Einführung in die Stochastik | Sommersemester 07
Dr. Walter Oevel | 25. 6. 2007

Übungsblatt 12

Mit $*$ und $**$ gekennzeichnete Aufgaben können zum Sammeln von Bonuspunkten verwendet werden. Lösungen von $*$-Aufgaben sind schriftlich abzugeben im Zettelkasten Nr. 5 auf dem D1 bis Mittwoch, 4.7.07, 11:00 Uhr. Lösungen von $**$-Aufgaben sind per Web-Formular unter `http://www.math.upb.de/~walter` ($\longrightarrow$ Lehre SS 07 $\longrightarrow$ Übungen) abzuliefern bis spätestens Mittwoch, 4.7.07, $23^{\underline{59}}$ Uhr.

Aufgabe 65*: (Spezielle Verteilungen: die Binomial-Verteilung. 10 + 5 + 15 Punkte)
Man setzt beim Roulette immer nur auf Schwarz (mit einer Gewinnchance $p = 18/37$). Man startet mit einem Einsatz von 1 Euro und verdoppelt jeweils, wenn man verliert. Sobald man gewonnen hat, setzt man wieder 1 Euro und beginnt einen neuen Spielzyklus. Das Startkapital beträgt 1023 Euro (d.h., nach einem Spielzyklus aus 10 nacheinander verlorenen Spielen ist man bankrott).

a) Man spielt solange, bis man entweder einen angestrebten Gewinn erreicht hat oder bankrott ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man mit diesem „System“ einen Gewinn von 1 bzw. 10 bzw. 100 bzw. 1023 Euro (Kapitalverdopplung) erzielen?

b) Wieviele Zyklen kann man in der Regel bis zum Bankrott durchstehen? (Ignoriere hierbei zur Vereinfachung, dass nach vielen Gewinnen das Kapital soweit angestiegen ist, dass die Erfolgschancen für einen Zyklus ohne Bankrott sich verbessern: arbeite mit dem konstanten Startkapital von 1023 Euro für jeden Zyklus).

c) Man spielt maximal n Zyklen ($n \leq 1023$). Was ist der Erwartungswert des Gewinns? (Etwas anspruchsvoller)

Anleitung: betrachte einen Spielzyklus als Bernoulli-Experiment.

Aufgabe 66: (Spezielle Verteilungen: die Poisson–Näherung)
An einer einsamen Kreuzung kommen in Mittel täglich 4 Autos vorbei. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tauchen heute höchsten 2 Autos auf?

Aufgabe 67: (Spezielle Verteilungen: die Gleichverteilung)
Gegeben sei eine Prozedur r, die beim Aufruf $r()$ eine gleichmäßig auf dem Interval $[0, 1]$ verteilte (Gleitpunkt-) Zufallszahl liefert. Schreibe (in Pseudo-Code) eine Prozedur, die Zufallszahlen liefert, welche gemäß der Dichte

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\, x^2 & \text{für } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

verteilt sind.

Aufgabe 68*: (Spezielle Verteilungen: die Normalverteilung. 10 + 10 Punkte)

a) Rechne die Aussagen von Abschnitt 2.4.7 der Vorlesung nach: Für eine $N(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable ist μ der Erwartungswert und σ^2 die Varianz. (Verwende das wohlbekannte Resultat $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.)

b) Drücke die kumulative Verteilungsfunktion (CDF) F_{μ,σ^2} einer $N(\mu, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariable mittels der CDF-Funktion $F_{0,1}$ einer „Standard-Normalverteilung“ mit Erwartungswert 0 und Varianz 1 aus!

Aufgabe 69:** (Spezielle Verteilungen: die Normalverteilung. 10 + 10 Punkte)

Dies ist eine Online-Aufgabe, die bis zum 4.7.07, 23^{59} Uhr, abzuliefern ist.

In einer Anlage wird Milch in 1-Liter-Flaschen abgefüllt. Die Abfüllmenge X variiert dabei etwas: Sie sei normalverteilt mit dem Erwartungswert 1.01 (Liter) und der Standardabweichung 0.01. (Erwartungswert und Standardabweichung werden vom Aufgabenserver zufällig variiert.)

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält eine Flasche weniger als einen Liter Milch?

b) Eine Fläsche läuft über, wenn sie mit mehr also 1.05 Litern befüllt wird. Mit welcher Wahrscheinlichkeit passiert dies?