

Ü b u n g s b l a t t 1

Mit * und ** gekennzeichnete Aufgaben können zum Sammeln von Bonuspunkten verwendet werden. Lösungen von *-Aufgaben sind schriftlich abzugeben zu Beginn der Übungen am Dienstag, den 17.4.07. Lösungen von **-Aufgaben sind per Web-Formular unter <http://www.math.upb.de/~walter> (→ Lehre SS 07 → Übungen) abzuliefern bis spätestens Dienstag, 17.4.07, 23⁵⁹ Uhr.

Aufgabe 1: (Kombinatorik)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem fairen Würfel

- a) eine gerade Zahl oder mindestens 5 Augen zu würfeln,
- b) bei 5 Würfeln 5 verschiedene Ergebnisse zu erhalten,
- c) bei 3 Würfeln nicht die Gesamtaugenanzahl 16 zu haben,
- d) bei 3 Würfeln die Augenzahl 12 zu haben, wenn man beim 1-ten Wurf bereits eine 6 gewürfelt hat?

Musterlösung:

a) Die Modellierung ist offensichtlich:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, E = \{2, 4, 5, 6\} \Rightarrow P(E) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

b)

$$\Omega = \{(a_1, \dots, a_5) ; a_i \in \{1, \dots, 6\}\}, \\ E = \{(a_1, \dots, a_5) ; a_i \in \{1, \dots, 6\} ; a_i \neq a_j \forall i \neq j\}.$$

Offensichtlich gilt $|\Omega| = 6^5$. Es verbleibt, $|E|$ zu bestimmen:

Es gibt 6 Möglichkeiten, a_1 zu würfeln.

Es verbleiben 5 Möglichkeiten, a_2 so zu würfeln, dass $a_2 \neq a_1$.

Es verbleiben 4 Möglichkeiten, a_3 so zu würfeln, dass $a_3 \neq a_2 \neq a_1$.

Es verbleiben 3 Möglichkeiten, a_4 so zu würfeln, dass $a_4 \neq a_3 \neq a_2 \neq a_1$.

Es verbleiben 2 Möglichkeiten, a_5 so zu würfeln, dass $a_5 \neq a_4 \neq a_3 \neq a_2 \neq a_1$.

(mit $a_3 \neq a_2 \neq a_1$ etc. ist gemeint, dass alle a_i paarweise verschieden sind).

$$\Rightarrow |E| = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \Rightarrow P(E) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{10}{108}.$$

c)

$$\Omega = \{(a_1, a_2, a_3) ; a_1, a_2, a_3 \in \{1, \dots, 6\}\}, |\Omega| = 6^3. \\ \Omega \setminus E = \{(a_1, a_2, a_3) ; a_1, a_2, a_3 \in \{1, \dots, 6\} ; a_1 + a_2 + a_3 = 16\}$$

$$= \{(6, 6, 4), (6, 4, 6), (4, 6, 6), (6, 5, 5), (5, 6, 5), (5, 5, 6)\}$$

$$\Rightarrow P(E) = 1 - P(\Omega \setminus E) = 1 - \frac{6}{6^3} = \frac{35}{36} .$$

d)

$$\Omega = \{(6, a_2, a_3) ; a_2, a_3 \in \{1, \dots, 6\}\} , |\Omega| = 6^2 ,$$

$$E = \{(6, a_2, a_3) ; a_2, a_3 \in \{1, \dots, 6\} ; 6 + a_2 + a_3 = 12\}$$

$$= \{(6, 1, 5), (6, 2, 4), (6, 3, 3), (6, 4, 2), (6, 5, 1)\} , |E| = 5$$

$$\Rightarrow P(E) = \frac{5}{36} .$$

Aufgabe 2: (Kombinatorik)

Wieviele Ausgangssituationen gibt es beim Skat? Es sind $32=10+10+10+2$ Karten auf die 3 Spieler und den Skat zu verteilen, hierbei sind die 3 Spieler zu unterscheiden.

Musterlösung:

Laut Vorlesung gibt es $\frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_m!}$ Möglichkeiten, eine Menge mit $n = n_1 + \dots + n_m$ Elementen in m nummerierte Teilmengen der Mächtigkeiten n_1, \dots, n_m zu zerlegen. Damit gibt es

$$\frac{32!}{10! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 2!} \approx 2.753 \cdot 10^{15}$$

Ausgangssituationen beim Skat.

Aufgabe 3*: (Kombinatorik, 10 + 10 + 10 Punkte)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Skat (10 Karten aus 32)

a) kein As, b) genau 2 Buben und genau 2 Asse, c) genau 3 Buben, aber kein As
zu bekommen?

Musterlösung:

Der Stichprobenraum für mein Blatt ist:

$$\Omega = \{\{a_1, \dots, a_{10}\} ; a_1, \dots, a_{10} \in \{\text{Karo-Sieben}, \dots, \text{Kreuz-As}\}\} .$$

Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, eine k -elementige Teilmenge einer Menge mit k Elementen zu wählen, also

$$|\Omega| = \binom{32}{10} .$$

a) Alle 10 Karten sollen aus 32 Karten minus 4 Asse = 28 Karten stammen, dafür gibt es $\binom{28}{10}$ Möglichkeiten, also

$$P(\text{„kein As“}) = \binom{28}{10} / \binom{32}{10} \approx 0.203 .$$

b) Es sollen 2 Karten aus der Menge aller Buben stammen. Es gibt $\binom{4}{2}$ Möglichkeiten, 2 Buben aus 4 Buben zu wählen. Es sollen 2 Karten aus der Menge aller Asse stammen, dafür gibt es ebenfalls $\binom{4}{2}$ Möglichkeiten. Die restlichen 6 Karten sollen aus der Restmenge von 32 Karten minus 4 Buben minus 4 Asse = 24 Karten stammen. Dafür gibt es $\binom{24}{6}$ Möglichkeiten. Als gibt es $\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{24}{6}$ Möglichkeiten für genau 2 Buben und genau 2 Asse:

$$P(\text{„genau 2 Buben und genau 2 Asse“}) = \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{24}{6}}{\binom{32}{10}} \approx 0.0751 .$$

c) Es sollen 3 Karten aus der Menge aller Buben stammen: $\binom{4}{3}$ Möglichkeiten. Die restlichen 7 Karten sollen aus der Menge von 32 Karten minus 4 Buben minus 4 Asse = 24 Karten stammen: $\binom{24}{7}$ Möglichkeiten.

$$P(\text{„genau 3 Buben, kein As“}) = \frac{\binom{4}{3}\binom{24}{7}}{\binom{32}{10}} \approx 0.0215 .$$

Nun aus dem täglichen Leben an der Uni:

Aufgabe 4: (Kombinatorik)

- Ein milder Dozent macht seine Noten, indem er 3 mal würfelt und die kleinste Augenzahl nimmt. Bestimme den wahrscheinlichen Notenspiegel der Klausur!
- Ein anderer Dozent geht ähnlich vor, nimmt aber das Maximum der Augenzahlen. Welchen Notenspiegel ergibt dies?

Musterlösung:

Der Anteil der „Einsen“:

$$\begin{aligned} P(\text{„Minimum bei 3 Würfeln} = 1\text{“}) &= 1 - P(\text{„keine 1 in 3 Würfeln“}) \\ &= 1 - \frac{5^3}{6^3} = \frac{91}{216} = 0.421\dots \equiv 42.1\%. \end{aligned}$$

Der Anteil der „Zweien“:

$$\begin{aligned} P(\text{„Minimum} = 2\text{“}) &= P(\text{„Minimum} \leq 2\text{“}) - P(\text{„Minimum} = 1\text{“}) \\ &= 1 - P(\text{„Minimum} > 2\text{“}) - P(\text{„Minimum} = 1\text{“}) \\ &= 1 - P(\text{„nur } 3, \dots, 6 \text{ in 3 Würfeln“}) - P(\text{„Minimum} = 1\text{“}) \\ &= 1 - \frac{4^3}{6^3} - \frac{91}{216} = \frac{61}{216} = 0.282\dots \equiv 28.2\%. \end{aligned}$$

Man sieht nun das allgemeine Bildungsgesetz:

$$p_k := \text{Anteil der Note „}k\text{“} = P(\text{„Minimum} = k\text{“})$$

$$\begin{aligned}
&= P(\text{„Minimum} \leq k\text{“}) - P(\text{„Minimum} = k - 1\text{“}) - P(\text{„Minimum} = k - 2\text{“}) - \dots \\
&= 1 - P(\text{„nur } k + 1, \dots, 6 \text{ in 3 Würfeln“}) - p_{k-1} - p_{k-2} - \dots - p_1 \\
&= 1 - \frac{(6 - k)^3}{6^3} - p_{k-1} - p_{k-2} - \dots - p_1.
\end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich sofort rekursiv folgende Werte:

Note	1	2	3	4	5	6
Häufigkeit	$\frac{91}{216}$	$\frac{61}{216}$	$\frac{37}{216}$	$\frac{19}{216}$	$\frac{7}{216}$	$\frac{1}{216}$
\approx	42.1%	28.2%	17.1%	8.8%	3.2%	0.46%

b) Das Ergebnis ist natürlich „spiegelsymmetrisch“:

Note	6	5	4	3	2	1
Häufigkeit	$\frac{91}{216}$	$\frac{61}{216}$	$\frac{37}{216}$	$\frac{19}{216}$	$\frac{7}{216}$	$\frac{1}{216}$
\approx	42.1%	28.2%	17.1%	8.8%	3.2%	0.46%

Aufgabe 5*: (Kombinatorik, 10 + 10 + 20 Punkte)

In einem Hörsaal gibt es n Lampen, die unabhängig voneinander ein- und ausgeschaltet werden können. Wieviele Beleuchtungsarten gibt es, wenn

- keine Einschränkung besteht,
- genau k Lampen brennen sollen,
- mindestens 3 Lampen brennen sollen?

Musterlösung:

a) Die Lampen seien durchnummeriert, jede Lampe hat zwei Zustände. Für die erste Lampe gibt es 2 Möglichkeiten, für die zweite Lampe 2 Möglichkeiten usw. Macht zusammen $2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^n$ Möglichkeiten.

b) Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, aus den n Lampen diejenigen k zu wählen, die brennen sollen.

c) Bei genau k brennenden Lampen gibt es nach b) $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, macht zusammen

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} + \dots + \binom{n}{n}$$

Möglichkeiten, dass mindestens k Lampen brennen. Offensichtlich muss mit a) für $k = 0$ gelten:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

(denn a) entspricht der Situation „mindestens 0 Lampen brennen“). In der Tat gilt (binomischer Lehrsatz):

$$2^n = (1 + 1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 1^i \cdot 1^{n-i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}.$$

Damit folgt

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n - \binom{n}{0} - \binom{n}{1} - \dots - \binom{n}{k-1}.$$

Für $k = 3$ folgt, dass es

$$\binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \binom{n}{5} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n - \binom{n}{0} - \binom{n}{1} - \binom{n}{2} = 2^n - 1 - n - \frac{n(n-1)}{2}$$

Möglichkeiten gibt, wenn von n Lampen mindestens 3 brennen.

Aufgabe 6: (Kombinatorik)

- a) Prof. A hält eine Vorlesung mit 70 Hörern. Er bietet Student B eine Wette darüber an, dass mindestens 2 seiner Hörer am gleichen Tag Geburtstag haben. Student B geht spontan auf diese Wette ein und findet anschließend sogar heraus, ob dies klug war. Prof. C, der eine Vorlesung mit 15 Hörern hält, hört von dieser Angelegenheit und beschließt, ähnlich didaktisch wertvoll vorzugehen. Er bietet seinen Studenten dieselbe Wette an. Was wird B seinen Kommilitonen raten?
- b) Student D hört ebenfalls von dieser Angelegenheit. Als er am nächsten Tag in der Vorlesung mit 70 Hörern sitzt, bietet er seinem Nachbarn eine Wette darüber an, dass mindestens einer der Hörer am selben Tag Geburtstag hat wie der Vortragende. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird D den Übungsschein für die Vorlesung „Wahrscheinlichkeitstheorie“ erhalten?

zu a): Fakultäten großer Zahlen berechne man entweder symbolisch auf dem Rechner (z.B., mit MuPAD) oder näherungsweise mittels der Stirling-Formel: $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Musterlösung:

Der Stichprobenraum für die Geburtstage von h Hörern ist

$$\Omega = \{(a_1, \dots, a_h) ; a_1, \dots, a_h \in \{1, \dots, 365\}\}, \quad |\Omega| = 365^h.$$

a) Gegeben seien h Hörer. Betrachte das Komplementärereignis $\Omega \setminus E =$ „alle Hörer haben an unterschiedlichen Tagen Geburtstag“:

Es gibt 365 Möglichkeiten für den Geburtstag des 1-ten Hörers,
dann 364 verbleibende Möglichkeiten für den Geburtstag des 2-ten Hörers,
dann 363 verbleibende Möglichkeiten für den Geburtstag des 3-ten Hörers,
...

dann $366 - h$ verbleibende Möglichkeiten für den Geburtstag des h -ten Hörers.

Mit $|\Omega| = 365^h$ folgt

$$P(\Omega \setminus E) = \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - h)}{365^h} = \frac{365!}{(365 - h)!} \frac{1}{365^h}$$

$$\Rightarrow P(E) = 1 - P(\Omega \setminus E) = 1 - \frac{365!}{(365 - h)!} \frac{1}{365^h}.$$

Dies liefert folgende Wertetabelle:

h	10	15	20	30	40	50	60	70	100
$P(E)$	0.117	0.253	0.411	0.706	0.891	0.970	0.994	0.9991	0.9999

Also gewinnt Prof. A die Wette bei 70 Hörern mit 99.9%-iger Wahrscheinlichkeit, während die Chancen für Prof. C bei 15 Hörern nur bei 25.3% liegen.

b) Das Komplementärereignis ist „alle Studenten haben an einem anderen Tag Geburtstag als der Dozent“; alle diese Geburtstage sind aus der Menge von 365 minus Dozentengeburtstag = 364 Tagen. Es gibt hierfür bei h Hörern 364^h Möglichkeiten:

$$P(E) = 1 - P(\Omega \setminus E) = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^h.$$

Dies liefert folgende Wertetabelle:

h	10	30	50	70	90	110	130	200	300	500	1000
$P(E)$	0.027	0.079	0.128	0.175	0.218	0.261	0.299	0.422	0.561	0.746	0.935

Student D gewinnt seine Wette mit 70 Hörern mit einer Wahrscheinlichkeit von nur 17.5%. Die Tatsache, dass er den Unterschied zwischen den Wetten in a) und b) nicht durchschaut hat, spricht nicht für einen großen Erfolg der Vorlesung (natürlich lag's am Dozenten).

Aufgabe 7:** (Kombinatorik, 10 Punkte)

Dies ist eine Online-Aufgabe, die bis zum 17.4.07, 23⁵⁹ Uhr, abzuliefern ist.

Sei n eine natürliche Zahl (die vom Aufgabenserver zufällig gewählt wird). Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben in einer Gruppe von n Personen mindestens 2 Personen am selben Tag Geburtstag? (Ignoriere Geburtstage am 29. Februar.)

Anleitung: Löse Aufgabe 6.

Musterlösung:

Siehe die Musterlösung zu Aufgabe 6.

Aufgabe 8: (Kombinatorik)

Auf wieviele verschiedene Arten können die Buchstaben in MISSISSIPPI angeordnet werden?

Musterlösung:

MISSISSIPPI besteht aus 11 Buchstaben: 1 M + 2 P + 4 I + 4 S.

Betrachte die Menge $\{1, \dots, 11\}$ der Positionen der Buchstaben in dem zu legenden Wort. Teile diese Menge in 4 nummerierte Teilmengen der Mächtigkeiten 1, 2, 4 und 4 auf, wobei

- die erste Teilmenge (der Mächtigkeit 1) die Position des Buchstabens M angibt,
- die zweite Teilmenge (der Mächtigkeit 2) die Positionen der beiden P angibt,
- die dritte Teilmenge (der Mächtigkeit 4) die Positionen der vier I angibt,
- die vierte Teilmenge (der Mächtigkeit 4) die Positionen der vier S angibt.

Laut Vorlesung gibt es hierfür $\frac{11!}{1! \cdot 2! \cdot 4! \cdot 4!} = 34\,650$ Möglichkeiten.

Alternative Abzählung:

- Es gibt $\binom{11}{1}$ Möglichkeiten, die Position des Buchstabens M zu wählen,
- es gibt $\binom{10}{2}$ Möglichkeiten, aus den verbleibenden 10 Positionen 2 Positionen für die 2 P zu wählen,
- es gibt $\binom{8}{4}$ Möglichkeiten, aus den verbleibenden 8 Positionen 4 Positionen für die 4 I zu wählen,
- es gibt $\binom{4}{4} = 1$ Möglichkeit, aus den verbleibenden 4 Positionen die 4 Positionen für die 4 S zu wählen.

Macht zusammen

$$\binom{11}{1} \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{4} \cdot \underbrace{\binom{4}{4}}_1 = \frac{11!}{1! \cdot 10!} \cdot \frac{10!}{2! \cdot 8!} \cdot \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{11!}{1! \cdot 2! \cdot 4! \cdot 4!} = 34\,650$$

Möglichkeiten.

Aufgabe 9:** (Kombinatorik, 10 Punkte)

Dies ist eine Online-Aufgabe, die bis zum 17.4.07, 23⁵⁹ Uhr, abzuliefern ist.

Gegeben seien natürliche Zahlen n_0, n_1, n_2, n_3 (die vom Aufgabenserver zufällig gewählt werden). Wieviele unterschiedliche $(n_0 + n_1 + n_2 + n_3)$ -ziffrige ganze Zahlen lassen sich aus n_0 Kopien der Ziffer 0, n_1 Kopien der Ziffer 1, n_2 Kopien der Ziffer 2 und n_3 Kopien der Ziffer 3 bilden? (0 darf dabei natürlich nicht die erste Ziffer sein.)

Anleitung: Siehe auch Aufgabe 8.

Musterlösung:

Betrachte die Positionen $1, 2, \dots, n_0 + n_1 + n_2 + n_3$ der Ziffern $0, \dots, 3$ in der zu bildenden Zahl.

- Es gibt $\binom{n_0 + n_1 + n_2 + n_3 - 1}{n_0}$ Möglichkeiten, die Positionen der n_0 Kopien der Ziffer 0 zu wählen (diese Ziffer kann nicht an erster Stelle stehen, daher sind n_0 Positionen aus nur $n_0 + n_1 + n_2 + n_3 - 1$ möglichen Positionen zu wählen),

- es gibt $\binom{n_1+n_2+n_3}{n_1}$ Möglichkeiten, nach Wahl der Positionen der Ziffer 0 aus den verbleibenden $n_1 + n_2 + n_3$ Positionen die n_1 Positionen für die Ziffern 1 zu wählen,
- es gibt $\binom{n_2+n_3}{n_2}$ Möglichkeiten, nach Wahl der Positionen von 0 und 1 aus den verbleibenden $n_2 + n_3$ Positionen die n_2 Positionen für die Ziffern 2 zu wählen,
- es gibt $\binom{n_3}{n_3} = 1$ Möglichkeit, nach Wahl der Positionen von 0, 1 und 2 aus den verbleibenden n_3 Positionen die n_3 Positionen für die Ziffern 3 zu wählen.

Macht zusammen

$$\begin{aligned}
 & \binom{n_0 + n_1 + n_2 + n_3 - 1}{n_0} \cdot \binom{n_1 + n_2 + n_3}{n_1} \cdot \binom{n_2 + n_3}{n_2} \cdot \overbrace{\binom{n_3}{n_3}}^1 \\
 &= \frac{(n_0 + n_1 + n_2 + n_3 - 1)!}{n_0! \cdot (n_1 + n_2 + n_3 - 1)!} \cdot \frac{(n_1 + n_2 + n_3)!}{n_1! \cdot (n_2 + n_3)!} \cdot \frac{(n_2 + n_3)!}{n_2! \cdot n_3!} \cdot 1 \\
 &= \frac{(n_0 + n_1 + n_2 + n_3 - 1)! \cdot (n_1 + n_2 + n_3)}{n_0! \cdot n_1! \cdot n_2! \cdot n_3!}.
 \end{aligned}$$

Möglichkeiten.
