Übungsblatt 5

Lösungen von $*$-Aufgaben sind per Web-Formular unter `http://math-www.upb.de/~walter` ($\longrightarrow$ Lehre SS 05 $\longrightarrow$ Übungen) bis spätestens Do, 19.5.05, abzuliefern.
Lösungen von $**$-Aufgaben sind schriftlich abzugeben. Sie werden zu Beginn der Vorlesung am Mi, 18.5.05 eingesammelt.

Aufgabe 32: (Folgen, Konvergenz. Das geometrisch-arithmetische Mittel)
Sei $0 < x < y$.

a) Zeige $x < \sqrt{x \cdot y} < \dfrac{x+y}{2} < y$.

Definiere $x_1 = x$, $y_1 = y$ und dann rekursiv $x_{n+1} = \sqrt{x_n \cdot y_n}$, $\quad y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$.

b) Zeige, dass (x_n) streng monoton steigend und dass (y_n) streng monoton fallend ist.

c) Zeige, dass $(y_n - x_n)$ eine Nullfolge ist.

d) Folgere, dass (x_n) und (y_n) gegen den selben Grenzwert konvergieren.

Man nennt diesen Grenzwert das **„geometrisch-arithmetische Mittel“** von x und y.

e) Berechne für $x = 1$, $y = 2$ die ersten 5 Intervalle $[x_n, y_n]$. Wie schnell nehmen die Intervalllängen $y_n - x_n$ ab?

f) (Etwas anspruchsvoller) Sei $x \geq 1$.
   i) Zeige: $\sqrt{x_n} + \sqrt{y_n} \geq 1$ für alle n,
   ii) Folgere: $\sqrt{y_n} - \sqrt{x_n} \leq y_n - x_n$ für alle n,
   iii) Folgere: $y_{n+1} - x_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} \cdot (y_n - x_n)^2$.
   Wieso erklärt iii) die in e) beobachtete schnelle Konvergenz?

Musterlösung:
a) Mit $0 < x < y$ gilt

$$x = \sqrt{x^2} < \sqrt{x \cdot y}, \quad \frac{x+y}{2} < \frac{y+y}{2} = y.$$

Weiterhin gilt

$$\sqrt{x \cdot y} < \frac{x+y}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot y < \frac{(x+y)^2}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 4 \cdot x \cdot y < x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2 = (x-y)^2,$$

wobei letztere Ungleichung sicherlich gültig ist.

b) Folgt unmittelbar aus a):

$$x_n < \underbrace{\sqrt{x_n \cdot y_n}}_{x_{n+1}} < \underbrace{\frac{x_n + y_n}{2}}_{y_{n+1}} < y_n.$$

c) Es gilt

$$y_n - x_n = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2} - \sqrt{x_{n-1} \cdot y_{n-1}} \leq \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2} - x_{n-1} = \frac{y_{n-1} - x_{n-1}}{2}.$$

Mit dieser rekursiven Beziehung folgt

$$y_n - x_n \leq \frac{y_{n-1} - x_{n-1}}{2} \leq \frac{y_{n-2} - x_{n-2}}{4} \leq \ldots \leq \frac{y_1 - x_1}{2^{n-1}}.$$

Damit ist $(y_n - x_n)$ eine Nullfolge.
d) Da (x_n) monoton wächst und nach oben durch $x_n < y_n < y$ beschränkt ist, konvergiert (x_n) gegen einen Grenzwert x^*. Da (y_n) monoton fällt und nach unten durch $x < x_n < y_n$ beschränkt ist, konvergiert (y_n) gegen einen Grenzwert y^*. Wegen

$$y^* - x^* = \lim_{n\to\infty} y_n - \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (y_n - x_n) = 0$$

stimmen diese Grenzwerte überein.
e) Für $x = 1$, $y = 2$ erhält man die Werte:

$$\begin{array}{lll}
x_1 = \underline{1}.0, & y_1 = 2.0, & y_1 - x_1 = 1.0, \\
x_2 = \underline{1.4}14213562, & y_2 = \underline{1}.5, & y_2 - x_2 = 0.085..., \\
x_3 = \underline{1.456}475315, & y_3 = \underline{1.45}7106781, & y_3 - x_3 = 0.00063..., \\
x_4 = \underline{1.45679101}4, & y_4 = \underline{1.45679104}8, & y_4 - x_4 = 0.000000034..., \\
x_5 = \underline{1.456791031}, & y_5 = \underline{1.456791031}, & y_5 - x_5 = 1.00... \cdot 10^{-16}.
\end{array}$$

Die unterstrichenen Stellen stimmen mit denen des Grenzwerts überein. Die Folgen (x_n), (y_n) konvergieren offensichtlich sehr schnell.
f) i) Es gilt $1 \leq x < x_n < y_n$ für alle Indizes, womit sicherlich

$$\sqrt{x_n} + \sqrt{y_n} \geq 1$$

folgt.
ii) Aus $\sqrt{x_n} + \sqrt{y_n} \geq 1$ folgt:

$$\sqrt{y_n} - \sqrt{x_n} \leq (\sqrt{y_n} - \sqrt{x_n}) \cdot (\sqrt{y_n} + \sqrt{x_n}) = y_n - x_n.$$

iii) Es folgt

$$\begin{aligned}
y_{n+1} - x_{n+1} &= \frac{x_n + y_n}{2} - \sqrt{x_n \cdot y_n} = \frac{\sqrt{x_n}^2 + \sqrt{y_n}^2}{2} - \sqrt{x_n} \cdot \sqrt{y_n} \\
&= \frac{\sqrt{x_n}^2 - 2 \cdot \sqrt{x_n} \cdot \sqrt{y_n} + \sqrt{y_n}^2}{2} = \frac{(\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n})^2}{2} \leq \frac{(y_n - x_n)^2}{2}.
\end{aligned}$$

Dies erklärt die schnelle Konvergenz: Ist der Abstand der Folgenglieder y_n und x_n erst einmal klein, ist der nächste Abstand durch Quadrarieren *wesentlich* kleiner usw.

Aufgabe 33:** (O–Kalkül; 5 + 5 Bonuspunkte)
Diese Aufgabe kann schriftlich bearbeitet werden. Bearbeitungen werden zu Beginn der Vorlesung am Mi, 18.5.05, eingesammelt.

Zeige: für $n \to \infty$ gilt

$$a) \quad \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n} = O\Big(\frac{1}{n^3}\Big), \qquad b) \quad \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n} = \frac{2}{n^3} + O\Big(\frac{1}{n^5}\Big).$$

Musterlösung:
a)

$$\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n} = \frac{(n+1)\cdot n + (n-1)\cdot n - 2\cdot(n+1)\cdot(n-1)}{(n-1)\cdot(n+1)\cdot n}$$
$$= \frac{n^2+n+n^2-n-2\cdot(n^2-1)}{n\cdot(n^2-1)} = \frac{2}{n\cdot(n^2-1)}.$$

Offensichtlich ist

$$\frac{2/(n\cdot(n^2-1))}{1/n^3} = \frac{2\cdot n^3}{n^3-1}$$

beschränkt (denn diese Folge hat den Grenzwert 2 für $n \to \infty$). Damit gilt

$$\frac{2}{n\cdot(n^2-1)} = O\Big(\frac{1}{n^3}\Big).$$

b) Mit a) ergibt sich

$$\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} = \frac{2}{n\cdot n^2-1)} - \frac{2}{n^3} = \frac{2\cdot n^3 - 2\cdot(n^3-n)}{n^4\cdot(n^2-1)}$$
$$= \frac{2\cdot n}{n^4\cdot(n^2-1)} = \frac{2}{n^3\cdot(n^2-1)} = \frac{2}{n^5\cdot(1-\frac{1}{n^2})}.$$

Dieser Ausdruck ist $O\Big(\frac{1}{n^5}\Big)$, denn

$$\frac{2/(n^5\cdot(1-\frac{1}{n^3}))}{1/n^5} = \frac{2}{1-\frac{1}{n^2}}$$

ist beschränkt (da konvergent).

Aufgabe 34: (O–Kalkül)
a) Zeige: wenn $f(n) = o(g(n))$ gilt, dann gilt auch $f(n) = O(g(n))$.
b) Sei $k \in \mathbb{Z}$. Wenn $f(n) = o(n^k)$ gilt, folgt dann automatisch $f(n) = O(n^{k-1})$?
c) Sei $k \in \mathbb{Z}$. Wenn $f(n) = o(n^k)$ gilt, folgt dann automatisch $f(n) = o(n^{k+1})$?
d) Seien $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Zeige $O(n^{k_1}) \cdot O(n^{k_2}) = O(n^{k_1+k_2})$.

Musterlösung:
a) $f(n) = o(g(n))$ heißt, dass die Folge $f(n)/g(n)$ eine Nullfolge ist und damit automatisch beschränkt ist. Also gilt auch $f(n) = O(g(n))$.
b) Gegebenbeispiel: Es gilt

$$f(n) = \frac{1}{n \cdot \sqrt{n}} = o\Big(\frac{1}{n}\Big),$$

denn

$$\frac{1/(n \cdot \sqrt{n})}{1/n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ist eine Nullfolge. Es gilt aber nicht $f(n) = O(1/n^2)$, denn

$$\frac{1/(n \cdot \sqrt{n})}{1/n^2} = \sqrt{n}$$

ist unbeschränkt.
c) Wenn $f(n) = o(n^k)$, ist

$$\frac{f(n)}{n^k}$$

eine Nullfolge. Damit ist

$$\frac{f(n)}{n^{k+1}} = \frac{f(n)}{n^k} \cdot \frac{1}{n}$$

erst recht eine Nullfolge, also gilt in der Tat automatisch $f(n) = o(n^{k+1})$.
d) $f_1(n) = O(n^{k_1})$ bzw. $f_2(n) = O(n^{k_2})$ bedeuten, dsss

$$\frac{f_1(n)}{n^{k_1}} \quad \text{und} \quad \frac{f_2(n)}{n^{k_2}}$$

beschränkt sind. Damit folgt, daß

$$\frac{f_1(n) \cdot f_2(n)}{n^{k_1} \cdot n^{k_2}} = \frac{f_1(n) \cdot f_2(n)}{n^{k_1+k_2}}$$

beschränkt ist. Also gilt $f_1(n) \cdot f_2(n) = O(n^{k_1+k_2})$. Dies ist mit $O(n^{k_1}) \cdot O(n^{k_2}) = O(n^{k_1+k_2})$ gemeint.

Aufgabe 35*: (Geometrische Reihen, 10 Bonuspunkte)

Seien M_1, M_2, M_3 Zahlen (die von `hex` zufällig gewählt werden). Berechne $\displaystyle\sum_{k=M_3}^{\infty} \frac{1}{M_1^{M_2 \cdot k}}$.

Musterlösung:
Sei

$$c := \frac{1}{M_1^{M_2}} \in (0,1).$$

Gefragt ist

$$\sum_{k=M_3}^{\infty} c^k = \sum_{k=0}^{\infty} c^k - \sum_{k=0}^{M_3-1} c^k = \frac{1}{1-c} - \frac{1-c^{M_3}}{1-c} = \frac{c^{M_3}}{1-c} = \frac{1 \;/\; M_1^{M_2 \cdot M_3}}{1 - 1 \;/\; M_1^{M_2}}$$

$$= \frac{1}{M_1^{M_2 \cdot M_3}} \cdot \frac{M_1^{M_2}}{M_1^{M_2} - 1} = \frac{1}{M_1^{M_2 \cdot (M_3 - 1)}} \cdot \frac{1}{M_1^{M_2} - 1} = \frac{1}{M_1^{M_2 \cdot M_3} - M_1^{M_2 \cdot (M_3 - 1)}}.$$

Mit MuPAD:

```
>> M1:= 3: M2:= 5: M3:= 8:
>> sum(1/ M1^(M2*k), k = M3..infinity)

                    1/12107633913957929094

>> 1/ ( M1^(M2*M3)- M1^(M2*(M3 - 1)) )

                    1/12107633913957929094
```

Aufgabe 36: (Reihen, p-adische Darstellung)
Sei $p \in \{2, 3, 4, \ldots\}$. Mit der sogenannten „$p$-adischen Darstellung“

$$b_k \, b_{k-1} \, \ldots \, b_1 \, b_0 \, . \, b_{-1} \, b_{-2} \, b_{-3} \, \ldots$$

ist die Zahl $\sum\limits_{j \leq k} b_j \cdot p^j$ gemeint, wobei $b_j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ die „Ziffern zur Basis p“ genannt werden. (Für $p = 10$ sind dies die wohlbekannten Dezimalziffern, für $p = 2$ die Binärziffern (Bits) $b_j \in \{0, 1\}$.)

a) Berechne die rationale Zahl, die im Binärsystem durch die periodische Entwicklung

$$1011\,.\,1100\,\overline{10} \quad (= 1011\,.\,1100\,10\,10\,10\,10\ldots)$$

gegeben ist.

b) (Erinnerung an die Mathe I) Gegeben sei eine reelle Zahl $0 < x < 1$. Gib einen Algorithmus, an, welcher die Ziffern von x zur Basis p berechnet. Verwende als Hilfsmittel nur die sogenannte „Gauss-Klammer“ $\lfloor y \rfloor$ = die größte ganze Zahl $\leq y$. (In einigen Hochsprachen steht diese Funktion z.B. als `trunc` zur Verfügung.)

Musterlösung:

a)

$$
\begin{aligned}
& 1011\,.\,1100\,10\,10\,10\,10\ \ldots \\
= \;& 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 + 1\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2} + 0\cdot 2^{-3} + 0\cdot 2^{-4} \\
& +1\cdot 2^{-5} + 0\cdot 2^{-6} + 1\cdot 2^{-7} + 0\cdot 2^{-8} + 1\cdot 2^{-9} + 0\cdot 2^{-10} + \cdots \\
= \;& 2^3 + 2^1 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + \left(2^{-5} + 2^{-7} + 2^{-9} + \cdots\right) \\
= \;& 8 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2^5}\cdot\left(1 + 2^{-2} + 2^{-4} + \cdots\right) \\
= \;& 8 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2^5}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k \\
= \;& \frac{47}{4} + \frac{1}{32}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} \\
= \;& \frac{47}{4} + \frac{1}{32}\cdot\frac{4}{3} \\
= \;& \frac{283}{24}.
\end{aligned}
$$

b) Die Ziffern müssen aus der Menge $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ sein. Die Idee, an die einzelnen Ziffern zu gelangen, ist: schiebe die Ziffer durch Multiplikation mit einer p-Potenz vor den „Dezimalpunkt“ und schneide die Nachpunktziffern mittels $\lfloor\ \rfloor$ ab:

$$
\begin{aligned}
b_{-1} &= \lfloor p\cdot x\rfloor, & x &= 0\,.\,b_{-1}\,b_{-2}\,b_{-3}\,b_{-4}\,b_{-5}\ldots \\
b_{-2} &= \left\lfloor p^2\cdot\left(x-\frac{b_{-1}}{p}\right)\right\rfloor, & x-\tfrac{b_{-1}}{p} &= 0\,.\,0\,b_{-2}\,b_{-3}\,b_{-4}\,b_{-5}\ldots \\
b_{-3} &= \left\lfloor p^3\cdot\left(x-\frac{b_{-1}}{p}-\frac{b_{-2}}{p^2}\right)\right\rfloor, & x-\tfrac{b_{-1}}{p}-\tfrac{b_{-2}}{p^2} &= 0\,.\,0\,0\,b_{-3}\,b_{-4}\,b_{-5}\ldots \\
b_{-4} &= \left\lfloor p^4\cdot\left(x-\frac{b_{-1}}{p}-\frac{b_{-2}}{p^2}-\frac{b_{-3}}{p^3}\right)\right\rfloor, & x-\tfrac{b_{-1}}{p}-\tfrac{b_{-2}}{p^2}-\tfrac{b_{-3}}{p^3} &= 0\,.\,0\,0\,0\,b_{-4}\,b_{-5}\ldots
\end{aligned}
$$

usw, also:

```
b[-1]:= trunc(p*x);
i:= -1;
repeat
  x:= x - b[-i]/p^(i);
  i:= i + 1;
  b[-i]:= trunc(p^i*x);
until x = 0 end_repeat;
```

Hierbei ist durch Induktion leicht zu zeigen, dass

$$
y := x - \frac{b_{-1}}{p} - \frac{b_{-2}}{p^2} - \cdots - \frac{b_{-i}}{p^i} = 0\,.\,0\,0\ \ldots\ 0\,b_{-i-1}\,b_{-i-2}\ \ldots \in \left[0, \frac{1}{p^i}\right)
$$

gilt, so dass die Ziffern $b_{-i-1} = \lfloor p^{i+1}\cdot y\rfloor$ in der Menge $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ liegen.

Aufgabe 37*: (p-adische Darstellung. 10 Bonuspunkte)
Seien $M_1, \ldots, M_6$ ganze Zahlen ("Ziffern") aus $\{0, 2, \ldots, 15\}$ (die von `hex` zufällig gewählt werden). Welche rationale Zahl wird durch folgende periodische Hexadezimalzahl (Basis $p = 16$) dargestellt:

$$M_1\,M_2\,.\,M_3\,M_4\,\overline{M_5\,M_6} \quad (= M_1\,M_2\,.\,M_3\,M_4\;M_5\,M_6\;M_5\,M_6\;M_5\,M_6\;\ldots)\;?$$

Anleitung: Aufgabe 36.

Musterlösung:

$$\begin{aligned}
&M_1\,M_2\,.\,M_3\,M_4\,\overline{M_5\,M_6}\\
&= M_1 \cdot p^1 + M_2 \cdot p^0 + \frac{M_3}{p} + \frac{M_4}{p^2} + M_5 \cdot \Big(\frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^5} + \frac{1}{p^7} + \cdots\Big) + M_6 \cdot \Big(\frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^6} + \frac{1}{p^8} + \cdots\Big)\\
&= M_1 \cdot p + M_2 + \frac{M_3}{p} + \frac{M_4}{p^2} + M_5 \cdot \frac{1}{p^3} \cdot \Big(1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} + \cdots\Big) + M_6 \cdot \frac{1}{p^4} \cdot \Big(1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} + \cdots\Big)\\
&= M_1 \cdot p + M_2 + \frac{M_3}{p} + \frac{M_4}{p^2} + \Big(\frac{M_5}{p^3} + \frac{M_6}{p^4}\Big) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{p^2}\Big)^k\\
&= M_1 \cdot p + M_2 + \frac{M_3}{p} + \frac{M_4}{p^2} + \Big(\frac{M_5}{p^3} + \frac{M_6}{p^4}\Big) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p^2}}\\
&= M_1 \cdot p + M_2 + \frac{M_3}{p} + \frac{M_4}{p^2} + \Big(\frac{M_5}{p^3} + \frac{M_6}{p^4}\Big) \cdot \frac{p^2}{p^2 - 1}.
\end{aligned}$$

Z.B. für $M_1 M_2 ... M_6 = 3456780$:

$$34.56\,\overline{80} = 3 \cdot 16 + 4 + \frac{5}{16} + \frac{6}{16}^{2} + \Big(\frac{8}{16^3} + \frac{0}{16^4}\Big) \cdot \frac{16^2}{16^2 - 1} = \frac{1708309}{32640}.$$

Aufgabe 38*: (p-adische Darstellung. 10 Bonuspunkte)
Sei M eine Zahl (die von `hex` zufällig gewählt wird). Berechne die ersten 10 Ziffern $b_{-1}, \ldots, b_{-10} \in \{0, 1, \ldots, 6\}$ zur Basis $p = 7$ von

$$\frac{1}{\sqrt{M}} = 0\,.\,b_{-1}\,b_{-2}\,b_{-3}\;\ldots.$$

Anleitung: Aufgabe 36.b)
(MuPAD-Hilfsmittel: `trunc`. Für Schleifen siehe `for, repeat` oder `while`.)
Mit der MuPAD-Funktion `numlib::g_adic` kann das Ergebnis überprüft werden.

Musterlösung:
Für $M = 13$, also $x = 1/\sqrt{13}$, $p = 7$:

```
x:= 1/sqrt(13):
p:= 7:
b[-1]:= trunc(p*x);
i:= 1;
repeat
  x:= x - b[-i]/p^i;
  i:= i + 1;
  b[-i]:= trunc(p^i*x);
until i = 10 end_repeat:
b[-i] $ i=1..10
```

```
                 1, 6, 4, 0, 6, 2, 6, 5, 0, 6
```

Probe:

```
float(1/sqrt(13))
                         0.2773500981
```

```
float(_plus(b[-i]/7^i $ i=1..10))

                         0.277350098
```

Eine weitere Probe: die Ziffern bleiben erhalten, wenn man mit irgendeiner Potenz von p multipliziert. Die Funktion `numlib::g_adic` akzeptiert eine ganze Zahl und berechnet die Ziffern bzgl. einer Basis:

```
numlib::g_adic(trunc(p^10*1/sqrt(13)), p)

                [6, 0, 5, 6, 2, 6, 0, 4, 6, 1]
```

Die Ziffern müssen hierbei von rechts nach links gelesen werden; mit `revert` wird die Liste umgeordnet:

```
revert(%)
                [1, 6, 4, 0, 6, 2, 6, 5, 0, 6]
```
