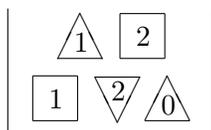


Ü b u n g s b l a t t 13

Mit \* und \*\* gekennzeichnete Aufgaben können zum Sammeln von Bonuspunkten verwendet werden. Lösungen von \*-Aufgaben sind schriftlich abzugeben im Zettelkasten Nr. 5 auf dem D1 bis Mittwoch, 4.7.07, 11:00 Uhr. Lösungen von \*\*-Aufgaben sind per Web-Formular unter <http://www.math.upb.de/~walter> (→ Lehre SS 07 → Übungen) abzuliefern bis spätestens Mittwoch, 4.7.07, 23<sup>59</sup> Uhr.

**Aufgabe 70:** (Unabhängigkeit von Zufallsvariablen)

Aus der untenstehenden Urne wird ein Objekt gezogen. Sei  $X$  die Zahl auf dem Objekt, sei  $Y$  die Anzahl der Ecken. Bestimme  $E(X)$ ,  $\sigma(Y)$  und  $E(XY)$ . Sind  $X$  und  $Y$  unabhängig?



**Aufgabe 71:** (Erwartungswerte, Unabhängigkeit)

Es seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige Zufallsvariable mit dem gemeinsamen Erwartungswert  $\mu = E(X_i)$  und der gemeinsamen Streuung  $\sigma = \sigma(X_i)$ . Setze  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  und  $V = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ . Zeige:  $E(\bar{X}) = \mu$ ,  $E(V) = \sigma^2$ .

**Aufgabe 72:** (Unabhängige Poisson-Variablen)

Zeige, dass die Summe von zwei unabhängigen Poisson-verteilten Zufallsvariablen wieder Poisson-verteilt ist.

**Aufgabe 73:** (Faltung, Normalverteilung)

Es seien  $X$  und  $Y$  unabhängige kontinuierliche Zufallsvariablen mit den Dichten  $\rho_X$  und  $\rho_Y$ .

- a) Zeige, dass die Dichtefunktion  $\rho_{X_1+X_2}$  der Variablen  $X_1 + X_2$  durch die „Faltung“

$$\rho_{X_1+X_2}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{X_1}(x) \cdot \rho_{X_2}(x - y) dx$$

gegeben ist. Verwende hierzu (ohne Beweis):

$$P(X_1 + X_2 \leq r) = \int \int_{x_1+x_2 \leq r} \rho_{X_1}(x_1) \cdot \rho_{X_2}(x_2) dx_1 dx_2.$$

- b) Zeige, dass die Summe zweier unabhängiger normalverteilter Zufallsvariablen wieder normalverteilt ist. (Vorsicht: Rechnerei!)

**Aufgabe 74\*\*:** (Normalverteilung. 20 Punkte)

Dies ist eine Online-Aufgabe, die bis zum 4.7.06, 23<sup>59</sup> Uhr, abzuliefern ist.

In einer Anlage wird Milch in 1-Liter Flaschen abgefüllt. Die Abfüllmenge  $X$  variiert dabei etwas: Sie sei normalverteilt mit dem Erwartungswert 1.01 (Liter) und der Standardabweichung 0.01. Die FlaschengöÙe variiert unabhängig davon ebenfalls gemäß einer Normalverteilung: Der Erwartungswert ist 1.06 (Liter), die Standardabweichung ist 0.02. (Erwartungswerte und Standardabweichungen werden vom Aufgabenserver zufällig variiert.)

Mit welcher Wahrscheinlichkeit läuft eine Flasche beim Befüllen über?

Anleitung: Betrachte die Variable „FlaschengöÙe minus Einfüllmenge“. Diese ist nach Aufgabe 73.b) normalverteilt.

**Aufgabe 75:** (Bedingte Erwartungswerte)

Mein Lotto„system“ besteht darin, dass ich mir ein zufälliges  $k \in \{1, \dots, 49\}$  vorgebe und dann in Zukunft jede Woche  $k$  (unabhängige) Lottotips abgebe. Nach wievielen Wochen darf ich das erste Mal mit „6 Richtigen“ rechnen? (Vergleiche das Ergebnis mit dem Ergebnis von Aufgabe 51 auf Blatt 9.)

**Aufgabe 76:** (Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte, der Satz von Bayes, Chebyshev, Normalverteilung und all das ...)

Bei einem neuen Automodell stellt der Hersteller fest, dass 10% aller bis jetzt eingebauten Kurbelwellen mit Materialfehlern behaftet sind. Die Konstruktion der Kurbelwellen ist auf eine mittlere Laufleistung von 150 000 km ausgelegt mit einer Streuung von 50 000 km, die fehlerhaften Wellen halten in der Regel nur 20 000 km mit einer Streuung von 10 000 km.

- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein von mir gekauftes Auto dieses Modells die ersten 50 000 km überstehen?
- b) Nach etwa 50 000 km bleibt mein Wagen mit defekter Kurbelwelle liegen. Sollte ich gerechterweise erwarten, dass der Schaden auf Kulanz behoben wird?

Anmerkungen: a) kann ohne Zusatzannahmen per Formel der totalen W'keit und Chebyshev abgeschätzt werden. Für b) braucht man Zusatzannahmen, z.B., die Verteilung für die Lebensdauer der Kurbelwellen: wähle eine Normalverteilung. Schätze das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten für eine gute/schlechte Kurbelwelle bei dem vorgegebenen Ereignis, dass die Kurbelwelle in einem kleinen Intervall um die Laufleistung 50 000 km ihren Dienst einstellt.