Übungsblatt 8

Lösungen von $*$-Aufgaben sind per Web-Formular unter `http://math-www.upb.de/~walter` ($\longrightarrow$ Lehre SS 05 $\longrightarrow$ Übungen) bis spätestens Do, 9.6.05, abzuliefern.
Lösungen von $**$-Aufgaben sind schriftlich abzugeben. Sie werden zu Beginn der Vorlesung am Mi, 8.6.05 eingesammelt.

Aufgabe 48: (Stetigkeit. Einfacher Beweis)

Beweise formal, dass die Betragsfunktion $z \in \mathbb{C} \to |z|$ überall auf $\mathbb{C}$ stetig ist.
Anleitung: leite aus der Dreiecksungleichung zunächst die „umgekehrte Dreiecksungleichung“ $\Big| |z_1| - |z_2| \Big| \leq |z_1 - z_2|$ für beliebige komplexe Zahlen z_1, z_2 her.

Musterlösung:
Die Dreiecksungleichung besagt $|a+b| \leq |a| + |b|$, also $|a+b| - |b| \leq |a|$ für alle komplexen Zahlen a, b. Für $a = z_1 - z_2$, $b = z_2$ ergibt sich

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|,$$

für $a = z_2 - z_1$, $b = z_1$ ergibt sich

$$|z_2| - |z_1| \leq |z_2 - z_1| = |z_1 - z_2|.$$

Insgesamt ergibt sich die umgekehrte Dreiecksungleichung

$$\Big| |z_1| - |z_2| \Big| \leq |z_1 - z_2|$$

für beliebige komplexe Zahlen z_1, z_2.

Sei nun (z_n) eine gegen einen Punkt $z^* \in \mathbb{C}$ konvergierende Folge. Zu jedem $\epsilon > 0$ erfüllen alle bis auf endlich viele Folgenglieder $|z_n - z^*| \leq \epsilon$. Mit der umgekehrten Dreiecksungleichung folgt

$$\Big| |z_n| - |z^*| \Big| \leq |z_n - z^*| \leq \epsilon.$$

Damit konvergiert die Folge $|z_n|$ gegen $|z^*|$. Also:

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \Big| \lim_{n\to\infty} z_n \Big|,$$

d.h., die Betragsfunktion ist am (beliebigen) Punkt z^* stetig.

Aufgabe 49: (Stetigkeit)

Zeige, dass folgende Funktion am Nullpunkt stetig ist: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{(x^2)} - 1 - x^2}{x^3} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

Musterlösung:
Mit

$$e^{(x^2)} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots$$

folgt

$$e^{(x^2)} - 1 - x^2 = \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots = x^4 \cdot \underbrace{\Big(\frac{1}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots\Big)}_{g(x)},$$

wobei die verbleibende Reihe $g(x)$ für jedes x konvergiert und sicherlich $0 \leq |g(x)| \leq e^{|x|^2}$ erfüllt. Für $x \neq 0$ gilt damit

$$f(x) = \frac{x^4 \cdot g(x)}{x^3} = x \cdot g(x).$$

Der Grenzwert $f(x_n)$ jeder Nullfolge existiert und ist 0, denn $g(x_n)$ ist sicherlich beschränkt. Mit

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 = f(0)$$

für jede Nullfolge x_n ist f am Nullpunkt stetig. Diese Argumentation funktioniert unabhängig davon, ob man f über $\mathbb{R}$ oder über $\mathbb{C}$ betrachtet.

Aufgabe 50: (Stetigkeit)

An welchen Stellen $x \in \mathbb{R}$ ist die folgende (reelle) Funktion stetig: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+x^{2n}}$?

Musterlösung:
Beachte zunächst $x^{2n} = (x^2)^n$. Für $x \in (-1,1)$ gilt $x^2 \in [0,1)$ und damit $(x^2)^n \to 0$ für $n \to \infty$, also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = 1.$$

Für $|x| > 1$ gilt $x^2 > 1$ und damit $(x^2)^n \to \infty$ für $n \to \infty$, also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = 0.$$

Für $x = \pm 1$ gilt $(x^2)^n = 1$ für alle n, also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = \frac{1}{2}.$$

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |x| < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{falls } |x| = 1, \\ 0 & \text{falls } |x| > 1 \end{cases}$$

ist damit überall außer an den Punkten $x = \pm 1$ stetig. An den Punkten $x = \pm 1$ gilt für die einseitigen Grenzwerte

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = 0 \neq \frac{1}{2} = f(1), \qquad \lim_{x\to 1-0} f(x) = 1 \neq \frac{1}{2} = f(1),$$

$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = 1 \neq \frac{1}{2} = f(-1), \qquad \lim_{x\to -1-0} f(x) = 0 \neq \frac{1}{2} = f(-1).$$

Aufgabe 51: (Stetigkeit, Rechenregeln)

Seien f und g am Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetige reelle Funktionen. Zeige, dass die Funktionen

$$M(x) = \max(f(x), g(x)) \quad \text{und} \quad m(x) = \min(f(x), g(x))$$

am Punkt x stetig sind.
Anleitung: $M(x) = \frac{1}{2} \cdot (f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|)$, $m(x) = \frac{1}{2} \cdot (f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|)$.

Musterlösung:
Nach den Rechenregeln ist $h(x) = f(x) - g(x)$ am Punkt x stetig. Nach Aufgabe 48 ist die Betragsfunktion stetig und damit auch die Komposition $|h(x)|$. Mit den Rechenregeln folgt daraus sofort die Stetigkeit des Maximums M und des Minimums m.

Aufgabe 52: (Stetigkeit)
An welchen Stellen $x \in \mathbb{R}$ ist die folgende (reelle) Funktion stetig?

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \text{ rational ist,} \\ 1-x & \text{falls } x \text{ irrational ist.} \end{cases}$$

Anleitung: zu jeder reellen Zahl x gibt es eine Folge rationaler Zahlen sowie eine Folge irrationaler Zahlen, die gegen x konvergiert.

Musterlösung:
Sei $x \neq 1/2$. Hier ist f unstetig: Für eine gegen x konvergierende Folge (x_n) rationaler Zahlen gilt

$$\lim_{n\to} f(x_n) = \lim_{n\to} x_n = x.$$

Für eine gegen x konvergierende Folge (x_n) irrationaler Zahlen gilt

$$\lim_{n\to} f(x_n) = \lim_{n\to}(1 - x_n) = 1 - x.$$

Für $x \neq \frac{1}{2}$ stimmen diese Grenzwerte nicht überein. Wäre f an der Stelle x stetig, müssten jedoch die Grenzwerte für *jede* gegen x konvergente Folge übereinstimmen (genauer, mit $f(x)$ übereinstimmen).

Wir zeigen die Stetigkeit von f an der Stelle $x = \frac{1}{2}$. Sei dazu h_n eine beliebige Nullfolge (d.h., $x_n = \frac{1}{2} + h_n$ ist eine beliebige gegen $\frac{1}{2}$ konvergierende Folge). Ist h_n rational (und damit auch x_n), so folgt

$$f(x_n) - f\Big(\frac{1}{2}\Big) = f\Big(\frac{1}{2} + h_n\Big) - f\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2} + h_n - \frac{1}{2} = h_n.$$

Ist h_n irrational (und damit auch x_n), so folgt

$$f(x_n) - f\Big(\frac{1}{2}\Big) = f\Big(\frac{1}{2} + h_n\Big) - f\Big(\frac{1}{2}\Big) = 1 - \Big(\frac{1}{2} + h_n\Big) - \frac{1}{2} = -h_n.$$

In jedem Fall gilt $f(x_n) = f\Big(\frac{1}{2}\Big) + \text{Nullfolge}$, also $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\Big(\frac{1}{2}\Big)$.

Aufgabe 53: (Stetigkeit. Technisch sehr anspruchsvoll. Für Ehrgeizige.)
Die eindeutige „Normalform“ einer rationalen Zahl $x \neq 0$ sei $x = \frac{m}{n}$ mit *teilerfremden* ganzen Zahlen m, n und $n > 0$. Zeige, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{für } x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \text{ mit der Normalform } x = \dfrac{m}{n}, \\ 1 & \text{für } x = 0, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

in allen irrationalen Punkten stetig und in allen rationalen Punkten unstetig ist.
Anleitung: Verwende, dass es zu jeder irrationalen Zahl x eine Folge rationaler Zahlen gibt, die gegen x konvergiert. Die Zähler und Nenner dieser rationalen Zahlen werden immer größer. Ebenso gibt es zu jeder rationalen Zahl x eine Folge rationaler Zahlen, die gegen x konvergiert, wobei die Zähler und Nenner der Folgenglieder immer größer werden.

Musterlösung:
Offensichtlich gilt $f(-x) = -f(x)$, womit f genau dann am Punkt $-x$ stetig ist, wenn f am Punkt x stetig ist. Wir brauchen daher nur $x \geq 0$ zu diskutieren.
a) Sei $x > 0$ irrational und (x_j) eine beliebige gegen x konvergierende Folge rationaler Zahlen mit der Normalform $x_j = m_j/n_j$. Wir zeigen, dass die Folge der Nenner n_j nicht beschränkt sein kann. Wären sie beschränkt, sagen wir $n_j \leq N$ für alle j, so wären auch die Zähler beschränkt: Für alle (bis auf endlich viele) j gilt

$$0 < \frac{m_j}{n_j} \leq x + 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < m_j \leq n_j \cdot (x+1) \leq N \cdot (x+1).$$

Es gibt aber nur endlich viele rationale Zahlen mit derartig beschränkten Zählern und Nennern. Sei

$$\delta_N = \min\left\{ \left|\frac{m}{n} - x\right|;\ m, n \in \mathbb{N},\ m \leq N \cdot (x+1),\ n \leq N \right\}$$

der Fehler der besten Approxmation von x, die sich mit rationalen Zahlen mit Nennern $\leq N$ erreichen läßt. Diese δ_N ist größer als 0, da x sonst rational sein müßte.
Sei nun $\epsilon > 0$ vorgegeben. Betrachte die Folgenglieder

$$X_\epsilon = \{x_j; |x_j - x| < \delta_{\frac{1}{\epsilon}}\},$$

deren Abstand zu x kleiner als $\delta_{\frac{1}{\epsilon}}$ ist. Wegen $x_j \to x$ für $j \to \infty$ liegen alle bis auf endlich viele Folgenglieder x_j in X_ϵ. Für alle $x_j = m_j/n_j \in X_\epsilon$ gilt $n_j > \frac{1}{\epsilon}$, denn für $n_j \leq \frac{1}{\epsilon}$ würde $|x_j - x| \geq \delta_{\frac{1}{\epsilon}}$ folgen. Damit folgt

$$0 \leq f(x_j) = \frac{1}{n_j} < \epsilon$$

für alle bis auf endlich viele j. Dies ist aber die Konvergenz der Folge $f(x_j)$ gegen 0. Damit haben wir

$$\lim_{j\to\infty} f(x_j) = 0 = f\Big(\lim_{j\to\infty} x_j\Big) = f(x)$$

für jede gegen x konvergierende Folge *rationaler* Zahlen gezeigt. Betrachtet man eine gegen x konvergierende Folge (x_j), die auch irrationale Zahlen enthält, so konvergiert weiterhin $f(x_j)$ gegen 0, denn für die irrationalen Folgenglieder x_j gilt sowieso $f(x_j) = 0$.

b) Für $x = 0$ betrachte die Nullfolge $x_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ mit

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \neq f(0) = 1.$$

Damit ist $x = 0$ ein Unstetigkeitspunkt von f.

c) Sei $x > 0$ rational mit der Normalform $x = m/n$. Verwendet man die Tatsache, dass man eine gegen x konvergierende Folge *irrationaler* Zahlen konstruieren kann, ist man sofort fertig: die Funktionswerte auf diesen irrationalen Zahlen sind 0, ihr Grenzwert ist 0 und stimmt damit nicht mit dem Funktionswert $f(x) = \frac{1}{n} \neq 0$ überein. Damit ist f an rationalen Punkten unstetig.
Will man nur mit rationalen Zahlen arbeiten, ist die Argumentation ein wenig komplizierter: Wir konstruieren eine gegen x konvergierende Folge *rationaler* Zahlen (x_j), deren Zähler und Nenner beliebig groß werden, so dass $f(x_j)$ gegen Null konvergiert. Wegen $f(x) = \frac{1}{n} \neq 0$ für rationales x folgt damit die Unstetigkeit an rationalen Punkten.
Betrachte zunächst

$$j_0 = m \cdot n + 1 > 1.$$

Die Zahl j_0 ist teilerfremd zu m (jede Division von j_0 durch einen Teiler von m hat den Rest 1). Die Zahl $j_0 + n = (m+1) \cdot n + 1$ ist teilerfremd zu n (jede Division von j_0 durch einen Teiler von n hat den Rest 1). Weiterhin sind $j_0 + n$ und j_0 teilerfremd, da n und j_0 teilerfremd sind. Damit ist

$$x_{j_0} = \frac{(j_0 + n) \cdot m}{j_0 \cdot n}$$

in Normalform. Mit den selben Argumenten sind auch

$$x_{j_0^2} = \frac{(j_0^2+n)\cdot m}{j_0^2\cdot n}, \quad x_{j_0^3} = \frac{(j_0^3+n)\cdot m}{j_0^3\cdot n}, \quad \dots$$

in Normalform (denn j_0^2, j_0^3 etc. sind wieder teilerfremd zu m, da j_0 teilerfremd zu m ist. Analog sind j_0^2+n, j_0^3+n etc. teilerfremd zu n, da j_0 teilerfremd zu n ist.) Die Folge $(x_{j_0}, x_{j_0^2}, x_{j_0^3}, \dots)$ konvergiert gegen x:

$$\lim_{p\to\infty} \frac{j_0^p+n}{j_0^p}\cdot\frac{m}{n} = \lim_{p\to\infty}\left(1+\frac{n}{j_0^p}\right)\cdot\frac{m}{n} = \frac{m}{n} = x.$$

Aber es gilt

$$\lim_{p\to\infty} f(x_{j_0^p}) = \lim_{p\to\infty}\frac{1}{j_0^p\cdot n} = 0 \neq f(x) = \frac{1}{n}.$$

Aufgabe 54: (Funktionsgrenzwerte)

Betrachte die reelle Funktion $f(x) = \frac{|x|}{x}$ für $x \neq 0$. Bestimme den links- und rechtsseitigen Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0\pm 0} f(x)$. Läßt sich f im Punkt $x = 0$ stetig ergänzen?

Musterlösung:
Es gilt

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Der links-/rechtsseitige Grenzwert für $x \to 0$ ist damit offensichtlich

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to 0-0} f(x) = -1.$$

Die Funktion wäre genau dann stetig ergänzbar, wenn diese Grenzwerte existieren und übereinstimmen.

Aufgabe 55:** (Funktionsgrenzwerte. 10 Bonuspunkte)

Diese Aufgabe kann schriftlich bearbeitet werden. Bearbeitungen werden zu Beginn der Vorlesung am Mi, 8.6.05, eingesammelt.

Bestimme den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^m-1}$ für $m, n \in \mathbb{N}$. Anleitung: Aufgabe 8.

Musterlösung:
Nach Aufgabe 8 gilt

$$x^n - 1 = (x-1)\cdot\left(1+x+x^2+\dots+x^{n-1}\right), \quad x^m - 1 = (x-1)\cdot\left(1+x+x^2+\dots+x^{m-1}\right),$$

also

$$\frac{x^n-1}{x^m-1} = \frac{1+x+x^2+\dots+x^{n-1}}{1+x+x^2+\dots+x^{m-1}}.$$

Diese Darstellung ist stetig an der Stelle $x = 1$, so dass der Grenzwert direkt durch Einsetzen von $x = 1$ berechnet werden kann:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^m-1} = \lim_{x\to 1}\frac{1+x+x^2+\dots+x^{n-1}}{1+x+x^2+\dots+x^{m-1}} = \frac{n}{m}.$$

Aufgabe 56*: (Funktionsgrenzwerte. 10 Bonuspunkte)
Seien M_1, M_2, M_3, M_4 ganze Zahlen (die von `hex` zufällig gewählt werden). Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{M_1} - x^{M_2}}{x^{M_3} - x^{M_4}}.$$

Anleitung: vergleiche mit Aufgabe 55. MuPAD-Funktion zur Kontolle: `limit`.

Musterlösung:
Mit Aufgabe 55 gilt:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{M_1} - x^{M_2}}{x^{M_3} - x^{M_4}} = \lim_{x\to 1} \frac{x^{M_2}}{x^{M_4}} \frac{x^{M_1-M_2} - 1}{x^{M_3-M_4} - 1} = \underbrace{\left(\lim_{x\to 1} \frac{x^{M_2}}{x^{M_4}}\right)}_{=1} \cdot \left(\lim_{x\to 1} \frac{x^{M_1-M_2} - 1}{x^{M_3-M_4} - 1}\right) = \frac{M_1 - M_2}{M_3 - M_4}.$$

Aufgabe 57: (Funktionsgrenzwerte)
Bestimme den Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$.

Musterlösung:
Mit dem üblichen „Erweiterungsargument“ folgt

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0,$$

denn $\sqrt{x+1}$ und $\sqrt{x}$ wachsen unbeschränkt an für $x \to \infty$.

Aufgabe 58: (Funktionsgrenzwerte)

Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 10 \cdot x + 16}{|x-2| + |x^2 - 4|}$?

Musterlösung:
Nach Faktorisierung folgt

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 10 \cdot x + 16}{|x-2| + |x^2-4|} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\cdot(x-8)}{|x-2| + |x-2| \cdot |x+2|} = \lim_{x\to 2} \underbrace{\frac{x-2}{|x-2|}}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{x-8}{1+|x+2|}}_{g(x)}.$$

Die Funktion $g(x)$ ist offensichtlich am Punkt $x = 2$ stetig, es gilt $g(2) \neq 0$. Wäre die Funktion $f(x) \cdot g(x)$ am Punkt $x = 2$ stetig ergänzbar, müsste $f(x) = (f(x) \cdot g(x))/g(x)$ am Punkt $x = 2$ stetig ergänzbar sein. Analog zu Aufgabe 54 läßt sich die Funktion f am Punkt $x = 2$ jedoch nicht stetig ergänzen. Damit kann der Grenzwert von $f(x) \cdot g(x)$ für $x \to 2$ nicht existieren.
