Ü b u n g s b l a t t 7

Lösungen von $*$-Aufgaben sind per Web-Formular unter `http://math-www.upb.de/~walter` ($\longrightarrow$ Lehre SS 05 $\longrightarrow$ Übungen) bis spätestens Do, 2.6.05, abzuliefern.
Lösungen von $**$-Aufgaben sind schriftlich abzugeben. Sie werden zu Beginn der Vorlesung am Di, 31.5.05 eingesammelt.
Achtung: Die Vorlesung am Mi, 1. Juni 05, fällt aus! Die Abgabe ist bereits am Di, 31.5.05!

Aufgabe 45:** (Summation durch Partialbruchzerlegung. 10 Bonuspunkte)
Diese Aufgabe kann schriftlich bearbeitet werden. Bearbeitungen werden zu Beginn der Vorlesung am Di, 31.5.05, eingesammelt.

Bestimme den Reihenwert von

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2 - k}{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)\cdot(k+4)}.$$

Anleitung: Rezept 3.32, Beispiel 3.33 der Vorlesung.

Musterlösung:
Ansatz für die Partialbruchentwicklung:

$$\frac{k^2 - k}{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)\cdot(k+4)} = \frac{e_1}{k+1} + \frac{e_2}{k+2} + \frac{e_3}{k+3} + \frac{e_4}{k+4}$$

$$= \frac{(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)\cdot k^3}{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)\cdot(k+4)} + \frac{(9\cdot e_1 + 8\cdot e_2 + 7\cdot e_3 + 6\cdot e_4)\cdot k^2}{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)\cdot(k+4)}$$

$$+ \frac{(26\cdot e_1 + 19\cdot e_2 + 14\cdot e_3 + 11\cdot e_4)\cdot k}{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)\cdot(k+4)} + \frac{24\cdot e_1 + 12\cdot e_2 + 8\cdot e_3 + 6\cdot e_4}{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)\cdot(k+4)}.$$

Es folgt das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
e_1 & + & e_2 & + & e_3 & + & e_4 & = & 0, \\
9\cdot e_1 & + & 8\cdot e_2 & + & 7\cdot e_3 & + & 6\cdot e_4 & = & 1, \\
26\cdot e_1 & + & 19\cdot e_2 & + & 14\cdot e_3 & + & 11\cdot e_4 & = & -1, \\
24\cdot e_1 & + & 12\cdot e_2 & + & 8\cdot e_3 & + & 6\cdot e_4 & = & 0
\end{array}$$

mit der Lösung

$$e_1 = \frac{1}{3}, \quad e_2 = -3, \quad e_3 = 6, \quad e_4 = -\frac{10}{3}.$$

Probe mit MuPAD:

```
>> partfrac((k^2 - k)/(k+1)/(k+2)/(k+3)/(k+4), k)

      1           3       6          10
  --------- - ----- + ----- - ---------
  3 (k + 1)   k + 2   k + 3   3 (k + 4)
```

Summation:

$$\sum_{k=2}^{\infty}\Big(\frac{1/3}{k+1}-\frac{3}{k+2}+\frac{6}{k+3}-\frac{10/3}{k+4}\Big)$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
= & \frac{1/3}{3} & + & \frac{1/3}{4} & + & \frac{1/3}{5} & + & \frac{1/3}{6} & + & \frac{1/3}{7} & + & \ldots \\
 & & - & \frac{3}{4} & - & \frac{3}{5} & - & \frac{3}{6} & - & \frac{3}{7} & - & \ldots \\
 & & & & + & \frac{6}{5} & + & \frac{6}{6} & + & \frac{6}{7} & + & \ldots \\
 & & & & & & - & \underbrace{\frac{10/3}{6}}_{0} & - & \underbrace{\frac{10/3}{7}}_{0} & - & \underbrace{\ldots}_{0} \\
= & \frac{1/3}{3} & - & \frac{8/3}{4} & + & \frac{10/3}{5} & = & \frac{1}{9}. & & & &
\end{array}$$

Probe mit MuPAD:

```
>> sum((k^2 - k)/(k+1)/(k+2)/(k+3)/(k+4), k = 2 .. infinity)

                         1/9
```

Aufgabe 46*: (Summation durch Partialbruchzerlegung. 10 Bonuspunkt)
Seien $M_1, \ldots, M_4$ Zahlen (die von `hex` zufällig gewählt werden). Bestimme den Reihenwert

$$\sum_{k=M_1}^{\infty}\frac{k-M_2}{k^3+M_3\cdot k^2+M_4\cdot k}$$

Anleitung: wie Aufgabe 45, rechenintensiver.
MuPAD-Funktionen zur Kontrolle: `partfrac, sum`.

Musterlösung:
Seien $-k_1$ und $-k_2$ die beiden Lösungen von $k^2+M_3\cdot k+M_4=0$, also

$$k^2+M_3\cdot k+M_4=(k+k_1)\cdot(k+k_2).$$

Die Partialbruchzerlegung:

```
>> M3:= k1 + k2:
>> M4:= k1*k2:
>> z:= partfrac((k-M2)/(k^3 + M3*k^2 + M4*k), k):
>> map(z, Simplify)

                                   M2
                                   -- + 1
           M2 + k1                 k2                M2
   ---------------------- + ------------------ - -------
              2             (k1 - k2) (k + k2)   k k1 k2
   (k1 k2 - k1 ) (k + k1)
```

Mit den Abkürzungen

$$a = \frac{M_2 + k_1}{k_1 \cdot (k_2 - k_1)}, \quad b = \frac{M_2 + k_2}{k_2 \cdot (k_1 - k_2)}, \quad c = -\frac{M_2}{k_1 \cdot k_2}$$

ergibt sich für ganzzahliges $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ (`hex` wählt diese Zahlen so):

$$\sum_{k=M_1}^{\infty} \left(\frac{a}{k+k_1} + \frac{b}{k+k_2} + \frac{c}{k} \right) =$$

$$\frac{a}{M_1+k_1} + \frac{a}{M_1+k_1+1} + \cdots + \frac{b}{M_1+k_2} + \frac{b}{M_1+k_2+1} + \cdots + \frac{c}{M_1} + \frac{c}{M_1+1} + \cdots .$$

Beachte: Es gilt $a + b + c = 0$. Sobald ein Nenner in allen drei Termen (mit a, b und c) auftaucht, heben sich die Summanden mit diesem Nenner weg. Dies passiert für alle Nenner der Form $M_1 + k$ ab $k = max(k_1, k_2)$. Damit ergibt sich:

$$\sum_{k=M_1}^{\infty} \left(\frac{a}{k+k_1} + \frac{b}{k+k_2} + \frac{c}{k} \right) =$$

$$a \cdot \sum_{k=k_1}^{max(k_1,k_2)-1} \frac{1}{M_1+k} \quad + \quad b \cdot \sum_{k=k_2}^{max(k_1,k_2)-1} \frac{1}{M_1+k} \quad + \quad c \cdot \sum_{k=0}^{max(k_1,k_2)-1} \frac{1}{M_1+k}.$$

Hierbei ist eine Summe als 0 zu verstehen, wenn die obere Grenze des Laufindex k kleiner ist als die untere Grenze.

Der obige Wert ist leicht für konkretes M_1, M_2, k_1, k_2 auszurechnen (es handelt sich um endliche Summen).

Aufgabe 47*: (Summation durch Partialbruchzerlegung. 10 Bonuspunkt für c.)
In Rezept 3.32 und Beispiel 3.33 der Vorlesung wurde nur der Fall diskutiert, dass in

$$\sum_k \frac{c_0 + c_1 \cdot k + \cdots + c_p \cdot k^p}{d_0 + d_1 \cdot k + \cdots + d_q \cdot k^q}$$

das Nennerpolynom $d_0 + d_1 \cdot k + \cdots + d_q \cdot k^q$ nur einfache Nullstellen hat.

a) Benutze MuPADs `partfrac`, um die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{1}{k^2 \cdot (k+1)^2}, \quad \frac{1}{(k+1)^3 \cdot (k+2)}, \quad \frac{1}{(k+1)^4 \cdot (k+2)^3 \cdot (k+3)^2}$$

zu bestimmen.

b) Betrachte den allgemeinen Fall

$$\sum_k \frac{c_0 + c_1 \cdot k + \cdots + c_p \cdot k^p}{(k-k_1)^{n_1} \cdot (k-k_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (k-k_r)^{n_r}},$$

in dem das Nennerpolynom Nullstellen k_i der Vielfachheiten n_i hat. Es gelte $p \leq n_1 + \cdots + n_r - 2$. Stelle eine Vermutung auf, wie der allgemeine Ansatz für die Partialbruchzerlegung zu lauten hat.

c*) Sei M eine Zahl (die von `hex` zufällig gewählt wird). Berechne die Partialbruchzerlegung von $\dfrac{k-M}{k^3 \cdot (k+1)^2}$.

d) Gelingt es mit c), die Reihe
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-2}{k^3 \cdot (k+1)^2}$$
explizit aufzusummieren? Siehe auch Beispiel 3.22 der Vorlesung.

Musterlösung:
a)

```
>> partfrac(1/k^2/(k+1)^2, k)

                    1    2      2          1
                    -- - - + ----- + --------
                     2   k   k + 1          2
                    k                (k + 1)

>> partfrac(1/(k+1)^3/(k+2)^2, k)

          3          2         3          1          1
        ----- - -------- - ----- + -------- - --------
        k + 1          2   k + 2          3          2
                (k + 1)            (k + 1)    (k + 2)

>> partfrac(1/(k+1)^4/(k+2)^3/(k + 3)^2, k)

      39           75          5          1          2
----------- - ---------- + ----- - -------- + -------- -
          2   16 (k + 1)   k + 2          3          2
16 (k + 1)                         (k + 1)    (k + 2)

        5             1            1            1
   ---------- + ---------- + -------- - -----------
   16 (k + 3)            4          3             2
                4 (k + 1)    (k + 2)    16 (k + 3)
```

b) Allgemeiner Ansatz für $p \leq n_1 + n_2 + \cdots + n_r - 2$:

$$\frac{c_0 + c_1 \cdot k + \cdots + c_p \cdot k^p}{(k-k_1)^{n_1} \cdot (k-k_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (k-k_r)^{n_r}},$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{e_{11}}{k-k_1} + \frac{e_{12}}{(k-k_1)^2} + \cdots + \frac{e_{1n_1}}{(k-k_1)^{n_1}}\\
&\quad + \frac{e_{21}}{k-k_2} + \frac{e_{22}}{(k-k_2)^2} + \cdots + \frac{e_{2n_2}}{(k-k_2)^{n_2}}\\
&\quad + \cdots\\
&\quad + \frac{e_{r1}}{k-k_r} + \frac{e_{r2}}{(k-k_r)^2} + \cdots + \frac{e_{rn_r}}{(k-k_r)^{n_r}}.
\end{aligned}
$$

c) Ansatz:

$$
\begin{aligned}
\frac{k-M}{k^3\cdot(k+1)^2} &= \frac{a}{k} + \frac{b}{k^2} + \frac{c}{k^3} + \frac{d}{k+1} + \frac{e}{(k+1)^2}\\
&= \frac{a\cdot k^2\cdot(k+1)^2 + b\cdot k\cdot(k+1)^2 + c\cdot(k+1)^2 + d\cdot k^3\cdot(k+1) + e\cdot k^3}{k^3\cdot(k+1)^3}\\
&= \frac{(a+d)\cdot k^4 + (2\cdot a+b+d+e)\cdot k^3 + (a+2\cdot b+c)\cdot k^2 + (b+2\cdot c)\cdot k + c}{k^3\cdot(k+1)^3}.
\end{aligned}
$$

Es folgen die Gleichungen

$$
a+d=0, \quad 2\cdot a+b+d+e=0, \quad a+2\cdot b+c=0, \quad b+2\cdot c=1, \quad c=-M
$$

mit der Lösung

$$
a=-(3\cdot M+2), \quad b=2\cdot M+1, \quad c=-M, \quad d=3\cdot M+2, \quad e=M+1,
$$

also

$$
\frac{k-M}{k^3\cdot(k+1)^2} = -\frac{3\cdot M+2}{k} + \frac{2\cdot M+1}{k^2} - \frac{M}{k^3} + \frac{3\cdot M+2}{k+1} + \frac{M+1}{(k+1)^2}.
$$

Probe mit MuPAD:

```
>>  partfrac((k - M)/k^3/(k + 1)^2, k);

    2 M + 1   3 M + 2     M + 1     M   3 M + 2
    ------- - ------- + -------- - -- + -------
       2         k             2    3    k + 1
      k                 (k + 1)    k
```

d) Summation über die Partialbruchzerlegung aus c) mit $M=2$:

$$
\begin{aligned}
S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-2}{k^3\cdot(k+1)^2} &= \sum_{k=1}^{\infty}\Big(-\frac{8}{k} + \frac{5}{k^2} - \frac{2}{k^3} + \frac{8}{k+1} + \frac{3}{(k+1)^2}\Big)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\Big(-\frac{8}{k} + \frac{8}{k+1}\Big) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{5}{k^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{(k+1)^2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k^3}
\end{aligned}
$$

Nur die erste Summe ist eine Teleskopsumme:

$$
S = -\frac{8}{1} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{5}{k^2} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{k^2} - \frac{3}{1}}_{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{(k+1)^2}} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k^3} = -11 + 8\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} - 2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}.
$$

Das Endergebnis enthält die Summen $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ und $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$. Mit MuPAD:

```
>> sum(1/k^2, k = 1 .. infinity)

                                  2
                                PI
                                ---
                                 6

>> sum(1/k^3, k = 1 .. infinity)

                              zeta(3)

>> sum((k - 2)/k^3/(k + 1)^2, k = 1.. infinity)

                          2
                      4 PI
                      ----- - 2 zeta(3) - 11
                        3
```