

Ü b u n g s b l a t t 2

Mit * und ** gekennzeichnete Aufgaben können zum Sammeln von Bonuspunkten verwendet werden. Lösungen von *-Aufgaben sind schriftlich abzugeben im Zettelkasten Nr. 5 auf dem D1 bis Mittwoch, 25.4.07, 11:00 Uhr. Lösungen von **-Aufgaben sind per Web-Formular unter <http://www.math.upb.de/~walter> (→ Lehre SS 07 → Übungen) abzuliefern bis spätestens Mittwoch, 25.4.07, 23⁵⁹ Uhr.

Aufgabe 10*: (Zur hypergeometrischen Verteilung, 30 Punkte)

Die Elementarwahrscheinlichkeiten der hypergeometrischen Verteilung mit den Parametern N, S, n auf dem Stichprobenraum $\Omega = \{0, 1, \dots, n\}$ waren in der Vorlesung als

$$P(\{s\}) = \frac{\binom{S}{s} \binom{N-S}{n-s}}{\binom{N}{n}}, \quad s \in \{0, 1, \dots, n\}$$

angegeben worden. Beweise, dass sich diese Wahrscheinlichkeiten zu 1 aufaddieren!

Aufgabe 11:** (Szenen einer Ehe: die hypergeometrische Verteilung. 20 Punkte)

Dies ist eine Online-Aufgabe, die bis zum 25.4.07, 23⁵⁹ Uhr, abzuliefern ist.

Meine Frau ist unternehmungslustig und geht regelmäßig an m (zufällig gewählten) Tagen der Woche allein aus. Im Zuge der Gleichberechtigung tue ich dies an n Tagen der Woche ebenfalls. Da unsere Aktivitäten unabhängig voneinander sind, ziehen wir manchmal an den selben Wochentagen, manchmal an unterschiedlichen Wochentagen jeder für sich los.

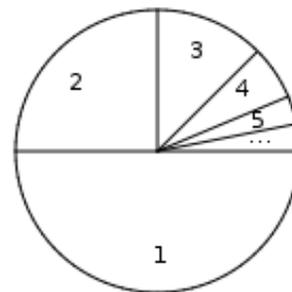
Mit welcher Wahrscheinlichkeit verbleiben uns genau k Wochentage für gemeinsame Aktivitäten? (Zahlenwerte für m, n und k werden vom Aufgabenserver zufällig gewählt.)

Aufgabe 12: (Nicht-Kombinatorik)

Bei einem unfairen Würfel seien die Wahrscheinlichkeiten, die Zahl i zu werfen, gegeben durch p_i (mit $p_1 = 0.1, p_2 = 0.2, p_3 = 0.1, p_4 = 0.2, p_5 = 0.2, p_6 = 0.2$). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man entweder eine gerade Zahl oder eine 5 würfelt?

Aufgabe 13: (Nicht-Kombinatorik)

Das nebenstehende Glücksrad wird gedreht. Es kann alle Zahlen $i \in \mathbb{N}$ mit den Wahrscheinlichkeiten $p_i = 1/2^i$ liefern.

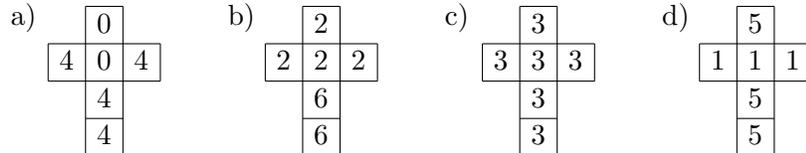


a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man eine gerade Zahl?

b) Ich wette darauf, dass sich eine der Quadratzahlen 1, 4, 9, 16, ... ergibt. Ist das klug?

Aufgabe 14: (Die nichttransitiven Würfel von Bradley Efron (Stanfor Univ.))

Gegeben sind die folgenden vier Würfel:



Kain darf sich zuerst einen dieser Würfel auswählen; anschließend wählt Abel einen der übrigen drei Würfel. Jeder wirft seinen Würfel. Wer die höhere Punktzahl hat, ist Sieger.

Kain ist hierbei im Nachteil. Abel –ein begnadeter Stochastiker– kann zu jeder Wahl von Kain eine Wahl treffen, die ihm die Gewinnchance $2/3$ garantiert. Welche Wahl trifft Abel in Abhängigkeit von Kains Wahl?

Anleitung (Vorgriff auf den Begriff der Unabhängigkeit): Die Wahrscheinlichkeiten für das gleichzeitige Auftreten unabhängiger Ereignisse entstehen durch Multiplikation:

$$P(\text{„Kain hat das Ergebnis } x \text{ und Abel das Ergebnis } y\text{“}) = P(\text{„Kain hat das Ergebnis } x\text{“}) \cdot P(\text{„Abel hat das Ergebnis } y\text{“}).$$