Einführung in die Stochastik — Sommersemester 07
Dr. Walter Oevel — 25. 6. 2007

Übungsblatt 12

Mit $*$ und $**$ gekennzeichnete Aufgaben können zum Sammeln von Bonuspunkten verwendet werden. Lösungen von $*$-Aufgaben sind schriftlich abzugeben im Zettelkasten Nr. 5 auf dem D1 bis Mittwoch, 4.7.07, 11:00 Uhr. Lösungen von $**$-Aufgaben sind per Web-Formular unter `http://www.math.upb.de/~walter` ($\longrightarrow$ Lehre SS 07 $\longrightarrow$ Übungen) abzuliefern bis spätestens Mittwoch, 4.7.07, $23^{\underline{59}}$ Uhr.

Aufgabe 65*: (Spezielle Verteilungen: die Binomial-Verteilung. 10 + 5 + 15 Punkte)
Man setzt beim Roulette immer nur auf Schwarz (mit einer Gewinnchance $p = 18/37$). Man startet mit einem Einsatz von 1 Euro und verdoppelt jeweils, wenn man verliert. Sobald man gewonnen hat, setzt man wieder 1 Euro und beginnt einen neuen Spielzyklus. Das Startkapital beträgt 1023 Euro (d.h., nach einem Spielzyklus aus 10 nacheinander verlorenen Spielen ist man bankrott).

a) Man spielt solange, bis man entweder einen angestrebten Gewinn erreicht hat oder bankrott ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man mit diesem „System" einen Gewinn von 1 bzw. 10 bzw. 100 bzw. 1023 Euro (Kapitalverdopplung) erzielen?

b) Wieviele Zyklen kann man in der Regel bis zum Bankrott durchstehen? (Ignoriere hierbei zur Vereinfachung, dass nach vielen Gewinnen das Kapital soweit angestiegen ist, dass die Erfolgschancen für einen Zyklus ohne Bankrott sich verbessern: arbeite mit dem konstanten Startkapital von 1023 Euro für jeden Zyklus).

c) Man spielt maximal n Zyklen ($n \leq 1023$). Was ist der Erwartungswert des Gewinns? (Etwas anspruchsvoller)

Anleitung: betrachte einen Spielzyklus als Bernoulli-Experiment.

Musterlösung:
Das Startkapital sei von der Form $K_0 = 2^N - 1 = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{N-1}$, so dass man in einem Spielzyklus maximal N mal setzen kann, bevor man bankrott ist. Für $K_0 = 1023 = 2^{10} - 1$ haben die hier betrachteten Spielzyklen also die maximale Länge $N = 10$.
Seien $p_0 = 18/37$, $q_0 = 19/37$ die Gewinn/Verlustchancen eines Einzelspiels. Die W'keit, einen Spielzyklus der maximalen Länge N ohne Bankrott durchzustehen ist offensichtlich $p = 1 - q_0^N$. Interpretiere bei gegebenem Startkapital K_0, d.h., bei gegebener maximaler Zykluslänge N, einen Spielzyklus als Bernoulli-Experiment mit

$$p = P(\text{„Gewinn"}) = 1 - q_0^N \ , \ q = P(\text{„Bankrott"}) = q_0^N \ .$$

a) Betrachte einen Spielzyklus, in dem man im n-ten Einzelspiel gewinnt. Man hat in den ersten $n-1$ Spielen $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-2} = 2^{n-1} - 1$ Euro eingesetzt und verloren, im n-ten Spiel setzt man 2^{n-1} Euro und erhält diesen Einsatz als Gewinn. Unabhängig von der Länge n des Zyklus ist damit der Gesamtgewinn eines Zyklus $2^{n-1} - (2^{n-1} - 1) = 1$ Euro, falls man nicht bankrott geht. Die

W'keit, einen Gesamtgewinn von k Euro zu erzielen, ist damit die W'keit, k Zyklen ohne Bankrott zu überstehen, also

$$P(\text{Gewinn} = k) = p^k = (1 - q_0^N)^k \ .$$

Mit $N = 10$ ergibt sich speziell

	$k=1$	$k=10$	$k=100$	$k=1023$
$P(\text{Gewinn} = k)$	≈ 0.9987	≈ 0.987	≈ 0.880	≈ 0.271

Anmerkung: Nach 2^N Gewinnzyklen ist das Startkapital $K_0 = 2^N - 1$ auf $K_0 + 2^N = 2 \cdot 2^N - 1 = 2^{N+1} - 1$ angestiegen, so dass man damit Spielzyklen der maximalen Länge $N+1$ überstehen kann, ohne Bankrott zu gehen. Die ersten $2^N - 1$ Spielzyklen (bis zur Verdopplung des Startkapitals) sind unabhängig: es sind Wiederholungen desselben Bernoulli-Experiments. Nach 2^N Gewinnen ändert sich das Bernoulli-Experiment geringfügig, da man nun Zyklen der Maximallänge $N+1$ betrachten kann.

b) Bei Wiederholungen eines Bernoulli-Experiment gilt allgemein, dass die mittlere Anzahl der Versuche bis zum ersten Erfolg/Mißerfolg gegeben ist durch $1/p$ bzw. $1/q$, wo $p = P(\text{„Erfolg“})$, $q = P(\text{„Mißerfolg“})$. Für X = Anzahl der Spielzyklen bis zum Bankrott gilt damit

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{P(\text{„Bankrott“})} = \frac{1}{q} = \frac{1}{q_0^N} = \frac{1}{(19/37)^{10}} \approx 784.3 \ .$$

Hierbei ist die Abhängigkeit der Spielzyklen durch die Kapitalvermehrung bei Gewinn ignoriert worden, d.h., es wird immer wieder dasselbe Bernoulli-Experiment (Zyklus der maximalen Länge $N = 10$) durchgeführt.

c) Spielt man maximal n Zyklen, so sind die möglichen Spielverläufe

$$\Omega = \{-, +-, ++-, \dots, \underbrace{+\cdots+}_{n-1}-, \underbrace{+\cdots+}_{n}\} \ ,$$

wobei $+$ einen Gewinnzyklus und $-$ einen Bankrottzyklus darstellt. Mit

$$\text{Gewinn}(\{\underbrace{+\cdots+}_{n}\}) = n$$

und

$$\text{Gewinn}(\{\underbrace{+\cdots+}_{k}-\}) = k - K_0$$

(dies sind k Euro Gewinn minus Verlust des Startkapitals durch den abschließenden Bankrottzyklus, insgesamt ein negativer „Gewinn“) folgt

$$\mathrm{E}(\text{Gewinn}) = n\,p^n + \sum_{k=0}^{n-1}(k - K_0)\,p^k\,q = n\,p^n + p\,q \sum_{k=0}^{n-1} k\,p^{k-1} - q\,K_0 \sum_{k=0}^{n-1} p^k$$

$$= n\,p^n + p\,q\frac{d}{dp}\sum_{k=0}^{n-1} p^k - q\,K_0 \sum_{k=0}^{n-1} p^k = n\,p^n + p\,q\frac{d}{dp}\frac{1-p^n}{1-p} - q\,K_0\,\frac{1-p^n}{1-p}$$

$$= n\,p^n - p\,q\frac{n\,p^{n-1}}{1-p} + p\,q\frac{1-p^n}{(1-p)^2} - q\,K_0\,\frac{1-p^n}{1-p}$$

$$\overset{(q=1-p)}{=} n\,p^n - n\,p^n + p\,\frac{1-p^n}{1-p} - K_0\,(1-p^n)$$

$$= \Big(\frac{p}{1-p} - K_0\Big)\,(1-p^n) = -\Big(K_0 - \frac{p}{1-p}\Big)\,(1-p^n)\ .$$

Mit $p = 1 - q_0^N = 1 - (19/37)^{10} \approx 0.9987$ hat man mit den folgenden Verlusten zu rechnen:

n	1	10	100	1023
E(Gewinn)	-0.3056	-3.04	-28.71	-174.71

Lege ich es also darauf an, mein Startkapital zu verdoppeln, so werde ich zwar oft gewinnen, letztlich aber bankrott gehen, wobei die Gewinne minus mein verlorenes Startkapital einen Gesamtverlust von etwa 175 Euro ergeben.

> **Interpretation und Moral:** Ich kann mit diesem System mit großer W'keit *kleine* Gewinne machen (z.B.: mit der sehr großen W'keit von 98.7% kann ich 10 Euro dazugewinnen, wenn ich mit 1023 Euro ins Casino gehe). Aber: ich muss nach den ersten Gewinnen aufhören! Wenn ich versuche, größere Gewinne zu machen, gehe ich dabei fast sicher bankrott.
>
> Viele der Spieler in einem Casino gehen mit kleinen Gewinnen von dannen. Diejenigen, die verlieren, verlieren jedoch so viel, dass das Casino immer noch Gewinn macht.

Aufgabe 66: (Spezielle Verteilungen: die Poisson–Näherung)
An einer einsamen Kreuzung kommen in Mittel täglich 4 Autos vorbei. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tauchen heute höchsten 2 Autos auf?

Musterlösung:
Das Auftauchen eines Autos an dieser Kreuzung ist intuitiv ein "seltenes Ereignis", daher wird zur Modellierung der Variable X = "Anzahl der an einem Tag auftauchenden Autos" die Poisson-Verteilung

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k\,e^{-\lambda}}{k!}\ ,\quad k = 0,1,2,\ldots$$

mit dem Erwartungswert $\lambda = 4$ verwendet. Es folgt

$$P(X \le 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$= \Big(\frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!}\Big)\,e^{-\lambda} = \Big(1 + \frac{4}{1} + \frac{4^2}{2}\Big)\,e^{-4} = 13\,e^{-4} \approx 0.2381\ .$$

Hintergrund der Modellierung: die Poisson-Verteilung wird als Näherung für die Anzahl der Erfolge bei häufiger Betrachtung seltener Bernoulli-Ereignisse angesehen. Man stelle sich dazu vor, dass in der Nähe der Kreuzung viele Autofahrer leben, die sich täglich neu entscheiden, welchen Weg sie nehmen.

Ist es jedoch so, dass es in der Nähe der Kreuzung genau zwei Häuser gibt, deren Bewohner jeweils täglich über die Kreuzung zur Arbeit und zurück fahren, so ist die Poisson-Verteilung sicherlich wenig realistisch.

Aufgabe 67: (Spezielle Verteilungen: die Gleichverteilung)

Gegeben sei eine Prozedur r, die beim Aufruf $r()$ eine gleichmäßig auf dem Interval $[0,1]$ verteilte (Gleitpunkt-) Zufallszahl liefert. Schreibe (in Pseudo-Code) eine Prozedur, die Zufallszahlen liefert, welche gemäß der Dichte

$$\rho(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}\,x^2 & \text{für } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

verteilt sind.

Musterlösung:

Sei X die Zufallsvariable, die der zu implementierenden Prozedur entspricht. Die angestrebte kumulative Verteilungsfunktion ist

$$F_X(r) = \int_{-1}^{r} \rho(x)\,dx = \int_{-1}^{r} \frac{3\,x^2}{2}\,dx = \left[\frac{x^3}{2}\right]_{x=-1}^{x=r} = \frac{r^3+1}{2}$$

für $r \in [-1,1]$. Nach Bemerkung 2.42 der Vorlesung hat die Zufallsvariable $X = F_X^{-1}(Y)$ die gewünschte Verteilung, wo Y gleichmäßig auf $[0,1]$ verteilt ist. Mit

$$Y = F_X(X) = \frac{X^3+1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad X = F_X^{-1}(Y) = (2\,Y-1)^{\frac{1}{3}}$$

liefert der Aufruf $\boxed{(2\,r()-1)^{\frac{1}{3}}}$ die gewünschten Zufallszahlen. Mit $y^{1/3} = \exp(\ln(y)/3)$ könnte eine Implementation in MuPAD etwa folgendermaßen aussehen:

```
r:= random(0..10^DIGITS)/10.0^DIGITS:

X:= proc()
local y;
begin
   y:= r():
   if y > 1/2 then
        return(exp(ln(2*y - 1)/3))
   elif y = 1/2 then
        return(0)
   else return(-exp(ln(1 - 2*y)/3))
   end_if;
end_proc:
```

Aufgabe 68*: (Spezielle Verteilungen: die Normalverteilung. 10 + 10 Punkte)

a) Rechne die Aussagen von Abschnitt 2.4.7 der Vorlesung nach: Für eine $N(\mu,\sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable ist μ der Erwartungswert und σ^2 die Varianz. (Verwende das wohlbekannte Resultat $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.)

b) Drücke die kumulative Verteilungsfunktion (CDF) F_{μ,σ^2} einer $N(\mu,\sigma^2)$-verteilten Zufallsvariable mittels der CDF-Funktion $F_{0,1}$ einer „Standard-Normalverteilung“ mit Erwartungswert 0 und Varianz 1 aus!

Musterlösung:
a) Die Variable X sein $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt. Es gilt:

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}} \, dx$$

$$= \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}} \, dx + \frac{\mu}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}} \, dx.$$

Das erste Integral verschwindet, da der Integrand nach der Substitution $y = x - \mu$ ungerade ist:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}} \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{y \cdot e^{-\frac{y^2}{2 \cdot \sigma^2}}}_{\text{ungerade Funktion}} \, dy = 0.$$

Das verbleibende Integral liefert μ:

$$\frac{\mu}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}} \, dx \overset{y=\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}{=} = \mu \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \, dx.}_{=1} = \mu.$$

Mit der Substitution $y = (x-\mu)/(\sqrt{2} \cdot \sigma)$ gilt:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}((X-\mu)^2) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}} \, dx = \sigma^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot e^{-y^2} \, dx = \sigma^2.$$

Mit partieller Integration zeigt man dabei:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot e^{-y^2} \, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot \underbrace{\left(2 \cdot y \cdot e^{-y^2}\right)}_{-\frac{d}{dy} e^{-y^2}} \, dx = \left[\frac{-y \cdot e^{-y^2}}{\sqrt{\pi}}\right]_{y=-\infty}^{y=\infty} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \, dy = 1.$$

b) Es gilt

$$F_{0,1}(r) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{r} e^{-\frac{y^2}{2}} \, dy, \quad F_{\mu,\sigma^2}(r) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{r} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}} \, dx.$$

Mit der Substitution $y = (x-\mu)/\sigma$, $dx = \sigma \; dy$ ergibt sich $F_{\mu,\sigma^2}(r) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\tilde{r}} e^{-\frac{y^2}{2}} \, dx$ mit $\tilde{r} = \frac{r-\mu}{\sigma}$, also

$$F_{\mu,\sigma^2}(r) = F_{0,1}\Big(\frac{r-\mu}{\sigma}\Big).$$

Aufgabe 69:** (Spezielle Verteilungen: die Normalverteilung. 10 + 10 Punkte)

Dies ist eine Online-Aufgabe, die bis zum 4.7.07, 23^{59} Uhr, abzuliefern ist.

In einer Anlage wird Milch in 1-Liter-Flaschen abgefüllt. Die Abfüllmenge X variiert dabei etwas: Sie sei normalverteilt mit dem Erwartungswert 1.01 (Liter) und der Standardabweichung 0.01. (Erwartungswert und Standardabweichung werden vom Aufgabenserver zufällig variiert.)

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält eine Flasche weniger als einen Liter Milch?

b) Eine Fläsche läuft über, wenn sie mit mehr also 1.05 Litern befüllt wird. Mit welcher Wahrscheinlichkeit passiert dies?

Musterlösung:
a) Sei $\mu = 1.01$ und $\sigma = 0.01$. Mit der Verteilungsfunktion

$$F(r) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \int_{-\infty}^{r} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}} \, dx$$

und $y = (x - \mu)/\sigma$ gilt

$$P(X \le 1) = F(1) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \int_{-\infty}^{1} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \int_{-\infty}^{(1-\mu)/\sigma} e^{-\frac{y^2}{2}} \, dy$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{y^2}{2}} \, dy}_{=1/2} \quad - \quad \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \int_{-(\mu-1)/\sigma}^{(\mu-1)/\sigma} e^{-\frac{y^2}{2}} \, dy}_{\Phi((\mu-1)/\sigma)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \Phi\Big(\frac{\mu - 1}{\sigma}\Big),$$

wobei eine Wertetabelle für

$$\Phi(r) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \int_{-r}^{r} e^{-y^2/2} \, dy$$

auf Seite 81 des Skripts angegeben ist. Mit

$$\frac{\mu - 1}{\sigma} = \frac{1.01 - 1}{0.01} = 1.0$$

findet man aus der Tabelle:

$$P(X \le 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \Phi(1.0) \approx \frac{1 - 0.683}{2} \approx 0.1585.$$

Alternativ (und einfacher) mit MuPAD:

```
>> stats::normalCDF(1.01, 0.01^2)(1.0)

                      0.1586552539
```

b)

$$P(X > 1.05) = 1 - P(X \le 1.05) = 1 - F(1.05)$$

$$= 1 - \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \int_{-\infty}^{1.05} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}} \, dx = 1 - \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \int_{-\infty}^{(1.05-\mu)/\sigma} e^{-\frac{y^2}{2}} \, dy$$

$$= 1 - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{y^2}{2}} \, dy}_{=1/2} \quad - \quad \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \int_{-(1.05-\mu)/\sigma}^{(1.05-\mu)/\sigma} e^{-\frac{y^2}{2}} \, dy}_{\Phi((1.05-\mu)/\sigma)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \Phi\Big(\frac{1.05 - \mu}{\sigma}\Big).$$

Mit

$$\frac{1.05 - \mu}{\sigma} = \frac{1.05 - 1.01}{0.01} = 4.0$$

findet man aus der Wertetabelle für Φ:

$$P(X > 1.05) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \Phi(4.0) \approx \frac{1 - 0.999937}{2} \approx 0.0000315.$$

Alternativ (und einfacher) mit MuPAD:

```
>> 1 - stats::normalCDF(1.01, 0.01^2)(1.05)

                    0.00003167124183
```