Übungsblatt 6

Lösungen von $*$-Aufgaben sind per Web-Formular unter `http://math-www.upb.de/~walter` ($\longrightarrow$ Lehre SS 05 $\longrightarrow$ Übungen) bis spätestens Do, 26.5.05, abzuliefern.
Lösungen von $**$-Aufgaben sind schriftlich abzugeben. Sie werden zu Beginn der Vorlesung am Mi, 25.5.05 eingesammelt.

Aufgabe 39: (Von Schnecken und Bäumen. Die harmonische Reihe)
Eine Schnecke beginnt, einen 1 Meter hohen Baum hochzukriechen, wobei sie jeden Tag die Strecke $\epsilon \in (0, 1)$ schafft. In der Nacht ruht sie, während der Baum um einen Meter wächst (kurioserweise wächst dieser Baum nur nachts). Wird die Schnecke jemals die Baumspitze erreichen? Wie alt wird sie sein, wenn sie täglich nur 10 cm zurücklegt?

Musterlösung:
Am Morgen des ersten Tages befindet sich die Schnecke auf der Höhe $m_1 = 0$, am Abend des ersten Tages auf der Höhe $a_1 = \epsilon$. Am Morgen des zweiten Tages wacht sie in der Höhe $m_2 = \frac{2}{1} \cdot a_1$ auf (sie ist durch das Wachstums des Baums mittransportiert worden) und erreicht am Abend die Höhe $a_2 = m_2 + \epsilon$. Usw.
Sie erreiche am Abend des n-ten Tages die Höhe a_n. Am Morgen des $(n+1)$-ten Tages wacht sie in der Höhe $m_{n+1} = \frac{n+1}{n} \cdot a_n$ auf (der Baum ist von n auf $n+1$ Meter gewachsen und hat sie dabei um einen entsprechenden Bruchteil mitgenommen). Abends hat sie die Höhe $a_{n+1} = m_{n+1} + \epsilon$ erreicht:

$$m_{n+1} = \frac{n+1}{n} \cdot a_n, \quad a_{n+1} = m_{n+1} + \epsilon.$$

Die jeweils abends erreichte Höhe (a_n) ist damit durch die Rekursion

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n} \cdot a_n + \epsilon, \quad a_1 = \epsilon$$

gegeben, also

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{\epsilon}{n+1}, \quad a_1 = \epsilon.$$

Betrachtet man $b_n := a_n/n$, so ist die Folge (b_n) durch die Rekursion

$$b_{n+1} = b_n + \frac{\epsilon}{n+1}, \quad b_1 = \epsilon$$

gegeben:

$$b_{n+1} = b_n + \frac{\epsilon}{n+1} = b_{n-1} + \frac{\epsilon}{n} + \frac{\epsilon}{n+1} = b_{n-2} + \frac{\epsilon}{n-1} + \frac{\epsilon}{n} + \frac{\epsilon}{n+1}$$
$$= \ldots = b_1 + \frac{\epsilon}{2} + \cdots + \frac{\epsilon}{n-1} + \frac{\epsilon}{n} + \frac{\epsilon}{n+1} = \epsilon \cdot \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}.$$

Da der Baum am n-ten Tag die Höhe n hat, erreicht die Schnecke die Baumspitze an dem Tag, für den zum ersten Mal $b_n \geq 1$ gilt. Da $\sum_k \frac{1}{k}$ uneigentlich gegen ∞ konvergiert, wird sie irgendwann einmal die Baumspitze erreichen!

Für $\epsilon = 0.1$ (Meter) ist die Bedingung

$$b_n = 0.1 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq 10$$

zu erfüllen. Durch Ausprobieren mit MuPAD erhält man:

n	$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$	
10	2.9289...	
100	5.1873...	
1000	7.4854...	
2000	8.1783...	
4000	8.8713...	
8000	9.0945...	
10 000	9.7876...	
12 000	9.9699...	
12 366	9.999962...	
12 367	10.000043...	(geschafft!)

Die Schnecke ist dann etwa $12\,367/365 \approx 33.88$ Jahre alt, der Baum ist über 12 km hoch.

Aufgabe 40: (Reihen. Diverse Konvergenzkriterien)
Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$a) \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+\sqrt{k}}, \quad b) \quad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-\sqrt{k}}, \quad c) \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}}.$$

$$d) \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}}{k}, \quad e) \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{k^k}, \quad f) \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-k}}{e^{-2\cdot k}}, \quad g) \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-2\cdot k}}{e^{-k}}.$$

Musterlösung:
a) Divergenz nach dem Minorantenkriterium. Es gilt

$$\frac{1}{k+\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k+k} = \frac{1}{2\cdot k}.$$

Damit ist $\sum_k \frac{1}{2\cdot k}$ eine divergente Minorante.
b) Konvergenz nach dem Majorantenkriterium. Es gilt

$$\frac{1}{k^2-\sqrt{k}} \leq \frac{1}{k^2-k} = \frac{1}{k\cdot(k-1)}.$$

Bekannterweise konvergiert $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\cdot(k-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\cdot k}$ und bildet damit eine konvergente Majorante.

c) Divergenz nach dem Minorantenkriterium. Es gilt

$$\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1})\cdot(\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1})}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{2}{\sqrt{k}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{k}}+\sqrt{1-\frac{1}{k}}\right)} = \frac{1}{k} \cdot \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{k}}+\sqrt{1-\frac{1}{k}}}.$$

Der hintere Faktor konvergiert gegen 1, ist also sicherlich größer als 1/2 für hinreichned großes k. Damit folgt für hinreichend große k

$$\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{2\cdot k}.$$

Damit ist $\sum_k \frac{1}{2\cdot k}$ eine divergente Minorante.
d) Konvergenz nach dem Majorantenkriterium. Analog zu c) gilt

$$\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}}{k} = \frac{1}{k} \cdot \frac{(\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1})\cdot(\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1})}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}}$$

$$= \frac{1}{k} \cdot \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}} = \frac{1}{k} \cdot \frac{2}{\sqrt{k}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{k}}+\sqrt{1-\frac{1}{k}}\right)} = \frac{1}{k^{3/2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{k}}+\sqrt{1-\frac{1}{k}}}.$$

Der hintere Faktor konvergiert gegen 1, ist also sicherlich kleiner als 2 für hinreichned großes k. Damit folgt für hinreichend grosse k

$$\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}}{k} \leq \frac{2}{k^{3/2}}.$$

Nach Beispiel 3.25 ist $\sum_k \frac{2}{k^{3/2}}$ eine konvergente Majorante.
e) Das Quotientenkriterium für $z_k = \frac{k!}{k^k}$ liefert

$$\frac{z_{k+1}}{z_k} = \frac{(k+1)!/(k+1)^{k+1}}{k!/k^k} = (k+1)\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} = \frac{k^k}{(k+1)^k}$$

$$= \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \left(\frac{1}{\frac{k+1}{k}}\right)^k = \frac{1}{(1+\frac{1}{k})^k}.$$

Mit $(1+\frac{1}{k})^k \to e = 2.718...$ konvergiert $\frac{z_{k+1}}{z_k}$ gegen $1/e = 0.367....$ Damit gilt für alle hinreichend großen k sicherlich $\frac{z_{k+1}}{z_k} \leq \frac{1}{2}$. Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe.
f) Es gilt

$$\frac{e^{-k}}{e^{-2\cdot k}} = e^{2\cdot k}\cdot e^{-k} = e^k.$$

Die Summanden bilden keine Nullfolge. Damit kann die Reihe nicht konvergieren.
g) Konvergenz nach dem Majorantenkriterium. Es gilt

$$\frac{e^{-2\,k}}{e^{-k}} = \frac{1}{e^{2\cdot k}\cdot e^{-k}} = \frac{1}{e^k} = \frac{1}{(2.718...)^k} \leq \frac{1}{2^k}.$$

Die geometrische Reihe $\sum_k (\frac{1}{2})^k$ ist damit eine konvergente Majorante.

Aufgabe 41:** (Konvergenz von Reihen. Quotientenkriterium. 5 + 5 Bonuspunkte)
Diese Aufgabe kann schriftlich bearbeitet werden. Bearbeitungen werden zu Beginn der Vorlesung am Mi, 25.5.05, eingesammelt.

Betrachte die Reihe $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k \cdot x^k$, wo F_k die in Aufgabe 31 definierten Fibonacci–Zahlen sind.

a) Für welche Werte von x konvergiert diese Reihe?

Anleitung: Quotientenkriterium. Verwende das Ergebnis von Aufgabe 31.a).

b) Berechne $(1-x-x^2)\cdot f(x)$. Welche (rationale) Funktion wird auf dem Konvergenzbereich der Reihe durch $f(x)$ dargestellt?

Musterlösung:
a) Das Quotientenkriterium garantiert Konvergenz, wenn bis auf endlich viele Indizes

$$\frac{F_{k+1} \cdot |x|^{k+1}}{F_k \cdot |x|^k} = x_k \cdot |x|$$

durch einen Wert < 1 beschränkt ist. Hierbei konvergiert $x_k = F_{k+1}/F_k$ nach Aufgabe 31.a) gegen den Grenzwert $x^* = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Für jedes x mit $x^* \cdot |x| < 1$ folgt für $\epsilon = \frac{1-x^* \cdot |x|}{2 \cdot |x|} > 0$:

$$x_k \cdot |x| \leq (x^* + \epsilon) \cdot |x| = \left(x^* + \frac{1 - x^* \cdot |x|}{2 \cdot |x|}\right) \cdot |x| = x^* \cdot |x| + \frac{1 - x^* \cdot |x|}{2} = \frac{1 + x^* \cdot |x|}{2}$$

für alle hinreichend großen Indizes. Diese Schranke ist kleiner als 1, womit das Quotientenkriterium erfüllt ist. Also: die Reihe konvergiert für alle x mit

$$|x| < \frac{1}{x^*} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618... \ .$$

b) Mit den Rechenregeln für Reihen und der rekursiven Definition $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ der Fibonacci-Zahlen folgt:

$$\begin{aligned}
&(1 - x - x^2) \cdot \Big(F_1 \cdot x + F_2 \cdot x^2 + F_3 \cdot x^3 + \dots\Big) \\
&= F_1 \cdot x + F_2 \cdot x^2 + F_3 \cdot x^3 + F_4 \cdot x^4 + \ \dots \\
&\qquad\quad - F_1 \cdot x^2 - F_2 \cdot x^3 - F_3 \cdot x^4 - \ \dots \\
&\qquad\qquad\qquad - \underbrace{F_1 \cdot x^3}_{0} - \underbrace{F_2 \cdot x^4}_{0} - \underbrace{\dots}_{0} \\
&= \ F_1 \cdot x + (F_2 - F_1) \cdot x^2.
\end{aligned}$$

Mit $F_1 = F_2 = 1$ ergibt sich

$$(1 - x - x^2) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} F_k \cdot x^k = x \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} F_k \cdot x^k = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

für alle x mit $|x| < \frac{2}{1+\sqrt{5}}$.

Aufgabe 42*: (Wurzelkriterium. 10 Bonuspunkte)
Seien $M_1, \ldots, M_4$ Zahlen (die von `hex` zufällig gewählt werden). Definiere die Folge (c_n) rekursiv durch

$$c_n = M_1 \cdot c_{n-1} + M_2, \quad c_0 = M_3.$$

Bestimme eine Konstante r, so dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k \cdot x^k}{M_4^{k/2}}$$

für alle x mit $|x| < r$ konvergiert und für alle x mit $|x| > r$ divergiert (man nennt r den **„Konvergenzradius“** der Reihe).
Anleitung: Wurzelkriterium. Verwende ohne Beweis, dass die Folge (c_n) gegen einen Grenzwert $c > 0$ konvergiert (`hex` wählt die Zahlen geeignet).

Musterlösung:
Das Wurzelkriterium liefert Konvergenz, wenn

$$\sqrt[k]{\frac{|c_k| \cdot |x|^k}{|M_4|^{k/2}}} = \frac{\sqrt[k]{|c_k|} \cdot |x|}{\sqrt{|M_4|}}$$

durch eine Konstante $K < 1$ beschränkt ist Da (c_k) gegen einen Grenzwert $c > 0$ konvergiert, gilt $\frac{c}{2} \leq c_k \leq 2 \cdot c$ für hinreichend große Indizes. Per Intervallkonvergenz

$$\sqrt[k]{\frac{c}{2}} < \sqrt[k]{c_k} < \sqrt[k]{2 \cdot c}$$

folgt $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{c_k} = 1$, da $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{c}{2}} = 1$ und $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{2 \cdot c} = 1$. Damit ist für

$$\frac{|x|}{\sqrt{|M_4|}} < 1$$

sicherlich das Wurzelkriterium erfüllt. Andererseits, für

$$\frac{|x|}{\sqrt{|M_4|}} > 1$$

ist die Folge

$$c_k \cdot \frac{x^k}{|M_4|^{k/2}} \overset{k \gg 1}{\approx} c \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{|M_4|}} \right)^k$$

sicherlich keine Nullfolge, die Reihe kann also nicht konvergieren. Der gesuchte Konvergenzradius ist damit

$$r = \sqrt{|M_4|}.$$

Anmerkung: der Grenzwert c der Folge (c_n) geht in die Lösung gar nicht ein. Die Berechnung von c ist überflüssig und dient nur als nützliche Übung für diejenigen, die nicht gemerkt haben, dass man den Wert von c gar nicht braucht.

Aufgabe 43: (Die Exponentialreihe. Einfacher Beweis)

Beweise mit Hilfe des Cauchy-Produkts der Reihen für e^x und e^y die Funktionalgleichung $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ der Exponentialfunktion.

Hilfestellung: verwende den Binomischen Lehrsatz $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}$.

Musterlösung:

Die Koeffizienten c_n des Cauchy-Produkts

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!}$$

sind durch

$$c_n = \sum_{\substack{i,j \\ i+j=n}} \frac{x^i}{i!} \cdot \frac{y^j}{j!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \cdot \frac{y^{n-i}}{(n-i)!} = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{n! \cdot x^i \cdot y^{n-i}}{i! \cdot (n-i)!} = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot x^i \cdot y^{n-i} = \frac{(x+y)^n}{n!}$$

gegeben, also

$$e^x \cdot e^y = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = e^{x+y}.$$

Aufgabe 44: (Die Exponentialreihe)

Es geht um die numerische Auswertung der Exponentialfunktion mittels Gleitpunktarithmetik.

a) (Technisch anspruchsvoll) Sei x eine reelle Gleitpunktzahl mit $|x| \le \frac{1}{2}$. Wieviele Reihenglieder der Exponentialreihe $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ müssen aufaddiert werden, damit $|e^x - S_n(x)| \le \frac{|e^x|}{10^{16}}$ garantiert werden kann? (Diese Bedingung besagt, dass $S_n(x)$ die ersten 16 Dezimalstellen von e^x korrekt approximiert.)

b) Berechne mittels MuPAD einige Partialsummen der Exponentialreihe für $x = -123.456$ mit `DIGITS` $= 16$ und vergleiche mit dem von der Systemfunktion `exp` gelieferten Wert. Gelingt es, durch die Partialsummen eine Approximation dieses Wertes zu erreichen? Erklärung?

Relevante MuPAD Funktionen: `exp, _plus, $`.

c) Wie kann a) für $|x| > \frac{1}{2}$ verwendet werden? Benutze die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion, um trotz des Desasters in b) über die Exponentialreihe zu einer Approximation von $e^{-123.456}$ zu gelangen, in der die führenden Dezimalstellen korrekt sind.

Musterlösung:
Aus der Reihendarstellung ist unmittelbar klar, dass e^x monoton wachsend in x ist.
a) Wegen der Monotonie gilt für reelles x mit $|x| \leq \frac{1}{2}$

$$0.6065 \approx e^{-\frac{1}{2}} \leq e^x.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
|e^x - S_n(x)| &= \Big| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \Big| = \Big| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \Big| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k \cdot k!} = \frac{1}{2^{n+1} \cdot (n+1)!} + \frac{1}{2^{n+2} \cdot (n+2)!} + \cdots \\
&\leq \frac{1}{2^{n+1} \cdot (n+1)!} \cdot \Big(1 + \frac{1}{2 \cdot (n+2)} + \frac{1}{4 \cdot (n+2) \cdot (n+3)} + \cdots\Big) \\
&\leq \frac{1}{2^{n+1} \cdot (n+1)!} \cdot \Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\Big) = \frac{2}{2^{n+1} \cdot (n+1)!} = \frac{1}{2^n \cdot (n+1)!}.
\end{aligned}$$

Durch Ausprobieren findet man folgende Werte:

n	5	10	11	12	13	14
$\frac{1}{2^n \cdot (n+1)!}$	$4.3 \cdot 10^{-5}$	$2.4 \cdot 10^{-11}$	$1.0 \cdot 10^{-12}$	$3.9 \cdot 10^{-14}$	$1.4 \cdot 10^{-15}$	$4.7 \cdot 10^{-17}$

Damit reicht $n = 14$, um

$$|e^x - S_n(x)| \leq \frac{4.7}{10^{17}} \leq \frac{0.6065}{10^{16}} \leq \frac{e^x}{10^{16}}$$

garantieren zu können.
b) Numerisches Experiment:

```
>> DIGITS:= 16:
>> x:=-123.456:
>> _plus(x^k/k! $ k= 0..100)

                    8.368805809476164e50

>> _plus(x^k/k! $ k= 0..200)

                    9.692087156726235e42

>> _plus(x^k/k! $ k= 0..400)

                    -6.490160608451007e32

>> _plus(x^k/k! $ k= 0..800)

                    -6.490160608451007e32

>> _plus(x^k/k! $ k= 0..1600)

                    -6.490160608451007e32
```

Der wirkliche Wert ist:

```
>> exp(-123.456)

                    2.419582541264601e-54
```

Der Grund für dieses katastrophale Verhalten der numerischen Partialsummen ist „Auslöschung“: riesige Summanden mit wechselnden Vorzeichen sollen sich zuletzt fast vollständig aufheben und ein sehr kleines Endergebnis liefern. Hier sind einige der Summanden:

$$\frac{x^{123}}{123!} = -1.48441946501462... \cdot 10^{52}, \quad \frac{x^{124}}{124!} = 1.477907173168104... \cdot 10^{52}.$$

Bei diesen Zahlen müssten mehr als 106 der führenden Dezimalstellen genau sein, damit die 54-te Nachkommastelle des Endergebnisses (die erste führende Ziffer von $e^{-123.456}$) korrekt sein kann. Wir benutzen aber nur 16 Dezimalstellen Genauigkeit!

c) Die Idee ist, mit

$$e^x = \left(e^{\frac{x}{2^n}}\right)^{(2^n)}$$

die Exponentialreihe mit hinreichend grossem n für *kleine* Argumente $\frac{x}{2^n}$ auszuwerten. Das Ergebnis kann dann per Repeated Squaring schnell zu e^x potenziert werden. Für $x = -123.456$ wähle $2^n = 256$, so dass $|\frac{x}{2^n}| = 0.48225 \le \frac{1}{2}$ gilt. Nach a) kann $e^{x/2^n}$ durch die Partialsumme S_{14} der Exponentialreihe auf 16 Dezimalstellen genau approximiert werden;

$$e^{-123.456/256} \approx \sum_{k=0}^{14} \frac{(-123.456/256)^k}{k!} = 0.6173926942959764...$$

Damit ergibt sich

$$e^{-123.456} \approx (0.6173926942959764...)^{256} = 2.419582541264614 \cdot 10^{-54}.$$

Dieses Ergebnis ist korrekt bis auf die letzten beiden der angegebenen Ziffern (das Potenzieren verstärkt den Approximationsfehler durch S_{14} etwas).
