

Ü b u n g s b l a t t 10

Mit \* und \*\* gekennzeichnete Aufgaben können zum Sammeln von Bonuspunkten verwendet werden. Lösungen von \*-Aufgaben sind schriftlich abzugeben im Zettelkasten Nr. 5 auf dem D1 bis Mittwoch, 20.6.07, 11:00 Uhr. Lösungen von \*\*-Aufgaben sind per Web-Formular unter <http://www.math.upb.de/~walter> (→ Lehre SS 07 → Übungen) abzuliefern bis spätestens Mittwoch, 20.6.07, 23<sup>59</sup> Uhr.

**Aufgabe 53:** (Ein Bernoulli-Floh, Erwartungswerte)

- (a) Ein Floh sitzt auf dem Ursprung der Zahlengerade und springt jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten  $p = P(+)$  bzw.  $q = P(-) = 1 - p$  um eine Einheit nach rechts bzw. links. Sei  $X_n$  die Position des Flohs nach  $n$  Sprüngen. Berechne den Erwartungswert und die Streuung von  $X_n$ !  
(Hinweis: Man interpretiere einen Flohsprung als Bernoulli-Experiment und setze  $X_n = X - (n - X)$ , wobei  $X$  die Anzahl der „Erfolge“ = „Sprünge nach rechts“ ist. Benutze die Rechenregeln für Erwartungswerte aus Satz 2.33 der Vorlesung.)
- (b) Wieviele Sprünge wird der Floh brauchen, um das Intervall  $[-1, 1]$  zu verlassen?  
(Anleitung: betrachte das Bernoulli-Experiment „Doppelsprung“ mit „Erfolg“ = „der Floh verlässt  $[-1, 1]$ “ = „++ oder --“. Beachte Aufgabe 47.a.)

**Aufgabe 54:** (Erwartungswerte/Streuungen)

Es wird 2 Mal fair gewürfelt. Sei  $X$  die Differenz zwischen dem ersten und dem zweiten Wurf. Bestimme Erwartungswert und Streuung von  $X$ !

**Aufgabe 55\*:** (Chebyshev. 5 + 10 Punkte)

Betrachte noch einmal Aufgabe 38.b) (Blatt 6) in leicht abgewandelter Form:

- (i) Berechne für zwei Orte mit jeweils 20 bzw. 1000 Geburten pro Monat die exakte Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einem Monat mindestens doppelt so viele Mädchen wie Jungen geboren werden. (Zur Auswertung der Summen bietet sich z.B. MuPAD an.)
- (ii) Leite über die Chebyshevsche Ungleichung (Satz 2.36 der Vorlesung) eine Abschätzung für die in (i) gefragten Wahrscheinlichkeiten her und vergleiche diese mit den dort gefundenen exakten Werten. Beachte hierbei die Symmetrie „Mädchen  $\leftrightarrow$  Jungen“ der Verteilung, um die gefragte Wahrscheinlichkeit in die Form  $P(|X - E(X)| \geq \epsilon)$  mit  $X$  = „Anzahl der Mädchengeburten“ zu bringen.

**Aufgabe 56:** (Linearität von Erwartungswerten)

In einem Spiel zieht die Kandidatin ohne Zurücklegen aus einer Urne mit 100 durchnummerierten Kugeln. Das Spiel ist beendet, sobald ein gezogener Wert kleiner ist als der zuvor

gezogene Wert. Pro Zug erhält sie einen Euro. Wieviel Euro wird sie im Mittel erhalten?

Hinweis: ein möglicher Ansatz ist, die Zufallsvariablen

$$X_k := \begin{cases} 1, & \text{wenn die Kandidatin den } k\text{-ten Zug machen darf,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und ihre Erwartungswerte zu betrachten.

**Aufgabe 57\*\*:** (Linearität von Erwartungswerten. 10 Punkte)

Dies ist eine Online-Aufgabe, die bis zum 20.6.07, 23<sup>59</sup> Uhr, abzuliefern ist.

Eine Gruppe von  $n$  (perfekten) Jägern schießt auf  $m$  Enten, wobei sich jeder Jäger sein Opfer zufällig und unabhängig von den anderen Jägern auswählt. Wieviele Enten werden dies überstehen? (Hierbei gibt der Aufgabenserver Werte für  $n$  und  $m$  zufällig vor.)

**Aufgabe 58\*:** (Erwartungswert und Varianz. 10 + 15 Punkte)

Sei  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $M = \{1, \dots, n\}$  und  $\varphi : M \rightarrow M$  eine Permutation. Man nennt  $m \in M$  einen *Fixpunkt der Permutation*  $\varphi$ , falls  $\varphi(m) = m$  gilt.

- (i) Bestimme den Erwartungswert für die Anzahl der Fixpunkte einer Permutation von  $M$ .
- (ii) Bestimme die Varianz für die Anzahl der Fixpunkte einer Permutation von  $M$ .

Anleitung: betrachte die Zufallsvariablen  $X_i(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \varphi(i) = i, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$