14}\Big)^2 \cdot \Big(\frac{5}{14}\Big) + 3 \cdot \Big(\frac{5}{14}\Big) \cdot \Big(\frac{4}{14}\Big)^2 &= \frac{3}{14^3} \cdot 5 \cdot (5^2 + 4^2) = \frac{615}{2744} \approx 0.224. \end{aligned}$$

Aufgabe 29: (Unabhängigkeit)

Man wirft zweimal mit einem fairen Würfel. Welche Paare der folgenden Ereignisse sind unabhängig?
$E_1 :=$ „man wirft eine ungerade und eine gerade Zahl“,
$E_2 :=$ „man wirft zunächst eine ungerade, danach eine gerade Zahl“,
$E_3 :=$ „die Augensumme ist mindestens 11“.

Musterlösung:
Der Stichprobenraum ist

$$\Omega = \{(a_1, a_2)\ ;\ a_1, a_2 \in \{1, \ldots, 6\}\}\ , P(\{(a_1, a_2)\}) = \frac{1}{36}\ .$$

Gefragt sind die Ereignisse
$E_1 = \{(1,2),(1,4),(1,6),(3,2),(3,4),(3,6),(5,2),(5,4),(5,6),$
$\quad (2,1),(4,1),(6,1),(2,3),(4,3),(6,3),(2,5),(4,5),(6,5)\}$,
$E_2 = \{(1,2),(1,4),(1,6),(3,2),(3,4),(3,6),(5,2),(5,4),(5,6)\}$,
$E_3 = \{(6,5),(5,6),(6,6)\}$,
$E_1 \cap E_2 = E_2$, $E_1 \cap E_3 = \{(6,5),(5,6)\}$, $E_2 \cap E_3 = \{(5,6)\}$.
Damit folgt $P(E_1) = 18/36 = 1/2, P(E_2) = 9/36 = 1/4, P(E_3) = 3/36 = 1/12$, also:

$$\begin{aligned} P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{4} \ &\neq \ P(E_1) \cdot P(E_2) = \frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad E_1, E_2 \text{ sind abhängig,} \\ P(E_1 \cap E_3) = \frac{2}{36} \ &\neq \ P(E_1) \cdot P(E_3) = \frac{1}{24} \quad \Rightarrow \quad E_1, E_3 \text{ sind abhängig,} \\ P(E_2 \cap E_3) = \frac{1}{36} \ &\neq \ P(E_2) \cdot P(E_3) = \frac{1}{48} \quad \Rightarrow \quad E_2, E_3 \text{ sind abhängig.} \end{aligned}$$

Aufgabe 30: (Unabhängigkeit)

Zeige, dass für zwei Ereignisse A, B in einem beliebigen Modell $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ die 4 folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) A und B sind unabhängig, b) A und $\Omega \setminus B$ sind unabhängig.
c) $\Omega \setminus A$ und B sind unabhängig, d) $\Omega \setminus A$ und $\Omega \setminus B$ sind unabhängig.

Musterlösung:
Aussage a) bedeutet $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Aussage b) ist äquivalent dazu:

$$\begin{array}{rccc} & P(A \cap (\Omega \setminus B)) & = & P(A) \cdot P(\Omega \setminus B) \\ \Leftrightarrow & P(A \setminus (A \cap B)) & = & P(A) \cdot (1 - P(B)) \\ \Leftrightarrow & P(A) - P(A \cap B) & = & P(A) - P(A) \cdot P(B) \\ \Leftrightarrow & P(A \cap B) & = & P(A) \cdot P(B) \end{array}$$

Analog ist Aussage c) äquivalent zu a):

$$\begin{array}{rccc} & P(B \cap (\Omega \setminus A)) & = & P(B) \cdot P(\Omega \setminus A) \\ \Leftrightarrow & P(B \setminus (B \cap A)) & = & P(B) \cdot (1 - P(A)) \\ \Leftrightarrow & P(B) - P(A \cap A) & = & P(B) - P(B) \cdot P(A) \\ \Leftrightarrow & P(B \cap A) & = & P(B) \cdot P(A) \end{array}$$

Aussage d) ist ebenfalls äquivalent zu a):

$$\begin{array}{rccc} & P((\Omega \setminus A) \cap (\Omega \setminus B)) & = & P(\Omega \setminus A) \cdot P(\Omega \setminus B) \\ \Leftrightarrow & P(\Omega \setminus (A \cup B) & = & (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B)) \\ \Leftrightarrow & 1 - P(A \cup B)) & = & 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B) \\ \Leftrightarrow & P(A \cup B) & = & P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \\ \Leftrightarrow & P(A) + P(B) - P(A \cap B) & = & P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \\ \Leftrightarrow & P(A \cap B) & = & P(A) \cdot P(B) \end{array}$$

Im vorletzten Schritt wurde die allgemeingültige Eigenschaft $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ verwendet.

Aufgabe 31*: (Unabhängigkeit, 15 Punkte)
Die Bevölkerung wird einerseits nach Geschlecht, andererseits nach Körpergröße aufgeteilt:

	männlich	weiblich
groß	p_{gm}	p_{gw}
klein	p_{km}	p_{kw}

Unter welcher (Determinanten–)Bedingung an die Bevölkerungsanteile $p_{gm}, \ldots, p_{kw}$ sind Geschlecht und Größe unabhängig?

Musterlösung:
Nach Aufgabe 30) reicht es, die Unabhängigkeit von „groß“ und „männlich“ zu untersuchen:

$$\begin{array}{rccl} & P(g \cap m) & = & P(g) \cdot P(m) \\ \Leftrightarrow & p_{gm} & = & (p_{gm} + p_{gw}) \cdot (p_{gm} + p_{km}) \\ \Leftrightarrow & p_{gm} & = & p_{gm} \cdot \underbrace{(p_{gm} + p_{km})}_{1 - p_{gw} - p_{kw}} + p_{gw} \cdot (p_{gm} + p_{km}). \end{array}$$

Es gilt $p_{gm} + p_{gw} + p_{km} + p_{kw} = 1$, also $p_{gm} + p_{km} = 1 - p_{gw} - p_{kw}$. Damit ist die Unabhängigkeit äquivalent zu

$$\begin{array}{rcl} & p_{gm} & = & p_{gm} \cdot (1 - p_{gw} - p_{kw}) + p_{gw} \cdot (p_{gm} + p_{km}) \\ & & = & p_{gm} - p_{gm} \cdot p_{gw} - p_{gm} \cdot p_{kw} + p_{gw} \cdot p_{gm} + p_{gw} \cdot p_{km} \\ \Leftrightarrow & 0 & = & -p_{gm} \cdot p_{kw} + p_{gw} \cdot p_{km} \\ \Leftrightarrow & p_{gm} \cdot p_{kw} & = & p_{gw} \cdot p_{km}. \end{array}$$

Dies heißt, dass die „Determinante“ $p_{gm} \cdot p_{kw} - p_{gw} \cdot p_{km}$ der Tabelle verschwinden muß.
