Einführung in die Stochastik | Sommersemester 07
Dr. Walter Oevel | 2. 7. 2007

Übungsblatt 15

Hier ist zusätzliches Übungsmaterial zur Klausurvorbereitung quer durch die Inhalte der Vorlesung. Eine Korrektur ist nicht vorgesehen. Es handelt sich nicht um eine Probeklausur in dem Sinne, dass der Schwierigkeitsgrad/Bearbeitungsaufwand aller Aufgaben „typisch" für Klausuraufgaben sind.

Aufgabe 80: (Kombinatorik)
Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man beim Skat (10 aus 32 Karten) genau 3 Asse und genau einen Buben?

Aufgabe 81: (Wahrscheinlichkeit von Ereignissen)
Die Koeffizienten $a, b \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ der quadratischen Gleichung $x^2 + a\,x + b = 0$ werden (fair) gewürfelt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind die Lösungen i) reell, ii) reell und rational?

Aufgabe 82: (Unabhängigkeit von Ereignissen)
Es werden 2 faire Würfel geworfen. Sind die Ereignisse „die Augensumme ist durch 4 teilbar" und „die Differenz der Augen ist gerade" unabhängig?

Aufgabe 83: (Rechenregeln für Erwartungswerte/Streuungen)
Es wird 2 Mal fair gewürfelt. Sie X die Differenz zwischen dem ersten und dem zweiten Wurf. Bestimme (auf möglichst einfache Weise) Erwartungswert und Streuung von X!

Aufgabe 84: (Linearität von Erwartungswerten)
Gegeben ist eine willkürlich ausgewählte Gruppe von 500 Personen. Sei

a) X die Anzahl aller Tage des Jahres, an denen mindestens eine dieser Personen Geburtstag hat,

b) Y die Anzahl aller Tage des Jahres, an denen mindestens zwei dieser Personen Geburtstag haben.

Bestimme den Erwartungswert von X und Y!

Aufgabe 85: (Bedingte Erwartungswerte)
Sei X eine Zufallsvariable über einem diskreten Stichprobenraum Ω, sei $A \subset \Omega$ ein beliebiges Ereignis. Zeige formal mit der Definition 2.58 der Vorlesung:

$$\mathrm{E}(f(X) \,|\, A) = \frac{1}{P(A)} \sum_{\omega \in A} f(X(\omega))\; P(\omega)\ .$$

Aufgabe 86: (Moivre–Laplace)

Es ist bekannt, dass Knabengeburten häufiger sind als Mädchengeburten. In der Tat hat man durch langjährige statistische Untersuchungen festgestellt, dass durchschnittlich bei 1 000 Geburten 514 Jungen geboren werden (also etwa 5.76% mehr Knaben als Mädchen). Mit welcher Sicherheit ist die Aussage „es werden mindestens 5% mehr Knaben als Mädchen geboren" richtig, wenn beim Erstellen dieser Statistik 1 000 000 Geburten betrachtet wurden?

Aufgabe 87: (Moivre–Laplace)

In einer Fabrik will man den Ausschussanteil der Produktion statistisch mit der Genauigkeit von $\pm 1\%$ und der Sicherheit von 95.4% schätzen. Wieviele Stichproben müssen dafür vorgenommen werden?

Aufgabe 88: (Moivre–Laplace, zentraler Grenzwertsatz)

In Aufgabe 43.c) war graphisch beobachtet worden, dass die Poisson–Verteilung Pois(λ) einer Variable X wie eine Normalverteilung aussieht, wenn λ sehr gross ist. Begründe dieses Phänomen über Moivre–Laplace bzw. den zentralen Grenzwertsatz! Genauer: zeige, dass für beliebiges α, β gilt:

$$P\Big(\lambda + \alpha \cdot \sqrt{\lambda} \leq X \leq \lambda + \beta \cdot \sqrt{\lambda}\,\Big) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-x^2/2}\, dx + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Big).$$