Ü b u n g s b l a t t 10

Mit $*$ und $**$ gekennzeichnete Aufgaben können zum Sammeln von Bonuspunkten verwendet werden. Lösungen von $*$-Aufgaben sind schriftlich abzugeben im Zettelkasten Nr. 5 auf dem D1 bis Mittwoch, 20.6.07, 11:00 Uhr. Lösungen von $**$-Aufgaben sind per Web-Formular unter `http://www.math.upb.de/~walter` ($\longrightarrow$ Lehre SS 07 $\longrightarrow$ Übungen) abzuliefern bis spätestens Mittwoch, 20.6.07, $23^{\underline{59}}$ Uhr.

Aufgabe 53: (Ein Bernoulli-Floh, Erwartungswerte)

(a) Ein Floh sitzt auf dem Ursprung der Zahlengerade und springt jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten $p = P(+)$ bzw. $q = P(-) = 1 - p$ um eine Einheit nach rechts bzw. links. Sei X_n die Position des Flohs nach n Sprüngen. Berechne den Erwartungswert und die Streuung von X_n!
(Hinweis: Man interpretiere einen Flohsprung als Bernoulli-Experiment und setze $X_n = X - (n - X)$, wobei X die Anzahl der „Erfolge“ = „Sprünge nach rechts“ ist. Benutze die Rechenregeln für Erwartungswerte aus Satz 2.33 der Vorlesung.)

(b) Wieviele Sprünge wird der Floh brauchen, um das Intervall $[-1, 1]$ zu verlassen?
(Anleitung: betrachte das Bernoulli-Experiment „Doppelsprung“ mit „Erfolg“ = „der Floh verlässt $[-1, 1]$“ = „$++$ oder $--$“. Beachte Aufgabe 47.a).)

Musterlösung:
a) Der Stichprobenraum für den n-fachen Sprung (die n-fache Wiederholung des Bernoulli-Experiments „Einzelsprung“) sei formal

$$\Omega = \{(\omega_1, \ldots, \omega_n);\ \omega_i \in \{+, -\}\}$$

(diese Formalisierung wird aber gar nicht wirklich benötigt). Sei X die Anzahl der “Erfolge“ = “Sprünge nach rechts“. Die Variable X_n = „Position nach n Sprüngen“ ist offensichtlich

$$\begin{aligned} X_n &= \text{Anzahl der Sprünge nach rechts} - \text{Anzahl der Sprünge nach links} \\ &= \text{Anzahl der Sprünge nach rechts} - (n - \text{Anzahl der Sprünge nach rechts}) \\ &= 2 \cdot \text{Anzahl der Sprünge nach rechts} - n \ = \ 2\,X - n. \end{aligned}$$

Die Variable X ist als „Anzahl der Erfolge bei n-facher Wiederholung eines Bernoulli-Experiments“ bekanntlich $\mathrm{Bi}(n, p)$-verteilt mit Erwartungswert $\mathrm{E}(X) = n\,p$ und Streuung $\sigma^2(X) = n\,p\,q$. Aus $X_n = 2\,X - n$ folgt unmittelbar der Erwartungswert

$$\mathrm{E}(X_n) = \mathrm{E}(2\,X - n) = 2\,\mathrm{E}(X) - n = 2\,n\,p - n = n\,p - n\,(1 - p) = n\,(p - q)\ .$$

Mit

$$\mathrm{E}(X_n^2) = \mathrm{E}((2\,X - n)^2) = \mathrm{E}(4\,X^2 - 4\,n\,X + n^2) = 4\,\mathrm{E}(X^2) - 4\,n\,\mathrm{E}(X) + n^2\ ,$$

und

$$\mathrm{E}(X_n)^2 = (2\,\mathrm{E}(X) - n)^2 = 4\,\mathrm{E}(X)^2 - 4\,n\,\mathrm{E}(X) + n^2$$

folgt die Streuung

$$\sigma^2(X_n) = \mathrm{E}(X_n^2) - \mathrm{E}(X_n)^2 = 4\,(\mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2) = 4\,\sigma^2(X) = 4\,n\,p\,q\ .$$

b) Da der Floh nach einer geraden Anzahl von Sprüngen auf einer geraden, nach einer ungeraden Anzahl von Sprüngen auf einer ungeraden Zahl sitzt, ist die Anzahl der Sprünge bis zum Verlassen des Intervalls $[-1,1]$ stets gerade. Daher ist es naheliegend, „Doppelsprünge" $++$, $--$, $+-$, $-+$ des Flohs zu betrachten:
Der „Erfolg" des Bernoulli-Experiments „Doppelsprung" sei $\{++,--\}$ (man gelangt vom Nullpunkt startend aus bei ± 2, verlässt also das Intervall $[-1,1]$). Der Mißerfolg sei $\{+-,-+\}$ (man landet von Nullpunkt aus startend wieder im Nullpunkt). Nach Aufgabe 47.a) ist die mittlere Anzahl von Versuchen bis zum ersten Erfolg eines Bernoulli-Experiments = 1/Erfolgsw'keit. Offensichtlich gilt für den Doppelsprung:

$$P(\text{„Erfolg"}) = P(\{++,--\}) = p^2 + q^2\ , \quad P(\text{„Mißerfolg"}) = P(\{+-,-+\}) = 2\,p\,q\ .$$

Der Erwartungswert der Doppelsprünge bis zum Verlassen des Intervalls $[-1,1]$ ist damit nach Aufgabe 47.a) gegeben durch 1/Erfolgswahrscheinlichkeit $= 1/(p^2+q^2)$, die mittlere Anzahl von Einzelsprüngen ist damit $2/(p^2+q^2)$.

Aufgabe 54: (Erwartungswerte/Streuungen)

Es wird 2 Mal fair gewürfelt. Sei X die Differenz zwischen dem ersten und dem zweiten Wurf. Bestimme Erwartungswert und Streuung von X!

Musterlösung:
Sei $\Omega = \{(\omega_1,\omega_2);\ \omega_1,\omega_2 \in \{1,2,\ldots,6\}\}$, $X : (\omega_1,\omega_2) \mapsto \omega_1 - \omega_2$. Die Verteilung von X ist:

$$\begin{aligned}
P(X=-5) &= P(\{(1,6)\}) = \frac{1}{36},\\
P(X=-4) &= P(\{(1,5),(2,6)\}) = \frac{2}{36},\\
P(X=-3) &= P(\{(1,4),(2,5),(3,6)\}) = \frac{3}{36},\\
P(X=-2) &= P(\{(1,3),(2,4),(3,5),(4,6)\}) = \frac{4}{36},\\
P(X=-1) &= P(\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6)\}) = \frac{5}{36},\\
P(X=0) &= P(\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}) = \frac{6}{36},\\
P(X=1) &= P(\{(2,1),(3,2),(4,3),(5,4),(6,5)\}) = \frac{5}{36},\\
P(X=2) &= P(\{(3,1),(4,2),(5,3),(6,4)\}) = \frac{4}{36},\\
P(X=3) &= P(\{(4,1),(5,2),(6,3)\}) = \frac{3}{36},\\
P(X=4) &= P(\{(5,1),(6,2)\}) = \frac{2}{36},\\
P(X=5) &= P(\{(6,1)\}) = \frac{1}{36}.
\end{aligned}$$

Dies ergibt die Erwartungswerte

$$\mathrm{E}(X) = -5 \cdot \frac{1}{36} - 4 \cdot \frac{2}{36} - \cdots + 0 \cdot \frac{6}{36} + \cdots + 5 \cdot \frac{1}{36} = 0,$$

$$\mathrm{E}(X^2) = (-5)^2 \cdot \frac{1}{36} + (-4)^2 \cdot \frac{2}{36} - \cdots 0^2 \cdot \frac{6}{36} + \cdots + 5^2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{35}{6}.$$

Es folgt die Streuung

$$\sigma^2(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = \frac{35}{6} \quad \Rightarrow \quad \sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{6}} \approx 2.415 \ .$$

$\mathrm{E}(X)$ läßt sich über die Rechenregeln für Erwartungswerte auch leichter berechnen. Sei Y das Ergebnis eines Wurfes. Es gilt

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{1 + 2 + \cdots + 6}{6} = \frac{7}{2}.$$

Sei $X = X_1 - X_2$, wo X_i das Ergebnis des i-ten Wurfs ist. Es folgt

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(X_1 - X_2) = \mathrm{E}(X_1) - \mathrm{E}(X_2) = \frac{7}{2} - \frac{7}{2} = 0.$$

Auch die Berechnung der Streuung von X läßt sich auf die Streuung der X_i zurückführen, wobei man als zusätzliches Argument jedoch die Unabhängigkeit der Variablen X_i benötigt. Hierauf kommen wir in einer späteren Aufgabe noch einmal zurück.

Aufgabe 55*: (Chebyshev. 5 + 10 Punkte)

Betrachte noch einmal Aufgabe 38.b) (Blatt 6) in leicht abgewandelter Form:

(i) Berechne für zwei Orte mit jeweils 20 bzw. 1000 Geburten pro Monat die exakte Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einem Monat mindestens doppelt so viele Mädchen wie Jungen geboren werden. (Zur Auswertung der Summen bietet sich z.B. MuPAD an.)

(ii) Leite über die Chebyshevsche Ungleichung (Satz 2.36 der Vorlesung) eine Abschätzung für die in (i) gefragten Wahrscheinlichkeiten her und vergleiche diese mit den dort gefundenen exakten Werten. Beachte hierbei die Symmetrie „Mädchen $\leftrightarrow$ Jungen" der Verteilung, um die gefrage Wahrscheinlichkeit in die Form $P(|X - \mathrm{E}(X)| \geq \epsilon)$ mit X = „Anzahl der Mädchengeburten" zu bringen.

Musterlösung:

Interpretiere eine Geburt als Bernoulli-Experiment mit „Erfolg" = + = „Mädchen" und „Mißerfolg" = − = „Junge", wobei $p = P(+) = q = P(-) = 1/2$ (in der Wirklichkeit gilt $P(+) \approx 0.486$).

i) Sei n die Anzahl der Geburten. Das Ereignis „die Anzahl der Mädchen ist ≥ 2 mal Anzahl der Jungen" bedeutet $X \geq \frac{2}{3}n$. Also ist gefragt nach

$$P\Big(X \geq \frac{2\,n}{3}\Big) = \sum_{k \geq 2\,n/3}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} \ .$$

Für $n = 20$ ergibt sich (z.B. per MuPAD):

$$P(X \geq 13.3...) = \frac{1}{2^{20}} \sum_{k=14}^{20} \binom{20}{k} \approx 0.0576 \ .$$

Für $n = 1000$ ergibt sich:

$$P(X \geq 666.6...) = \frac{1}{2^{1000}} \sum_{k=667}^{1000} \binom{1000}{k} \approx 1.07 \cdot 10^{-26} \ .$$

ii) Da Chebyshev nur Aussagen der Form

$$P(|X - \mathrm{E}(X)| \geq \epsilon) = P(X \leq \mathrm{E}(X) - \epsilon \text{ oder } X \geq \mathrm{E}(X) + \epsilon)$$

liefert, wir aber nach $P(X \geq ...)$ fragen, ist das Ereignis $X \geq 2\,n/3$ soweit umzuformulieren, dass man eine Aussage hat, auf die Chebyshev anwendbar ist, also ein Ereignis der Form „$X \geq ...$ oder $X \leq ...$“ ist:
Wegen $p = q = 1/2$ (Symmetrie Mädchen/Jungen) gilt

$$P\Big(X \geq \frac{2\,n}{3}\Big) = P(\text{„die Anzahl der Mädchen ist} \geq 2 \text{ mal Anzahl der Jungen“})$$

$$= P(\text{„die Anzahl der Jungen ist} \geq 2 \text{ mal Anzahl der Mädchen“}) = P\Big(X \leq \frac{n}{3}\Big) \ .$$

Damit folgt

$$P\Big(X \geq \frac{2\,n}{3}\Big) = \frac{n}{2}\,\bigg(P\Big(X \geq \frac{2\,n}{3}\Big) + P\Big(X \leq \frac{n}{3}\Big)\bigg)$$

$$= \frac{1}{2}\,\bigg(P\Big(X \geq \frac{2\,n}{3} \text{ oder } X \leq \frac{n}{3}\Big)\bigg) = \frac{1}{2}\ P\Big(|X - \frac{n}{2}| \geq \frac{n}{6}\Big) \ .$$

Mit $\mathrm{E}(X) = n/2$ und $\epsilon = n/6$ kann jetzt unmittelbar Chebyshev angewendet werden:

$$P(|X - \mathrm{E}(X)| \geq \epsilon) \ \leq \ \frac{\mathrm{Var}(X)}{\epsilon^2}.$$

Hier ist $\mathrm{E}(X) = n\,p = n/2$, $\mathrm{Var}(X) = n\,p\,q = n/4$, $\epsilon = n/6$, also

$$P\Big(X \geq \frac{2\,n}{3}\Big) \leq \frac{1}{2}\ \frac{n\,p\,q}{\epsilon^2} = \frac{1}{2}\ \frac{n/4}{(n/6)^2} = \frac{4.5}{n} \ .$$

Für $n = 20$ folgt die Abschätzung

$$P(X \geq 13.3) \leq 0.225 \ .$$

Für $n = 1000$ folgt die Abschätzung

$$P(X \geq 666.6) \leq 4.5 \cdot 10^{-3} \ .$$

Der Vergleich mit den exakten Ergebnissen in i) zeigt, dass die durch Chebyshev gelieferten Abschätzungen arg grob sind.

Aufgabe 56: (Linearität von Erwartungswerten)

In einem Spiel zieht die Kandidatin ohne Zurücklegen aus einer Urne mit 100 durchnummerierten Kugeln. Das Spiel ist beendet, sobald ein gezogener Wert kleiner ist als der zuvor gezogene Wert. Pro Zug erhält sie einen Euro. Wieviel Euro wird sie im Mittel erhalten?
Hinweis: ein möglicher Ansatz ist, die Zufallsvariablen

$$X_k := \begin{cases} 1, & \text{wenn die Kandidatin den } k\text{-ten Zug machen darf,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und ihre Erwartungswerte zu betrachten.

Musterlösung:
Für die Zufallsvariable $X =$ „Gewinn“ gilt $X = X_1 + \cdots + X_{100}$. Die Erwartungswerte sind

$$E(X_k) = P(X_k = 1).$$

Das Ereignis „$X_k = 1$“ tritt genau dann ein, wenn in den ersten $k-1$ Zügen aufsteigende Werte gezogen wurden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit passiert dies? Wähle dazu aus den 100 Kugeln eine Teilmenge von $k-1$ Kugeln. Es gibt $(k-1)!$ Anordnungen (Reihenfolgen), die alle gleichwahrscheinlich sind. Genau eine dieser Anordnungen ist aufsteigend und führt dazu, dass das Spiel nicht vor dem k-ten Zug abbricht. Also gilt

$$P(X_k = 1) \;=\; \frac{1}{(k-1)!}.$$

Es folgt (beachte $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, also $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$):

$$E(X) = \sum_{k=1}^{100} E(X_k) = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{99} \frac{1}{k!} \approx e \approx 2.718\ldots\,.$$

Aufgabe 57:** (Linearität von Erwartungswerten. 10 Punkte)

Dies ist eine Online-Aufgabe, die bis zum 20.6.07, 23^{59} Uhr, abzuliefern ist.

Eine Gruppe von n (perfekten) Jägern schießt auf m Enten, wobei sich jeder Jäger sein Opfer zufällig und unabhängig von den anderen Jägern auswählt. Wieviele Enten werden dies überstehen? (Hierbei gibt der Aufgabenserver Werte für n und m zufällig vor.)

Musterlösung:
Betrachte die i-te Ente, betrachte das Bernoulli-Experiment „Jäger j wählt sich Ente i nicht als Ziel“ mit der „Erfolgs“wahrscheinlichkeit $p = (m-1)/m$. Die W'keit, bei n-facher Wiederholung des Bernoulli-Experiments genau n Erfolge zu haben („keiner der Jäger wählt Ente i als Ziel“) ist

$$P(\text{Ente } i \text{ überlebt}) = \Big(\frac{m-1}{m}\Big)^n.$$

Mit

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Ente } i \text{ überlebt,} \\ 0, & \text{falls Ente } i \text{ nicht überlebt} \end{cases}$$

ist $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_m$ die Anzahl der überlebenden Enten mit dem Erwartungswert

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) + \ldots + \mathrm{E}(X_m) = m \cdot \Big(\frac{m-1}{m}\Big)^n.$$

Aufgabe 58*: (Erwartungswert und Varianz. 10 + 15 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $M = \{1, \ldots, n\}$ und $\varphi : M \to M$ eine Permutation. Man nennt $m \in M$ einen *Fixpunkt der Permutation* φ, falls $\varphi(m) = m$ gilt.

(i) Bestimme den Erwartungswert für die Anzahl der Fixpunkte einer Permutation von M.

(ii) Bestimme die Varianz für die Anzahl der Fixpunkte einer Permutation von M.

Anleitung: betrachte die Zufallsvariablen $X_i(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \varphi(i) = i, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Musterlösung:
Der unterliegende kombinatorische Stichprobenraum sei

$$\Omega = \{\varphi;\ \varphi = \text{Permutation von } \{1,\ldots,\text{n}\}\},$$

dessen Mächtigkeit bekannterweise $|\Omega| = n!$ ist (also $P(\{\varphi\}) = 1/n!$).

(i) Es sei X die Zufallsgröße, die die Anzahl der Fixpunkte einer Permutation beschreibt. Wir definieren die Indikatorvariablen X_i für $1 \leq i \leq n$ durch

$$X_i(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \varphi(i) = i, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit gilt: $X = \sum_{i=1}^n X_i$. Gesucht ist der Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$. Wegen der Linearität des Erwartungswertes gilt:

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}\Big(\sum_{i=1}^n X_i\Big) = \sum_{i=1}^n \mathrm{E}(X_i).$$

Es gibt $(n-1)!$ Permutationen mit einem vorgegebenen Fixpunkt i (alle Permutationen der $(n-1)$-elementigen Menge $\{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$), also folgt:

$$\mathrm{E}(X_i) = 1 \cdot P(X_i = 1) + 0 \cdot P(X_i = 0) = P(X_i = 1)$$

$$= P(\text{“Permutation hat den Fixpunkt } i\text{”}) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

für alle $1 \leq i \leq n$. Also folgt:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^n \mathrm{E}(X_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1.$$

(ii) Wir übernehmen die Bezeichnungen aus Teil (i) der Aufgabe. Nach Definition gilt für die Varianz $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$. Wir müssen also den Erwartungswert von $\mathrm{E}(X^2)$ ermitteln. Es gilt:

$$\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{E}\left(\Big(\sum_{i=1}^n X_i\Big)^2\right) = \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} X_i \cdot X_j\right) = \sum_{i=1}^n \mathrm{E}(X_i^2) + \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} \mathrm{E}(X_i \cdot X_j).$$

Wegen

$$X_i^2(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \varphi(i) = i, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

folgt wie unter (i): $\mathrm{E}(X_i^2) = \frac{1}{n}$ für alle $1 \leq i \leq n$. Ferner gilt:

$$(X_i \cdot X_j)(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \varphi(i) = i \text{ und } \varphi(j) = j \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

für alle $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$. Also folgt analog zu den Argumenten in i):

$$\mathrm{E}(X_i \cdot X_j) = 1 \cdot P(X_i \cdot X_j = 1) + 0 \cdot P(X_i \cdot X_j = 0) = P(X_i \cdot X_j = 1)$$

$$= P(\text{“Permutation hat die Fixpunkte } i \text{ und } j\text{”}) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n \cdot (n-1)}$$

für alle $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$. Insgesamt erhalten wir daher:

$$\mathrm{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} + \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} \frac{1}{n \cdot (n-1)} = n \cdot \frac{1}{n} + n \cdot (n-1) \cdot \frac{1}{n \cdot (n-1)} = 2.$$

Folglich haben wir damit

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = 2 - 1 = 1.$$