Übungsblatt 11

Mit $*$ und $**$ gekennzeichnete Aufgaben können zum Sammeln von Bonuspunkten verwendet werden. Lösungen von $*$-Aufgaben sind schriftlich abzugeben im Zettelkasten Nr. 5 auf dem D1 bis Mittwoch, 27.6.07, 11:00 Uhr. Lösungen von $**$-Aufgaben sind per Web-Formular unter `http://www.math.upb.de/~walter` ($\longrightarrow$ Lehre SS 07 $\longrightarrow$ Übungen) abzuliefern bis spätestens Mittwoch, 27.6.07, $23^{\underline{59}}$ Uhr.

Aufgabe 59: (Spezielle Verteilungen: Poisson–Verteilung)

Rechne die Aussagen von Abschnitt 2.4.2 der Vorlesung nach: zeige, dass für eine Poisson–verteilte Variable X mit

$$P(X = k) \;=\; \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda} \;, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

gilt: $\quad \mathrm{E}(X) = \lambda \;,\; \mathrm{Var}(X) = \lambda \;,\; \sigma(X) = \sqrt{\lambda}$.

Musterlösung:
Erwartungswert von X:

$$\mathrm{E}(X) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} k\, P(X = k) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\,\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \;=\; \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \;=\; \lambda e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{e^{\lambda}} \;=\; \lambda \;.$$

Erwartungswert von X^2:

$$\mathrm{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \left(\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} \;+\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\lambda^k}{k!} \right)$$

$$= e^{-\lambda} \left(\lambda^2 \frac{d^2}{d\lambda^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \;+\; \lambda \frac{d}{d\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right) = e^{-\lambda} \left(\lambda^2 \frac{d^2}{d\lambda^2}\, e^{\lambda} \;+\; \lambda \frac{d}{d\lambda}\, e^{\lambda} \right) = \lambda^2 + \lambda \;.$$

Hiermit folgt Varianz und Streuung:

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \;.$$

Aufgabe 60*: (Spezielle Verteilungen: Poissonnäherung. 10 Punkte)

In einem aus vielen gleichen Bauteilen aufgebauten System stellt man fest, dass im Mittel 3 Elemente pro Arbeitszyklus ausfallen. Wieviele Ersatzteile sollte man zur Hand haben, um mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit das System für einen Arbeitszyklus in Betrieb halten zu können? (Das System ist nur betriebsfähig, wenn alle Bauteile funktionieren.)

Musterlösung:
Ein Arbeitszyklus wird als n-fache Wiederholung des Bernoulli-Experiments „ein bestimmtes Bauteil fällt aus“ interpretiert, wobei $n \gg 1$ die Anzahl der Bauteile ist. Die „Erfolgswahrscheinlichkeit“ $p =$ „die Wahrscheinlichkeit, dass ein gegebenes Bauteil ausfällt“, ist gering. Der Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$ der Zufallsvariable $X =$ „Anzahl der Bauteile, die pro Arbeitszyklus ausfallen“, ist als $\mathrm{E}(X) = n\,p = 3$ bekannt. Die Poisson–Näherung besagt

$$P(X = k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \ .$$

Es ist K so zu bestimmen, dass

$$P(X \leq K) \approx \sum_{k=0}^{K} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \geq 0.95$$

gilt. Für $\lambda = 3$ ist dies für $K = 6$ erfüllt:

K	4	5	6	7	8
$P(X \leq K)$	0.815	0.916	0.966	0.988	0.996

Man sollte also mindestens 6 Ersatzteile parat haben.

Aufgabe 61:** (Szenen einer Ehe, Teil 2. Hypergeometrische–Verteilung. 20 Punkte)

Dies ist eine Online-Aufgabe, die bis zum 27.6.07, 23^{59} Uhr, abzuliefern ist.

Meine Frau ist unternehmungslustig und geht regelmäßig an m Tagen der Woche allein aus. Im Zuge der Gleichberechtigung tue ich dies an n Tagen der Woche ebenfalls. Da unsere Aktivitäten unabhängig voneinander sind, ziehen wir manchmal an den selben Wochentagen, manchmal an unterschiedlichen Wochentagen jeder für sich los.

Wieviele Wochentage bleiben uns im Mittel für gemeinsame Aktivitäten? (Zahlenwerte für m und n werden vom Aufgabenserver zufällig gewählt.)

Anleitung: vergleiche mit Aufgabe 11 auf Blatt 2.

Musterlösung:
In der Musterlösung von Aufgabe 11 (Blatt 2) findet man:

$$P(\text{„genau } k \text{ gemeinsame Tage“}) = \frac{m! \cdot n!}{k! \cdot N! \cdot (k+m+n-N)!} \cdot \prod_{j=0}^{k-1} (N-m-j) \cdot \prod_{j=0}^{k-1} (N-n-j)$$

für $\max(0, N-m-n) \leq k \leq N$, wobei $N = 7$ die Anzahl der Wochentage ist. (Das Produkt $\prod_{j=0}^{j=-1}$ für $k = 0$ wird in der obigen Formel als 1 definiert). Als Erwartungswert der Variablen $X =$ „Anzahl der gemeinsamen Wochentage“ erhält man

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=\max(0,N-m-n)}^{N} k \cdot P(\text{„genau } k \text{ gemeinsame Tage“})$$

$$= \sum_{k=\max(0,N-m-n)}^{N} k \cdot \frac{m! \cdot n!}{k! \cdot N! \cdot (k+m+n-N)!} \cdot \prod_{j=0}^{k-1} (N-m-j) \cdot \prod_{j=0}^{k-1} (N-n-j).$$

Dieser Ausdruck läßt sich vereinfachen zu $E(X) = (N - m) \cdot (N - n)/N$. Anstatt dies formal anhand der Formel zu beweisen, betrachten wir eine alternative Lösung:

Alternative Lösung: In der Menge von N $(= 7)$ Wochentagen werden die m Tage markiert, an denen meine Frau ausgeht. Ich ziehe nun ohne Zurücklegen meine n Tage aus den N Wochentagen. Betrachte ich die m markierten Wochentage meiner Frau als „Erfolge“, so ist die Anzahl Y der von mir gezogenen Erfolge bekannterweise hypergeometrisch verteilt, also

$$P(Y = k) = \frac{\binom{m}{k} \cdot \binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

mit dem Erwartungswert (nach Abschnitt 2.4.4 der Vorlesung):

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{m \cdot n}{N}.$$

Die Anzahl der gemeinsam zur Verfügung stehenden Tage X ist

$$X = N - m - n + Y,$$

also

$$\mathrm{E}(X) = N - m - n + EW(Y) = N - m - n + \frac{n \cdot m}{N} = \frac{(N-n) \cdot (N-m)}{N}.$$

Mit MuPAD ergeben sich für $N = 7$ folgende Werte:

	n = 0	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5	n = 6	n = 7
m = 0	7	6	5	4	3	2	1	0
m = 1	6	36/7	30/7	24/7	18/7	12/7	6/7	0
m = 2	5	30/7	25/7	20/7	15/7	10/7	5/7	0
m = 3	4	24/7	20/7	16/7	12/7	8/7	4/7	0
m = 4	3	18/7	15/7	12/7	9/7	6/7	3/7	0
m = 5	2	12/7	10/7	8/7	6/7	4/7	2/7	0
m = 6	1	6/7	5/7	4/7	3/7	2/7	1/7	0
m = 7	0	0	0	0	0	0	0	0

Gleitpunktapproximationen:

	n = 0	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5	n = 6	n = 7
m = 0	7.0	6.0	5.0	4.0	3.0	2.0	1.0	0.0
m = 1	6.0	5.14	4.29	3.43	2.57	1.71	0.857	0.0
m = 2	5.0	4.29	3.57	2.86	2.14	1.43	0.714	0.0
m = 3	4.0	3.43	2.86	2.29	1.71	1.14	0.571	0.0
m = 4	3.0	2.57	2.14	1.71	1.29	0.857	0.429	0.0
m = 5	2.0	1.71	1.43	1.14	0.857	0.571	0.286	0.0
m = 6	1.0	0.857	0.714	0.571	0.429	0.286	0.143	0.0
m = 7	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Aufgabe 62*: (Spezielle Verteilungen: Exponentialverteilung. 10 Punke)

Die Lebensdauer einer Glühbirne sei exponentiell verteilt. Sie überlebe 100 Stunden mit Wahrscheinlichkeit 0.9.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie 200 Stunden überlebt?

(b) Wieviele Stunden überlebt sie mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit?

Musterlösung:

Sei T der Zeitpunkt, an dem die Birne durchbrennt. Diese Variable sei exponentiell verteilt mit der Dichte $\rho(t) = \lambda\, e^{-\lambda\, t}$ für $t \geq 0$. Hierbei ist λ durch

$$P(T > 100) = \int_{100}^{\infty} \rho(t)\, dt = \lambda \int_{100}^{\infty} e^{-\lambda\, t}\, dt = e^{-100\,\lambda} = 0.9 =: p$$

bestimmt, also $\lambda = -\ln(0.9)/100$.

a) Die Birne überlebt 200 Stunden mit der Wahrscheinlichkeit

$$P(T > 200) = \int_{200}^{\infty} \rho(t)\, dt = \lambda \int_{200}^{\infty} e^{-\lambda\, t}\, dt = e^{-200\,\lambda} = p^2 = 0.81\ .$$

b) Es ist das τ zu bestimmen, für welches

$$P(T > \tau) = \int_{\tau}^{\infty} \rho(t)\, dt = \lambda \int_{\tau}^{\infty} e^{-\lambda\, t}\, dt = e^{-\tau\,\lambda} = 0.95$$

gilt, also

$$\tau = \frac{-\ln(0.95)}{\lambda} = \frac{\ln(0.95)}{\ln(0.9)} \cdot 100 \approx 48.7 \text{ (Stunden)}.$$

Aufgabe 63: (Spezielle Verteilungen: kontinuierliche Gleichverteilung)

Rechne die Aussagen von Abschnitt 2.4.6 der Vorlesung nach: zeige, dass für eine auf dem Intervall $[a, b]$ gleichverteilte kontinuierliche Variable X gil:

$$\mathrm{E}(X) = \frac{a+b}{2}\ , \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}\ , \quad \sigma(X) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}\ .$$

Musterlösung:

Erwartungswert von X:

$$\mathrm{E}(X) \;=\; \int_a^b r\, \frac{1}{b-a}\, dr \;=\; \frac{1}{b-a} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=a}^{r=b} \;=\; \frac{1}{b-a}\, \frac{b^2-a^2}{2}$$

$$=\; \frac{1}{b-a}\, \frac{(b+a)\cdot(b-a)}{2} \;=\; \frac{a+b}{2}.$$

Erwartungswert von X^2:

$$\mathrm{E}(X^2) \;=\; \int_a^b r^2 \;\frac{1}{b-a}\; dr \;=\; \frac{1}{b-a}\;\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=a}^{r=b} \;=\; \frac{1}{b-a}\;\frac{b^3-a^3}{3}$$

$$=\; \frac{1}{b-a}\;\frac{(b^2+a\cdot b+a^2)\cdot(b-a)}{3} \;=\; \frac{b^2+a\cdot b+a^2}{3}.$$

Hiermit folgt Varianz und Streuung:

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = \frac{b^2+a\cdot b+a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$= \frac{4\cdot(b^2+a\cdot b+a^2)}{12} - \frac{3\cdot(a^2+2\cdot a\cdot b+b^2)}{12} = \frac{b^2-2\cdot a\cdot b+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Aufgabe 64*: (Spezielle Verteilungen: diskrete Gleichverteilung. 20 Punkte)
Zeige für eine Variable X, die die ganzzahligen Werte $\{n, n+1, \ldots, m\}$ mit der selben (kombinatorischen) Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{m-n+1}$ annimmt:

$$\mathrm{E}(X) = \frac{n+m}{2}\;, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{(m-n)\cdot(m-n+2)}{12}\;.$$

Hinweis: es gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} k \;=\; \frac{p\cdot(p+1)}{2}$, $\quad\displaystyle\sum_{k=1}^{p} k^2 \;=\; \frac{p\cdot(p+1)\cdot(2\cdot p+1)}{6}$. Es ergibt sich etwas Rechnerei, bei der MuPAD kräftesparend wirken kann.

Musterlösung:
Erwartungswert von X:

$$\mathrm{E}(X) \;=\; \sum_{k=n}^{m} k\cdot P(X=k) \;=\; \frac{1}{m-n+1}\sum_{k=n}^{m} k \;=\; \frac{1}{m-n+1}\left(\sum_{k=1}^{m} k - \sum_{k=1}^{n-1} k\right)$$

$$=\; \frac{1}{m-n+1}\;\left(\frac{m\cdot(m+1)}{2} - \frac{(n-1)\cdot n)}{2}\right) \;=\; \frac{1}{m-n+1}\;\frac{m^2-n^2+m+n}{2}$$

$$=\; \frac{1}{m-n+1}\;\frac{(m-n+1)\cdot(m+n)}{2} \;=\; \frac{m+n}{2}.$$

Erwartungswert von X^2:

$$\mathrm{E}(X^2) \;=\; \sum_{k=n}^{m} k^2\cdot P(X=k) \;=\; \frac{1}{m-n+1}\sum_{k=n}^{m} k^2 \;=\; \frac{1}{m-n+1}\left(\sum_{k=1}^{m} k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k^2\right)$$

$$=\; \frac{1}{m-n+1}\;\left(\frac{m\cdot(m+1)\cdot(2\cdot m+1)}{6} - \frac{(n-1)\cdot n\cdot(2\cdot(n-1)+1)}{6}\right)$$

$$=\; \frac{1}{m-n+1}\;\frac{(m-n+1)\cdot(2\cdot m^2+2\cdot n^2+2\cdot m\cdot n+m-n)}{6}$$

$$= \frac{2 \cdot m^2 + 2 \cdot n^2 + 2 \cdot m \cdot n + m - n}{6}.$$

Hiermit folgt Varianz und Streuung:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) = \sigma^2(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 &= \frac{2 \cdot m^2 + 2 \cdot n^2 + 2 \cdot m \cdot n + m - n}{6} - \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 \\
&= \frac{2 \cdot (2 \cdot m^2 + 2 \cdot n^2 + 2 \cdot m \cdot n + m - n)}{12} - \frac{3 \cdot (m^2 + 2 \cdot m \cdot n + n^2)}{12} \\
&= \frac{m^2 - 2 \cdot m \cdot n + n^2 + 2 \cdot m - 2 \cdot n}{12} = \frac{(m-n)^2 + 2 \cdot (m-n)}{12} \\
&= \frac{(m-n) \cdot (m-n+2)}{12}.
\end{aligned}$$
