

Ü b u n g s b l a t t 9

Lösungen von *-Aufgaben sind per Web-Formular unter <http://math-www.upb.de/~walter> (→ Lehre SS 05 → Übungen) bis spätestens Do, 16.6.05, abzuliefern. Lösungen von **-Aufgaben sind schriftlich abzugeben. Sie werden zu Beginn der Vorlesung am Mi, 15.6.05 eingesammelt.

Aufgabe 59: (Zwischenwertsatz)

Zeige, dass jedes reelle Polynom ungeraden Grades mindestens eine reelle Nullstelle besitzt.

Musterlösung:

Wir zeigen, dass das Polynom für hinreichend große positive Argumente ein anderes Vorzeichen hat als für hinreichend große negative Argumente. Betrachte

$$p(x) = x^n + c_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + c_0 = x^n \cdot \left(1 + \frac{c_{n-1}}{x} + \dots + \frac{c_0}{x^n}\right),$$

wo o.B.d.A. der führende Koeffizient auf 1 normiert wurde. Der Grenzwert der Summe für $x \rightarrow \pm\infty$ ist 1, also gilt

$$1 + \frac{c_{n-1}}{x} + \dots + \frac{c_0}{x^n} \geq \frac{1}{2},$$

wenn nur $|x|$ groß genug ist, sagen wir, für $|x| \geq C > 0$. Für $x \geq C$ folgt $p(x) \geq \frac{x^n}{2} > 0$. Für $x \leq -C$ folgt $p(x) \leq \frac{x^n}{2} < 0$ für ungerades n . Der Zwischenwertsatz auf dem Intervall $[-C, C]$ liefert sofort die Existenz einer Nullstelle in diesem Intervall.

Aufgabe 60*: (Zwischenwertsatz, Intervallhalbierung. 10 Bonuspunkte)

Sei M eine positive Zahl (die `hex` zufällig wählt). Finde per Bisektion ein Intervall $[a, b]$ mit $b - a \leq 10^{-2}$, das den Wert $M^{1/3}$ enthält. Suche dazu die Lösung von $x^3 = M$ auf einem geeigneten Startintervall, das von `hex` vorgegeben wird.

Musterlösung:

Wende Bisektion auf die Lösung von

$$f(x) = x^3 - M = 0$$

an. Als Startintervall betrachten wir hier

$$[a_0, b_0] = [0, 1],$$

wobei $f(0) < 0$ und $f(1) \geq 0$ für $M \in (0, 1)$ gilt (`hex` wählt $M \in (0, 1)$). Damit ist über den Zwischenwertsatz die Existenz einer Nullstelle im Startintervall $[0, 1]$ garantiert. Z.B. für $M = 13/18$:

$$f(x) = x^3 - \frac{13}{18},$$

$$\begin{aligned}
[a_0, b_0] &= \left[0, 1\right]; & b_0 - a_0 &= 1.0, & f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right) &= -0.597\dots, \\
[a_1, b_1] &= \left[\frac{1}{2}, 1\right]; & b_1 - a_1 &= 0.5, & f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) &= -0.300\dots, \\
[a_2, b_2] &= \left[\frac{3}{4}, 1\right]; & b_2 - a_2 &= 0.25, & f\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right) &= -0.052\dots, \\
[a_3, b_3] &= \left[\frac{7}{8}, 1\right]; & b_3 - a_3 &= 0.125, & f\left(\frac{a_3+b_3}{2}\right) &= 0.101\dots, \\
[a_4, b_4] &= \left[\frac{7}{8}, \frac{15}{16}\right]; & b_4 - a_4 &= 0.0625, & f\left(\frac{a_4+b_4}{2}\right) &= 0.022\dots, \\
[a_5, b_5] &= \left[\frac{7}{8}, \frac{29}{32}\right]; & b_5 - a_5 &= 0.031\dots, & f\left(\frac{a_5+b_5}{2}\right) &= -0.015\dots, \\
[a_6, b_6] &= \left[\frac{57}{64}, \frac{29}{32}\right]; & b_6 - a_6 &= 0.015\dots, & f\left(\frac{a_6+b_6}{2}\right) &= 0.002\dots, \\
[a_7, b_7] &= \left[\frac{57}{64}, \frac{115}{128}\right]; & b_7 - a_7 &= 0.007\dots & & \text{(Genauigkeit erreicht).}
\end{aligned}$$

Vergleich der Approximation mit dem angestrebten Wert:

```
>> float([57/64, 115/128])
```

[0.890625, 0.8984375]

```
>> float((13/18)^(1/3))
```

0.897202102

Aufgabe 61:** (Zwischenwertsatz. 10 Bonuspunkte)

Diese Aufgabe kann schriftlich bearbeitet werden. Bearbeitungen werden zu Beginn der Vorlesung am Mi, 15.6.05, eingesammelt.

Sei T die Funktion, die jedem Punkt des Äquators die dort herrschende Temperatur zuordnet (diese Funktion sei stetig). Zeige, dass es mindestens einen Punkt auf dem Äquator gibt, an dem die gleiche Temperatur herrscht wie an seinem antipodalen (gegenüberliegenden) Punkt.

Musterlösung:

Sei x ein Punkt auf dem Äquator und $A(x)$ der antipodale Punkt (man stelle sich unter x z.B. den Längengrad vor). Die Funktion $A(x)$ ist stetig in x . Betrachte die wiederum stetige Funktion

$$f(x) = T(x) - T(A(x)).$$

Mit der (offensichtlichen) Eigenschaft $A(A(x)) = x$ folgt

$$f(A(x)) = T(A(x)) - T(A(A(x))) = T(A(x)) - T(x) = -f(x).$$

Sei p irgendein Punkt auf dem Äquator, für den $f(p) \neq 0$ gilt (sonst ist p bereits der gesuchte Punkt). Gilt $f(p) > 0$, so folgt $f(A(p)) < 0$. Gilt $f(p) < 0$, so folgt $f(A(p)) > 0$. Damit haben $f(p)$ und $f(A(p))$ immer entgegengesetzte Vorzeichen. Der Zwischenwertsatz auf dem Intervall $[p, A(p)]$ garantiert einen Punkt x mit $f(x) = 0$, also $T(x) = T(A(x))$.

Zusatz: eigentlich entspricht der Äquator nur dem Intervall $[0, 2 \cdot \pi)$, wenn man sich x als den Längengrad vorstellt. In dieser Darstellung ist $A(x) = (x + \pi) \bmod 2 \cdot \pi$ an der Stelle $x = \pi$ nicht stetig. Man kann sich leicht aus diesem technischen Dilemma winden, indem man sich die Temperatur als periodisch auf ganz \mathbb{R} fortgesetzt vorstellt und $A(x) = x + \pi$ als Darstellung der Antipoden definiert. Nun ist alles stetig.

Aufgabe 62: (O-Kalkül für Funktionen)

Zeige:

- $\frac{e^{(x^2)} - 1}{x \cdot (1 + x)} = O(x)$ im Limes $x \rightarrow 0$,
- $\frac{e^x - 1}{x} = O(1)$ im Limes $x \rightarrow 0$,
- $\frac{x}{x^2 + 1} = O\left(\frac{1}{x}\right)$ im Limes $x \rightarrow \infty$.

Musterlösung:

a) Es ist zu zeigen, dass

$$\frac{(e^{(x^2)} - 1)/(x \cdot (1 + x))}{x} = \frac{e^{(x^2)} - 1}{x^2 \cdot (1 + x)}$$

auf einer Umgebung von $x = 0$ beschränkt ist. Es gilt

$$\begin{aligned} e^{(x^2)} - 1 &= \left(1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2!} + \frac{(x^2)^3}{3!} + \dots\right) - 1 = x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots \\ &= x^2 \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \dots\right)}_{f(x)} \end{aligned}$$

Die konvergierende Reihe $f(x)$ ist auf einer Umgebung von $x = 0$ beschränkt. Z.B. gilt für $|x| \leq 1$

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left|1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \dots\right| \leq 1 + \frac{|x|^2}{2!} + \frac{|x|^4}{3!} + \dots \leq 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots = e. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\frac{e^{x^2} - 1}{x^2 \cdot (1 + x)} = \frac{f(x)}{1 + x}$$

auf einer Umgebung von $x = 0$ beschränkt (beachte, dass die stetige Funktion $1 + x$ in der Nähe von $x = 0$ Werte in der Nähe der 1 annimmt).

b) Es ist zu zeigen, dass

$$f(x) := \frac{(e^x - 1)/x}{1} = \frac{e^x - 1}{x}$$

auf einer Umgebung von $x = 0$ beschränkt ist. Es gilt

$$f(x) = \frac{(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots) - 1}{x} = \frac{x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots}{x} = \frac{x \cdot (1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots)}{x}$$

$$= 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots$$

Die konvergierende Reihe $f(x)$ ist auf einer Umgebung von $x = 0$ beschränkt. Z.B. gilt für $|x| \leq 1$

$$|f(x)| = \left| 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots \right| \leq 1 + \frac{|x|}{2!} + \frac{|x|^2}{3!} + \dots \leq 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = e.$$

c) Es ist zu zeigen, dass $\frac{x/(x^2+1)}{1/x} = \frac{x^2}{x^2+1}$ für alle hinreichend großen x beschränkt ist. In der Tat gilt $x^2/(x^2+1) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 63*: (O-Kalkül für Funktionen. 10 Bonuspunkte)

Seien M_1, M_2 positive Zahlen (die `hex` zufällig wählt). Gilt

$$e^{(x^{M_1})} - 1 - x^{M_1} = O(x^{M_2}) \quad \text{im Limes } x \rightarrow 0 ?$$

Es gibt nur einen Abgaberversuch für die Antwort TRUE (richtig) oder FALSE (falsch)!

Musterlösung:

Es ist zu prüfen, ob

$$\begin{aligned} \frac{e^{(x^{M_1})} - 1 - x^{M_1}}{x^{M_2}} &= \frac{1}{x^{M_2}} \cdot \left(\left(1 + x^{M_1} + \frac{(x^{M_1})^2}{2!} + \frac{(x^{M_1})^3}{3!} + \dots \right) - 1 - x^{M_1} \right) \\ &= \frac{1}{x^{M_2}} \cdot \left(\frac{(x^{M_1})^2}{2!} + \frac{(x^{M_1})^3}{3!} + \frac{(x^{M_1})^4}{4!} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{x^{M_2}} \cdot (x^{M_1})^2 \cdot \left(\frac{1}{2!} + \frac{x^{M_1}}{3!} + \frac{(x^{M_1})^2}{4!} + \dots \right) \\ &= x^{2M_1 - M_2} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2!} + \frac{x^{M_1}}{3!} + \frac{x^{2 \cdot M_1}}{4!} + \dots \right)}_{f(x)} \end{aligned}$$

beschränkt ist. Die verbleibende Reihe $f(x)$ ist beschränkt (analog zu den Beweisen für Aufgabe 62). Damit ist der obige Ausdruck in einer Umgebung von $x = 0$ genau dann beschränkt, wenn $2 \cdot M_1 - M_2 \geq 0$ gilt. Die Aussage ist damit richtig für

$$2 \cdot M_1 \geq M_2.$$

Aufgabe 64: (O-Kalkül für Funktionen)

Zeige:

- a) $x \cdot \ln(|x|) = o(1)$ im Limes $x \rightarrow 0$,
- b) $\ln(x) = o(x)$ im Limes $x \rightarrow \infty$.

Anleitung: Offensichtlich gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(g(y))$, wenn man die Existenz der Grenzwerte voraussetzt und $g(y)$ an der Stelle y_0 stetig ist. Weiterhin: Die Existenz des rechten

Grenzwerts impliziert die Existenz des linken Grenzwerts, wenn zusätzlich g auf einer Umgebung von y_0 streng monoton ist. Das gilt auch für $x_0 = \pm\infty$ und/oder $y_0 = \pm\infty$. Benutze dies (ohne Beweis) und setze hier $x = e^{-y}$ bzw. $x = e^y$. Betrachte statt des Limes in x einen entsprechenden Limes in y .

Musterlösung:

a) Es ist zu zeigen, dass $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ für $f(x) = x \cdot \ln(|x|) = 0$ gilt. Wegen $f(-x) = -f(x)$ braucht nur $x > 0$ betrachtet zu werden, also reicht es,

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} x \cdot \ln(x) = 0$$

zu zeigen. Wir setzen $x = e^{-y}$ und benutzen

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} x \cdot \ln(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} e^{-y} \cdot \ln(e^{-y}) = \lim_{y \rightarrow \infty} -\frac{y}{e^y}.$$

Für $y > 0$ gilt mit $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \dots > \frac{y^2}{2}$:

$$\left| -\frac{y}{e^y} \right| < \frac{y}{y^2/2} = \frac{2}{y}.$$

Für jede gegen ∞ konvergierende Folge (y_n) ist damit $(-y_n/e^{y_n})$ eine Nullfolge, also

$$\lim_{y \rightarrow \infty} -\frac{y}{e^y} = 0.$$

b) Es ist zu zeigen, dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

gilt. Wir setzen $x = e^y$ und benutzen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^y)}{e^y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y}{e^y}.$$

Wie in a) folgt

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y}{e^y} = 0.$$
