Einführung in die Stochastik — Sommersemester 07

Dr. Walter Oevel — 30. 4. 2007

Übungsblatt 4

Mit $*$ und $**$ gekennzeichnete Aufgaben können zum Sammeln von Bonuspunkten verwendet werden. Lösungen von $*$-Aufgaben sind schriftlich abzugeben im Zettelkasten Nr. 5 auf dem D1 bis Mittwoch, 9.5.07, 11:00 Uhr. Lösungen von $**$-Aufgaben sind per Web-Formular unter `http://www.math.upb.de/~walter` ($\longrightarrow$ Lehre SS 07 $\longrightarrow$ Übungen) abzuliefern bis spätestens Mittwoch, 9.5.07, $23^{\underline{59}}$ Uhr.

Aufgabe 20: (Kombinatorik, Ursachensysteme, totale Wahrscheinlichkeit)

Folgender Programmcode soll eine Liste `[x[1],...,x[n]]` von Zahlen aufsteigend sortieren:

```
for i from 1 to n - 1 do
  min_value:= x[i];
  min_index:= i;
  for j from i + 1 to n - 1 do
     if x[j] < min_value then
        min_value:= x[j];
        min_index:= j;
     end_if;
  end_for;
  tmp:= x[i];
  x[i]:= min_value;
  x[min_index]:= tmp;
end_for;
```

a) Der Code enthält einen Fehler. Charakterisiere die Eingabelisten, die von diesem Programm korrekt sortiert werden.

b) Zum Testen des Programms wird eine Liste mit 10 Elementen gewürfelt (also: alle Listenelemente sind aus der Menge $\{1,\ldots,6\}$). Mit welcher Wahrscheinlichkeit entdeckt man, dass das Programm fehlerhaft ist?

Anleitung zu b): Sei E das Ereignis „die Liste wird so gewürfelt, dass das Programm sie korrekt sortiert“. Eine mögliche Zerlegung des Stichprobenraums, das als Ursachensystem für E dienen kann, sind die Ereignisse $U_i =$ „das letzte Element der Liste ist i“, $i = 1, 2, \ldots, 6$. Die Wahrscheinlichkeiten $P(E \cap U_i)$ können ohne größeren kombinatorischen Aufwand ermittelt werden.

Aufgabe 21*: (Satz von Bayes, 15 Punkte)

Von der Produktion einer Fabrik entspricht 90% den technischen Anforderungen, der Rest ist fehlerhaft. Ein vereinfachter Kontrolltest lässt ein einwandfreies Produkt mit der Wahrscheinlichkeit 0.98 passieren, ein defektes Produkt wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.95 durch den Test als nichtfunktionsfähig identifiziert. Ist diese Kontrolle gut genug, um garantieren zu können, dass mehr als 99% der ausgelieferten Waren den technischen

Anforderungen genügen?

Aufgabe 22:** (Totale Wahrscheinlichkeit, Bayes, 10 + 10 Punkte)
Dies ist eine Online-Aufgabe, die bis zum 9.5.07, 23^{59} Uhr, abzuliefern ist. Der Aufgabenserver ändert die Regeln des folgenden Spiels dabei zufällig ab.

In einem Spiel wird zunächst ein (fairer) Würfel geworfen, danach wird gegebenenfalls eine (faire) Münze geworfen: Würfelt man eine 1, so gilt das Spiel als verloren. Würfelt man eine der Zahlen von 2 bis 5, so wirft man die Münze 1 Mal. Würfelt man eine 6, so wirft man die Münze 2 Mal. Man gewinnt, wenn mit der Münze mindestens einmal „Kopf“ geworfen wird.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man gewinnt?

(b) Man hat gewonnen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde eine 6 gewürfelt?

Aufgabe 23*: (Kombinatorik, Bayes, 15 + 10 Punkte)
Eine Urne enthält m gerade Zahlen und n ungerade Zahlen ($m + n \geq 2$). Es wird zwei Mal ohne Zurücklegen gezogen.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der gezogenen Zahlen gerade ist?

(b) Die Summe ist gerade. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war die erste gezogene Zahl gerade?

Aufgabe 24: (Katastrophenvorhersage, totale Wahrscheinlichkeit, Bayes)
Dozent O hat folgende Erfahrungswerte: Ein Student, der regelmäßig Übungsaufgaben rechnet, besteht seine Klausur mit einer Wahrscheinlichkeit von 80%. Ein Student, der nicht regelmäßig Übungsaufgaben rechnet, fällt mit einer Wahrscheinlichkeit von 70% durch die Klausur. Für die Veranstaltung „Mathe III.1 für Informatiker“ des Wintersemesters 2001 hatten sich 275 StudentInnen eingetragen. Am 7.11.01 wurden lediglich 33 Übungsblätter zur Korrektur abgegeben. Welche Vorhersage ergab sich im November 2001 für die Durchfallquote der Klausur,

a) wenn alle 275 Kandidaten die Klausur schreiben,

b) wenn nur 140 der 275 Kandidaten die Klausur schreiben? Man sollte davon ausgehen, dass Studenten, die regelmäßig Übungen abgeben, auch die Klausur schreiben.

c) Wieviele der bestehenden Kandidaten haben regelmäßig Übungsaufgaben gerechnet?

Aufgabe 25: (Das „Showmaster–“ oder auch „Ziegenproblem“)
Bei einer Show gibt es ein teures Auto zu gewinnen, das hinter einer von drei Türen steht (hinter den anderen Türen steht jeweils eine Ziege). Als erstes bittet der Showmaster die Kandidatin, eine der drei Türen zu wählen. Dann öffnet er eine andere Tür, hinter der das Auto nicht steht, und bittet die Kandidatin, sich für eine der übriggebliebenen Türen zu entscheiden. Sollte die Kandidatin die Tür wechseln oder bei ihrer zuerst gewählten Tür bleiben?