

Ü b u n g s b l a t t 3

Mit * und ** gekennzeichnete Aufgaben können zum Sammeln von Bonuspunkten verwendet werden. Lösungen von *-Aufgaben sind schriftlich abzugeben im Zettelkasten Nr. 5 auf dem D1 bis Mittwoch, 2.5.07, 11:00 Uhr. Lösungen von **-Aufgaben sind per Web-Formular unter <http://www.math.upb.de/~walter> ($\longrightarrow$ Lehre SS 07 $\longrightarrow$ Übungen) abzuliefern bis spätestens Mittwoch, 2.5.07, 23⁵⁹ Uhr.

Aufgabe 15*: (Bedingte Wahrscheinlichkeiten, 15 Punkte)

Beweise die Aussage 1.27 des Skripts:

Für einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ und ein gegebenes Ereignis $A \in \mathcal{E}$ mit $P(A) > 0$ ist $(\Omega_A, \mathcal{E}_A, P_A)$ mit $\Omega_A = A$, $\mathcal{E}_A = \{E \cap A; E \in \mathcal{E}\}$ und $P_A(B) = P(B|A) = P(A \cap B)/P(A)$ wieder ein Wahrscheinlichkeitsraum nach Definition 1.2 des Skripts.

Musterlösung:

Es ist zu zeigen, dass $\mathcal{E}_A$ sowohl die leere Menge als auch $\Omega_A = A$ enthält. Dies ist aber unmittelbar klar, da $\mathcal{E}$ die leere Menge als auch das Ereignis A enthält.

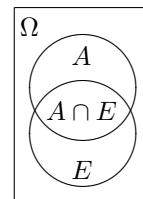
Es ist zu zeigen, dass $\mathcal{E}_A$ abgeschlossen ist unter abzählbarer Vereinigung von Ereignissen $E_A^{(i)} \in \mathcal{E}_A$. Es gilt $\cup_i E_A^{(i)} \in \mathcal{E}$, da alle $E_A^{(i)}$ in $\mathcal{E}$ liegen und $\mathcal{E}$ abgeschlossen ist bezüglich abzählbarer Vereinigungen. Weiterhin gilt $\cup_i E_A^{(i)} \subset A$, da alle $E_A^{(i)}$ Teilmengen von $\Omega_A = A$ sind. Also hat $\cup_i E_A^{(i)}$ die Darstellung

$$\cup_i E_A^{(i)} = A \cap \underbrace{\left(\cup_i E_A^{(i)} \right)}_{\in \mathcal{E}}$$

und liegt damit wieder in $\mathcal{E}_A$.

Es ist zu zeigen, dass $\mathcal{E}_A$ abgeschlossen ist unter Komplementbildung. Dazu sei $E_A = A \cap E \in \mathcal{E}_A$ mit $E \in \mathcal{E}$ vorgegeben. Es gilt

$$\Omega_A \setminus E_A = A \setminus (A \cap E) = A \cap (\Omega \setminus E).$$



Da $\Omega \setminus E \in \mathcal{E}$ gilt, folgt $\Omega_A \setminus E_A \in \mathcal{E}_A$.

Für das W'keitsmaß P gilt

$$P_A(\emptyset) = \frac{P(\emptyset \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\emptyset)}{P(A)} = 0$$

und

$$P_A(\Omega_A) = P_A(A) = \frac{P(A \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1.$$

Weiterhin ist die Sigma-Additivität von P_A zu zeigen. Seien dazu $E_A^{(i)} \subset \mathcal{E}_A$ abzählbar viele disjunkte Ereignisse in $\mathcal{E}_A$. Mit der Sigma-Additivität von P gilt:

$$\begin{aligned} P_A(\cup_i E_A^{(i)}) &= \frac{P(A \cap (\cup_i E_A^{(i)}))}{P(A)} = \frac{P(\cup_i (A \cap E_A^{(i)}))}{P(A)} = \frac{P(\cup_i E_A^{(i)})}{P(A)} \\ &= \frac{\sum_i P(E_A^{(i)})}{P(A)} = \sum_i \frac{P(E_A^{(i)})}{P(A)} = \sum_i \frac{P(A \cap E_A^{(i)})}{P(A)} = \sum_i P_A(E_A^{(i)}). \end{aligned}$$

Aufgabe 16: (Bedingte Wahrscheinlichkeiten)

Mir wurde erzählt, dass es in den Familien Meier und Müller jeweils 2 Kinder gibt. Über das Geschlecht der Kinder weiß ich nichts.

- Heute morgen traf ich Frau Meier mit einem Jungen, den sie mir als ihren Sohn vorstellte. Mit welcher W'keit gibt es in Familie Meier zwei Söhne?
- Danach traf ich Frau Müller mit einem Jungen, den sie mir als ihre jüngstes Kind vorstellte. Mit welcher W'keit gibt es in Familie Müller zwei Söhne?

Musterlösung:

Da das Zufallsexperiment „Geschlecht eines Kindes“ für jedes Kind unabhängig in zeitlicher Reihenfolge geschieht, sind die Kinder als geordnete Tupel (jüngstes Kind, ältestes Kind) zu modellieren, also

$$\Omega = \{(K_1, K_2); K_1, K_2 \in \{J, M\}\} \quad (\text{mit Gleichverteilung}).$$

- a) Es ist das Ereignis A eingetreten, dass Familie Meier mindestens einen Jungen hat, also $A = \{(J, J), (J, M), (M, J)\}$. Gefragt ist nach $E = \{(J, J)\}$ unter der Information A , also

$$P(E|A) = \frac{P(E \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\{(J, J)\})}{P(\{(J, J), (J, M), (M, J)\})} = \frac{1}{3}.$$

- b) Es ist das Ereignis B eingetreten, dass das jüngste Kind der Familie Müller ein Junge ist, also $B = \{(J, J), (J, M)\}$. Gefragt ist nach $E = \{(J, J)\}$ unter der Information B , also

$$P(E|B) = \frac{P(E \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{(J, J)\})}{P(\{(J, J), (J, M)\})} = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 17: (Bedingte Wahrscheinlichkeiten)

Man wirft den unfairen Würfel aus Aufgabe 12, wobei sich eine ungerade Zahl ergibt. Mit welcher W'keit war es die 5?

Musterlösung:

Das Ereignis $A = \{1, 3, 5\}$ ist eingetreten:

$$P(\{5\}|A) = \frac{P(\{5\} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\{5\})}{P(\{1, 3, 5\})} = \frac{p_5}{p_1 + p_3 + p_5} = \frac{0.2}{0.1 + 0.1 + 0.2} = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 18:** (Bedingte Wahrscheinlichkeiten, 15 Punkte)

Dies ist eine Online-Aufgabe, die bis zum 2.5.07, 23⁵⁹ Uhr, abzuliefern ist.

Ein Brief ist verlegt worden. Er liegt mit der Wahrscheinlichkeit p in einer der 9 Schubladen eines Aktenschrankes (p wird vom Aufgabenserver zufällig gewählt). In 8 Läden ist bereits vergeblich gesucht worden. Mit welcher Aussicht öffnet man die letzte Schublade?

Musterlösung:

Wähle als Stichprobenraum $\Omega = \{1, \dots, 10\}$, wobei $1, \dots, 9$ die Schubladen des Schrankes seien, 10 bedeute „der Brief liegt irgendwo anders“. Das Wahrscheinlichkeitsmaß sei gegeben durch $p_1, \dots, p_{10}$ mit

$$p_1 + p_2 + \dots + p_9 = p, \quad p_{10} = 1 - p.$$

Es ist das Ergebnis $A = \{9, 10\}$ eingetreten (der Brief liegt nicht in $1, \dots, 8$, also in 9 oder anderswo). Gefragt ist

$$P(\{9\} | A) = \frac{P(\{9\} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\{9\})}{P(\{9, 10\})} = \frac{p_9}{p_9 + 1 - p}.$$

Setzt man zusätzlich voraus, dass der Brief mit gleicher Wahrscheinlichkeit in jeder der 9 Schubladen gelandet sein konnte, d.h., $p_1 = p_2 = \dots = p_9 = p/9$, so folgt

$$P(\{9\} | A) = \frac{p_9}{p_9 + 1 - p} = \frac{p/9}{p/9 + 1 - p} = \frac{p}{9 - 8 \cdot p}$$

Unter der Zusatzvoraussetzung der Gleichverteilung innerhalb des Aktenschrankes liegt der Brief also mit einer Wahrscheinlichkeit von $p/(9 - 8 \cdot p)$ in der 9-ten Schublade.

Aufgabe 19*: (Bedingte Wahrscheinlichkeiten, 20 Punkte)

Bei Shakespeare sagt Caesar zu Antonius: „Die Mageren sind gefährlich“. Zeige, dass er damit auch zu der Aussage „Die Gefährlichen sind mager“ stehen muss.

Anleitung: Seien M , G , $\bar{M}$, $\bar{G}$ die Ereignisse, dass eine willkürlich ausgewählte Person mager, gefährlich, nicht mager bzw. nicht gefährlich ist. Offensichtlich ist Caesar der Meinung, dass $P(G | M) > P(G | \bar{M})$ gilt. Zeige, dass dies äquivalent zu $P(G \cap M) > P(G) \cdot P(M)$ ist.

Musterlösung:

Für die Komplementärereignisse M , $\bar{M}$ bzw. G , $\bar{G}$ gilt im Stichprobenraum $\Omega = M \cup \bar{M} = G \cup \bar{G}$:

$$P(M) + P(\bar{M}) = 1, \quad P(G) + P(\bar{G}) = 1.$$

Caesars Aussage ist

$$\begin{aligned} P(G | M) &> P(G | \bar{M}) \\ \Leftrightarrow \frac{P(G \cap M)}{P(M)} &> \frac{P(G \cap \bar{M})}{P(\bar{M})} \\ \Leftrightarrow P(G \cap M) \cdot P(\bar{M}) &> P(G \cap \bar{M}) \cdot P(M) \\ \Leftrightarrow P(G \cap M) \cdot (1 - P(M)) &> P(G \cap \bar{M}) \cdot P(M) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow P(G \cap M) > P(G \cap \bar{M}) \cdot P(M) + P(G \cap M) \cdot P(M) = \left(P(G \cap \bar{M}) + P(G \cap M) \right) \cdot P(M).$$

Hierbei addieren sich die W'keiten der disjunkten Mengen $G \cap \bar{M}$ und $G \cap M$ auf zu

$$P(G \cap \bar{M}) + P(G \cap M) = P\left((G \cap \bar{M}) \cup (G \cap M)\right) = P\left(G \cap (\bar{M} \cup M)\right) = P(G).$$

Caesar's Aussage ist also äquivalent zur Aussage

$$P(G \cap M) > P(G) P(M).$$

Diese Aussage ist völlig symmetrisch unter dem Austausch $(G, M) \leftrightarrow (M, G)$, also ist diese Aussage auch äquivalent zu

$$P(M | G) > P(M | \bar{G}),$$

was in Caesars Sprechweise als die Aussage „Die Gefährlichen sind mager“ zu interpretieren ist. Schritt für Schritt:

$$\begin{aligned} & P(M | G) > P(M | \bar{G}) \\ \Leftrightarrow & \frac{P(G \cap M)}{P(G)} > \frac{P(\bar{G} \cap M)}{P(\bar{G})} \\ \Leftrightarrow & P(G \cap M) \cdot P(\bar{G}) > P(\bar{G} \cap M) \cdot P(G) \\ \Leftrightarrow & P(G \cap M) \cdot (1 - P(G)) > P(\bar{G} \cap M) \cdot P(G) \\ \Leftrightarrow & P(G \cap M) > P(\bar{G} \cap M) \cdot P(G) + P(G \cap M) \cdot P(G) = \left(P(\bar{G} \cap M) + P(G \cap M) \right) \cdot P(G) \\ \Leftrightarrow & P(G \cap M) > P(M) \cdot P(G). \end{aligned}$$
