Ü b u n g s b l a t t 2

Mit $*$ und $**$ gekennzeichnete Aufgaben können zum Sammeln von Bonuspunkten verwendet werden. Lösungen von $*$-Aufgaben sind schriftlich abzugeben im Zettelkasten Nr. 5 auf dem D1 bis Mittwoch, 25.4.07, 11:00 Uhr. Lösungen von $**$-Aufgaben sind per Web-Formular unter `http://www.math.upb.de/~walter` ($\longrightarrow$ Lehre SS 07 $\longrightarrow$ Übungen) abzuliefern bis spätestens Mittwoch, 25.4.07, $23^{\underline{59}}$ Uhr.

Aufgabe 10*: (Zur hypergeometrischen Verteilung, 30 Punkte)
Die Elementarwahrscheinlicheiten der hypergeometrischen Verteilung mit den Parametern N, S, n auf dem Stichprobenraum $\Omega = \{0, 1, \ldots, n\}$ waren in der Vorlesung als

$$P(\{s\}) = \frac{\binom{S}{s}\binom{N-S}{n-s}}{\binom{N}{n}}, \qquad s \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

angegeben worden. Beweise, dass sich diese Wahrscheinlichkeiten zu 1 aufaddieren!

Musterlösung:
Es ist zu zeigen, dass $\sum_{s=0}^{n} P(\{s\}) = 1$ gilt, also, dass für jedes $N, S, n \in \mathbb{N}$ mit $n \le N$ und $S \le N$ gilt:

$$\sum_{s=0}^{n} \binom{S}{s} \cdot \binom{N-S}{n-s} = \binom{N}{n}.$$

Mit der bekannten Binomialentwicklung gilt für beliebiges $S, N \in \mathbb{N}$ mit $N \ge S$ (mit einer Unbestimmten x):

$$(1+x)^S \cdot (1+x)^{N-S} = \left(\sum_{s=0}^{S} \binom{S}{s} \cdot x^s\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{N-S} \binom{N-S}{k} \cdot x^k\right) = \sum_{s=0}^{S} \sum_{k=0}^{N-S} \binom{S}{s} \cdot \binom{N-S}{k} \cdot x^{s+k}.$$

Wir setzen $n = s + k$ und summieren um. Für gegebenes $s \in \{0, 1, \ldots, S\}$ läuft dabei n von s bis $s + N - S$:

$$(1+x)^S \cdot (1+x)^{N-S} = \sum_{s=0}^{S} \sum_{n=s}^{s+N-S} \binom{S}{s} \cdot \binom{N-S}{n-s} \cdot x^n.$$

Da $\binom{N-S}{k} = 0$ für $k \ge N - S$, kann die innere Summe statt bis $N - S + s$ bis N laufen, ohne dass sich der Wert ändert:

$$(1+x)^S \cdot (1+x)^{N-S} = \sum_{s=0}^{S} \sum_{n=s}^{N} \binom{S}{s} \cdot \binom{N-S}{n-s} \cdot x^n.$$

Jede Doppelsumme der Form $\sum_{s=0}^{S} \sum_{n=s}^{N}$ lässt sich zur Doppelsumme $\sum_{n=0}^{N} \sum_{s=0}^{n}$ umsummieren:

$$(1+x)^S \cdot (1+x)^{N-S} = \sum_{n=0}^{N} \sum_{s=0}^{n} \binom{S}{s} \cdot \binom{N-S}{n-s} \cdot x^n.$$

Ergebnis:

$$(1+x)^S \cdot (1+x)^{N-S} = (1+x)^N = \sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{s=0}^{n} \binom{S}{s} \cdot \binom{N-S}{n-s} \right) \cdot x^n.$$

Andererseits gilt die Binomialentwicklung $(1+x)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} \cdot x^n$. In der Polynomidentität

$$\sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{s=0}^{n} \binom{S}{s} \cdot \binom{N-S}{n-s} \right) \cdot x^n = (1+x)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} \cdot x^n$$

müssen alle Koeffizienten links und rechts übereinstimmen, also

$$\sum_{s=0}^{n} \binom{S}{s} \cdot \binom{N-S}{n-s} = \binom{N}{n}.$$

Aufgabe 11:** (Szenen einer Ehe: die hypergeometrische Verteilung. 20 Punkte)
Dies ist eine Online-Aufgabe, die bis zum 25.4.07, 23^{59} Uhr, abzuliefern ist.

Meine Frau ist unternehmungslustig und geht regelmäßig an m (zufällig gewählten) Tagen der Woche allein aus. Im Zuge der Gleichberechtigung tue ich dies an n Tagen der Woche ebenfalls. Da unsere Aktivitäten unabhängig voneinander sind, ziehen wir manchmal an den selben Wochentagen, manchmal an unterschiedlichen Wochentagen jeder für sich los.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit verbleiben uns genau k Wochentage für gemeinsame Aktivitäten? (Zahlenwerte für m, n und k werden vom Aufgabenserver zufällig gewählt.)

Musterlösung:
In der Menge von $N = 7$ Wochentagen werden m Wochentage markiert, an denen meine Frau allein ausgeht. Ich wähle nun stochastisch n Wochentage, an denen ich meinerseits allein ausgehe. Mit „Population = 7 Wochentage", „Erfolgspopulation = m Wochentage, an denen meine Frau ausgeht" ist nach Vorlesung die Wahrscheinlichkeit, bei n Ziehungen genau s „Erfolge" zu haben (d.h., selbst an jenen Tagen auszugehen, an denen meine Frau ausgeht) durch die hypergeometrische Verteilung

$$P(\text{„genau } s \text{ Erfolge bei } n \text{ Ziehungen"}) = \frac{\binom{m}{s}\binom{N-m}{n-s}}{\binom{N}{n}}$$

gegeben. Bei $s \in \{0, 1, \ldots, n\}$ „Erfolgen" verbleiben $k = N - m - n + s \in \{N - m - n, \ldots, N - m\}$ Wochentage für gemeinsame Aktivitäten. Setzt man $s = k + m + n - N$, so ergibt sich:

$$P(\text{„genau } k \text{ gemeinsame Tage"}) = \frac{\binom{m}{k+m+n-N}\binom{N-m}{N-k-m}}{\binom{N}{n}}.$$

Für $k < 0$ und $k > N - n$ verschwindet jeweils einer der Binomialkoeffizienten im Nenner; diese Wahrscheinlichkeiten sind also 0. Setzt man die formale Definition der Binomialkoeffizienten ein, so ergibt sich für $0 \le k \le N - n$ und $N - m - n \le k \le N - m$, also für

$$\max(0, N - m - n) \le k \le \min(N - m, N - n)$$

die Darstellung

P(„genau k gemeinsame Tage")

$$
\begin{aligned}
&= \frac{m!}{(k+m+n-N)! \cdot (N-k-n)!} \cdot \frac{(N-m)!}{(N-k-m)! \cdot k!} \cdot \frac{n! \cdot (N-n)!}{N!} \\
&= \frac{m! \cdot n! \cdot (N-m)! \cdot (N-n)!}{k! \cdot N! \cdot (k+m+n-N)! \cdot (N-k-m)! \cdot (N-k-n)!} \\
&= \frac{m! \cdot n!}{k! \cdot N! \cdot (k+m+n-N)!} \cdot \prod_{j=0}^{k-1}(N-m-j) \cdot \prod_{j=0}^{k-1}(N-n-j).
\end{aligned}
$$

Das Produkt $\prod_{j=0}^{j=-1}$ wird dabei als 1 definiert. Da für $k > \min(N-m, N-n)$ jeweils eines der Produkte 0 liefert, gilt die obige Darstellung der Wahrscheinlichkeiten für beliebiges $k \geq \max(0, N-m-n)$. Das Ergebnis ist symmetrisch in m und n (wie es –im Zuge der Gleichberechtigung– ja auch sein sollte).

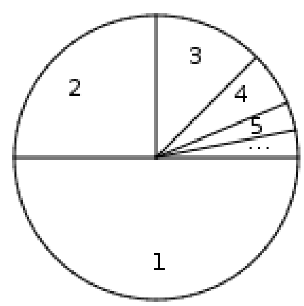
Aufgabe 12: (Nicht-Kombinatorik)

Bei einem unfairen Würfel seien die Wahrscheinlichkeiten, die Zahl i zu werfen, gegeben durch p_i (mit $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.2$, $p_3 = 0.1$, $p_4 = 0.2$, $p_5 = 0.2$, $p_6 = 0.2$). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man entweder eine gerade Zahl oder eine 5 würfelt?

Musterlösung:

$$
\begin{aligned}
& \Omega = \{1,2,3,4,5,6\}\ ,\ P(\{i\}) = p_i\ ,\ E = \{2,4,6,5\} \\
\Rightarrow \quad & P(E) = p_2 + p_4 + p_6 + p_5 = 0.2 + 0.2 + 0.2 + 0.2 = 0.8\ .
\end{aligned}
$$

Aufgabe 13: (Nicht-Kombinatorik)



Das nebenstehende Glücksrad wird gedreht. Es kann alle Zahlen $i \in \mathbb{N}$ mit den Wahrscheinlichkeiten $p_i = 1/2^i$ liefern.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man eine gerade Zahl?

b) Ich wette darauf, dass sich eine der Quadratzahlen $1, 4, 9, 16, \ldots$ ergibt. Ist das klug?

Musterlösung:
Die Wahrscheinlichkeiten addieren sich in der Tat zu 1 auf. Die bekannte Summenformel

$$
\sum_{i=0}^{N} p^i = \frac{1-p^{N+1}}{1-p} \quad \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{1}{1-p} \qquad (|p| < 1)
$$

für geometrische Reihen liefert: $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \; - \; 1 = \frac{1}{1 - 1/2} \; - \; 1 = 1.$

a) Das Ereignis $E =$ „gerade Zahl“ $= \{2, 4, 6, \ldots\} = \{2 \cdot j;\; j \in \mathbb{N}\}$ hat die Wahrscheinlichkeit

$$P(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2 \cdot j} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{j} = \frac{1}{1 - 1/4} \; - \; 1 = \frac{1}{3}.$$

b) Das Ereignis $E =$ „Quadratzahl“ $= \{1, 4, 6, \ldots\} = \{j^2;\; j \in \mathbb{N}\}$ hat die Wahrscheinlichkeit

$$P(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{j^2} .$$

Diese Summe lässt sich nicht exakt ausdrücken, numerisch ergibt sich

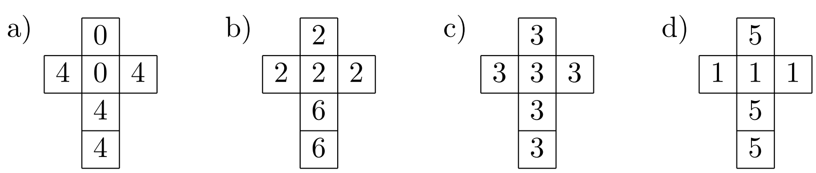
$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{j^2} \approx \sum_{j=1}^{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{j^2} \approx 0.5644684136,$$

so dass meine Wette auf eine Quadratzahl zumindestens nicht ganz unklug ist. (Das war eigentlich klar, die Quadratzahl 1 wird schon mit der Wahrscheinlichkeit $1/2$ geliefert, also muss die Wahrscheinlichkeit für irgendeine Quadratzahl sicher größer als $1/2$ sein).
Die obige Approximation durch die endliche Summe ist dabei auf die angegebenen 10 Stellen genau: Sie hat einen Fehler, der maximal

$$\sum_{j=6}^{\infty} \frac{1}{2^{j^2}} < \sum_{j=6^2}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} - \sum_{j=0}^{6^2-1} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{1 - 1/2} - \frac{1 - (1/2)^{36}}{1 - 1/2} = \frac{1}{2^{35}} \approx 2.9 \cdot 10^{-11}$$

beträgt.

Aufgabe 14: (Die nichttransitiven Würfel von Bradley Efron (Stanfor Univ.))
Gegeben sind die folgenden vier Würfel:



Kain darf sich zuerst einen dieser Würfel auswählen; anschließend wählt Abel einen der übrigen drei Würfel. Jeder wirft seinen Würfel. Wer die höhere Punktzahl hat, ist Sieger.

Kain ist hierbei im Nachteil. Abel –ein begnadeter Stochastiker– kann zu jeder Wahl von Kain eine Wahl treffen, die ihm die Gewinnchance $2/3$ garantiert. Welche Wahl trifft Abel in Abhängigkeit von Kains Wahl?

Anleitung (Vorgriff auf den Begriff der Unabhängigkeit): Die Wahrscheinlichkeiten für das gleichzeitige Auftreten unabhängiger Ereignisse entstehen durch Multiplikation:

$$P(\text{„Kain hat das Ergebnis } x \text{ und Abel das Ergebnis } y\text{“}) =$$

$$P(\text{„Kain hat das Ergebnis } x\text{“}) \cdot P(\text{„Abel hat das Ergebnis } y\text{“}).$$

Musterlösung:

$\boxed{\text{Kain wählt a), Abel wählt b).}}$ Sei $\Omega_{ab} = \{(K,A);\ K \in \{0,4\},\ A \in \{2,6\}\}$,

$$P(\{(0,2)\}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{9},\ P(\{(0,6)\}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{9},\ P(\{(4,2)\}) = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{9},\ P(\{(4,6)\}) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{9}.$$

Für das Ereignis $E =$ „Abel gewinnt“ $= \{(0,2),(0,6),(4,6)\}$ folgt $P(E) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$.

$\boxed{\text{Kain wählt a), Abel wählt c).}}$ Sei $\Omega_{ac} = \{(K,A);\ K \in \{0,4\},\ A \in \{3\}\}$,

$$P(\{(0,3)\}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{6}{6} = \frac{1}{3},\ P(\{(4,3)\}) = \frac{4}{6} \cdot \frac{6}{6} = \frac{2}{3}.$$

Für das Ereignis $E =$ „Abel gewinnt“ $= \{(0,3)\}$ folgt $P(E) = \frac{1}{3}$.

$\boxed{\text{Kain wählt a), Abel wählt d).}}$ Sei $\Omega_{ad} = \{(K,A);\ K \in \{0,4\},\ A \in \{1,5\}\}$,

$$P(\{(0,1)\}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{6},\ P(\{(0,5)\}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{6},\ P(\{(4,1)\}) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{3},\ P(\{(4,5)\}) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{3}.$$

Für das Ereignis $E =$ „Abel gewinnt“ $= \{(0,1),(0,5),(4,5)\}$ folgt $P(E) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

$$\boxed{\boxed{\text{Wählt Kain a), so wählt Abel d) und gewinnt mit der Wahrscheinlichkeit 2/3.}}}$$

$\boxed{\text{Kain wählt b), Abel wählt a).}}$ Die Wahrscheinlichkeit $P(\text{„Abel gewinnt“}) = \frac{5}{9}$ ist die Komplementärwahrscheinlichkeit des oben berechneten Falls „Kain wählt a), Abel wählt b)“.

$\boxed{\text{Kain wählt b), Abel wählt c).}}$ Sei $\Omega_{bc} = \{(K,A);\ K \in \{2,6\},\ A \in \{3\}\}$,

$$P(\{(2,3)\}) = \frac{4}{6} \cdot \frac{6}{6} = \frac{2}{3},\ P(\{(6,3)\}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{6}{6} = \frac{1}{3}.$$

Für das Ereignis $E =$ „Abel gewinnt“ $= \{(2,3)\}$ folgt $P(E) = \frac{2}{3}$

$\boxed{\text{Kain wählt b), Abel wählt d).}}$ Sei $\Omega_{bd} = \{(K,A);\ K \in \{2,6\},\ A \in \{1,5\}\}$,

$$P(\{(2,1)\}) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{3},\ P(\{(2,5)\}) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{3},\ P(\{(6,1)\}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{6},\ P(\{(6,5)\}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{6}.$$

Für das Ereignis $E =$ „Abel gewinnt“ $= \{(2,5)\}$ folgt $P(E) = \frac{1}{3}$.

$$\boxed{\boxed{\text{Wählt Kain b), so wählt Abel c) und gewinnt mit der Wahrscheinlichkeit 2/3.}}}$$

$\boxed{\text{Kain wählt c), Abel wählt a).}}$ Die Wahrscheinlichkeit $P(\text{„Abel gewinnt“}) = \frac{2}{3}$ ist die Komplementärwahrscheinlichkeit des oben berechneten Falls „Kain wählt a), Abel wählt c)“.

$\boxed{\text{Kain wählt c), Abel wählt b).}}$ Die Wahrscheinlichkeit $P(\text{„Abel gewinnt“}) = \frac{1}{3}$ ist die Komplementärwahrscheinlichkeit des oben berechneten Falls „Kain wählt b), Abel wählt c)“.

$\boxed{\text{Kain wählt c), Abel wählt d).}}$ Sei $\Omega_{cd} = \{(K, A);\ K \in \{3\},\ A \in \{1, 5\}\}$,

$$P(\{(3,1)\}) = \frac{6}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{2},\ P(\{(3,5)\}) = \frac{6}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Für das Ereignis $E = \text{„Abel gewinnt“} = \{(3,5)\}$ folgt $P(E) = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\boxed{\text{Wählt Kain c), so wählt Abel a) und gewinnt mit der Wahrscheinlichkeit 2/3.}}}$$

$\boxed{\text{Kain wählt d), Abel wählt a).}}$ Die Wahrscheinlichkeit $P(\text{„Abel gewinnt“}) = \frac{1}{3}$ ist die Komplementärwahrscheinlichkeit des oben berechneten Falls „Kain wählt a), Abel wählt d)“.

$\boxed{\text{Kain wählt d), Abel wählt b).}}$ Die Wahrscheinlichkeit $P(\text{„Abel gewinnt“}) = \frac{2}{3}$ ist die Komplementärwahrscheinlichkeit des oben berechneten Falls „Kain wählt b), Abel wählt d)“.

$\boxed{\text{Kain wählt d), Abel wählt c).}}$ Die Wahrscheinlichkeit $P(\text{„Abel gewinnt“}) = \frac{1}{2}$ ist die Komplementärwahrscheinlichkeit des oben berechneten Falls „Kain wählt c), Abel wählt d)“.

$$\boxed{\boxed{\text{Wählt Kain d), so wählt Abel b) und gewinnt mit der Wahrscheinlichkeit 2/3.}}}$$
