MATHE II FÜR INFORMATIKER
WALTER OEVEL

Sommersemester 05
3. 5. 2005

Übungsblatt 4

Lösungen von $*$-Aufgaben sind per Web-Formular unter `http://math-www.upb.de/~walter` ($\longrightarrow$ Lehre SS 05 $\longrightarrow$ Übungen) bis spätestens Do, 12.5.05, abzuliefern.
Lösungen von $**$-Aufgaben sind schriftlich abzugeben. Sie werden zu Beginn der Vorlesung am Mi, 11.5.05 eingesammelt.

Aufgabe 22: (Folgen, Grenzwerte. Einfacher Beweis.)
Sei (z_n) eine konvergente komplexe Folge. Zeige, dass die Menge $\{|z_n|, n \in \mathbb{N}\}$ nach oben beschränkt ist.

Musterlösung:
Sei z^* der Grenzwert. Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $N(\epsilon)$, so dass $|z_n - z^*| \leq \epsilon$ gilt für alle $n \geq N(\epsilon)$, also $|z_n| \leq |z^*| + \epsilon$. Speziell für $\epsilon = 1$ folgt also

$$|z_n| \leq |z^*| + 1 \text{ für alle } n \geq N(1).$$

Der „Folgenschwanz“ ab $N(1)$ ist damit beschränkt. Der Folgenanfang bis $N(1)$ besteht nur aus endlich vielen Werten, deren Beträge ein Maximum haben. Eine obere Schranke für $|z_n|$ ist damit durch

$$\max(\max\{|z_n|; 1 \leq n < N(1)\},\ |z^*| + 1\}$$

gegeben.

Aufgabe 23: (Folgen, Grenzwerte. Einfacher Beweis.)
Die komplexe Folge (z_n) konvergiere gegen z^*. Zeige, dass die komplex-konjugierte Folge $(\overline{z_n})$ gegen $\overline{z^*}$ konvergiert.

Musterlösung:
Es gilt $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = |\overline{z}|$. Zu $\epsilon > 0$ existiert ein $N(\epsilon)$, so dass $|z_n - z^*| \leq \epsilon$ gilt für alle $n \geq N(\epsilon)$. Alle dieses Folgenglieder erfüllen auch

$$|\overline{z_n} - \overline{z^*}| = |\overline{z_n - z^*}| = |z_n - z^*| \leq \epsilon,$$

d.h., $(\overline{z_n})$ konvergiert gegen $\overline{z^*}$.

Aufgabe 24: (Folgen, Grenzwerte. Beweise.)
Seien (x_n) und (y_n) konvergente reelle Folgen mit den Grenzwerten x^* bzw. y^*.

a) Es gelte $x_n \leq y_n$ für alle Indizes. Zeige: $x^* \leq y^*$. (Indirekter Beweis.)

b) Es gelte $x_n < y_n$ für alle Indizes. Gilt immer $x^* < y^*$? (Finde ein Gegenbeispiel.)

Musterlösung:
a) Angenommen, es gilt $x^* > y^*$. Betrachte $\epsilon = (x^* - y^*)/3 > 0$. Zu diesem ϵ gibt es Folgenglieder x_n bzw. y_n mit

$$|x_n - x^*| \leq \epsilon, \quad |y_n - y^*| \leq \epsilon,$$

also

$$x^* - \epsilon \leq x_n \leq y_n \leq y^* + \epsilon \quad \Rightarrow \quad x^* - y^* \leq 2 \cdot \epsilon.$$

Für das konkrete $\epsilon = (x^* - y^*)/3$ folgt der Widerspruch

$$x^* - y^* \leq \frac{2}{3} \cdot (x^* - y^*).$$

b) Gegenbeispiel: $x_n = 1$, $y_n = 1 + 1/n$ mit $x_n < y_n$ für alle n, aber $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1 = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Aufgabe 25: (Folgen, Grenzwerte. Einfacher Beweis)
Sie (z_n) eine konvergente Folge. Zeige durch einen formal sauberen Beweis, dass für jedes (fixierte) $k \in \mathbb{N}$ die „verschobenen" Folgen (z_{n+k}) gegen den selben Grenzwert konvergieren.

Musterlösung:
$(z_n) \to z^*$ bedeutet, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon)$ gibt, so dass $|z_n - z^*| \leq \epsilon$ gilt für alle Indizes $n \geq N(\epsilon)$. Betrachte nun (z_{n+k}). Zu gegebenem $\epsilon > 0$ setze $N^{(k)}(\epsilon) = N(\epsilon) - k$. Dann gilt für alle $n \geq N^{(k)}(\epsilon)$, also $n + k \geq N(\epsilon)$:

$$|z_{n+k} - z^*| \leq \epsilon.$$

Dies ist die Konvergenz von (z_{n+k}) gegen z^*.

Aufgabe 26: (Folgen, Grenzwerte)
Bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!}$.

Musterlösung:
Es gilt

$$0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \overbrace{2 \cdot 2 \ldots \cdot 2}^{n-2}}{1 \cdot 2 \cdot \underbrace{3 \cdot 4 \ldots \cdot n}_{n-2}} < \frac{2 \cdot 2 \cdot \overbrace{2 \cdot 2 \ldots \cdot 2}^{n-2}}{1 \cdot 2 \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \ldots \cdot 3}_{n-2}} = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Bekanntlich bildet $(2/3)^n$ eine Nullfolge (Beispiel 2.10 der Vorlesung). Per Intervallschachtelung (Satz 2.17 der Vorlesung) folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0$.

Aufgabe 27:** (Folgen, Grenzwerte. Intervallschachtelung. 10 Bonuspunkte)
Diese Aufgabe kann schriftlich bearbeitet werden. Bearbeitungen werden zu Beginn der Vorlesung am Mi, 11.5.05, eingesammelt.

Bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n}$.

Anleitung: Satz 2.17. Es gilt $5^n < 3^n + 5^n < 2 \cdot 5^n$.

Musterlösung:
Der Anleitung folgend:

$$5^n < 3^n + 5^n < 2 \cdot 5^n \quad \Rightarrow \quad 5 < \sqrt[n]{3^n + 5^n} < \sqrt[n]{2} \cdot 5.$$

Bekanntlich konvergiert $\sqrt[n]{2}$ gegen 1 (Beispiel 2.19 der Vorlesung). Per Intervallschachtelung (Satz 2.17 der Vorlesung) folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n} = 5$.

Aufgabe 28*: (Intervallschachtelung, 10 Bonuspunkte)
Seien M_1, M_2 positive Zahlen (die von `hex` zufällig gewählt werden). Bestimme:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{M_1^n + M_2^n}.$$

Anleitung: Siehe Aufgabe 27.

Musterlösung:
Gilt $M_1 \geq M_2$, so folgt analog zu Aufgabe 27

$$M_1^n \leq M_1^n + M_2^n \leq 2 \cdot M_1^n$$

und der Grenzwert ergibt sich analog zu Aufgabe 27 als M_1. Gilt $M_1 \leq M_2$, so folgt analog zu Aufgabe 27

$$M_2^n \leq M_1^n + M_2^n \leq 2 \cdot M_2^n,$$

und der Grenzwert ergibt sich analog zu Aufgabe 27 als M_2. Zusammengefasst ist der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{M_1^n + M_2^n} = \max(M_1, M_2).$$

Aufgabe 29$**$: (Konvergenz monotoner Folgen, 10 Bonuspunkte)
Diese Aufgabe kann schriftlich bearbeitet werden. Bearbeitungen werden zu Beginn der Vorlesung am Mi, 11.5.05, eingesammelt.

Betrachte die durch $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$, $x_1 = 0$ definierte Folge.

a) Zeige, dass (x_n) streng monoton wachsend ist.

b) Zeige per Induktion: $0 \leq x_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) Bestimme den Grenzwert von (x_n).

Musterlösung:
a) Behauptung: $x_n < x_{n+1}$. Induktionsstart: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, also $x_1 < x_2$. Induktionsschritt $n-1 \to n$: Sei $x_n > x_{n-1}$. Es folgt

$$x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n} > \sqrt{1 + x_{n-1}} = x_n.$$

b) Behauptung: $x_n < 2$. Induktionsstart: $x_1 = 0 < 2$. Induktionsschritt: Sei $x_n < 2$. Es folgt

$$x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n} < \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3} < 2.$$

c) Sei x^* der Grenzwert. Es muß gelten:

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^* = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + x_n} = \sqrt{1 + \lim_{n\to\infty} x_n} = \sqrt{1 + x^*}$$

$$\Rightarrow \quad (x^*)^2 = 1 + x^* \quad \Rightarrow \quad x^* = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Nur der positive Wert $x^* = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ kommt als Grenzwert in Frage.

Aufgabe 30*: (Intervallschachtelung, 10 Bonuspunkte)
Sei M eine Zahl (die von `hex` zufällig gewählt wird). Betrachte die durch $x_{n+1} = \sqrt{M + 2 \cdot x_n}$, $x_1 = 1$ definierte Folge. Ermittle eine obere Schranke für die Folgenglieder und berechne den Grenzwert.
Anleitung: siehe Aufgabe 29.

Musterlösung:
Analog zu Aufgabe 29.a) ergibt sich die Monotonie unmittelbar durch Induktion. Jede Konstante K, die größer als der berechnete Grenzwert ist, ist eine obere Schranke (wegen der Monotonie). In der Tat liefert Induktion sofort den Beweis, dass z.B. M ($> 1 + \sqrt{1 + M}$) für alle alle von `hex` gewählten Zahlen M eine obere Schranke ist:

$$x_n \le M \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = \sqrt{M + 2 \cdot x_n} \le \sqrt{M + 2 \cdot M} = \sqrt{3 \cdot M} \le M,$$

da alle von `hex` gewählten Zahlen M größer als 3 sind, also $3 \cdot M \le M^2$ gilt. Der Grenzwert x^* ergibt sich aus der Gleichung

$$x^* = \sqrt{M + 2 \cdot x^*} \quad \Rightarrow \quad (x^*)^2 - 2 \cdot x^* - M = 0 \quad \Rightarrow \quad x^* = 1 \pm \sqrt{1 + M}.$$

Nur der positive Wert $1 + \sqrt{1 + M}$ kommt als Grenzwert in Frage.

Aufgabe 31: (Die Fibonacci-Zahlen)
Die Fibonacci-Folge (F_n) ist durch

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad \text{mit} \quad F_0 = 0,\ F_1 = 1$$

definiert. Betrachte die Folge $x_n = F_{n+1}/F_n$, $n \in \mathbb{N}$. Diese Folge konvergiert.

a) Ermittle eine Gleichung für den Grenzwert von (x_n) und berechne ihn.

b) Berechne die ersten 25 Werte $x_1, \ldots, x_{25}$. Wie genau approximiert (rein experimentell) x_{25} den Grenzwert?

c) In welcher Größenordnung liegt F_{10^7} (wieviele Dezimalstellen hat diese Zahl ungefähr)? Eine grobe Abschätzung soll hier ausreichen.

Anleitung zu c): Man versuche erst gar nicht, F_{10^7} mittels MuPADs `numlib::fibonacci` exakt zu berechnen. Verwende $F_n = x_{n-1} \cdot F_{n-1} = x_{n-1} \cdot x_{n-2} \cdot F_{n-2} = \ldots$ zusammen mit a) für eine grobe Abschätzung.

Musterlösung:
a) Aus der Rekursion der Fibonacci-Zahlen folgt

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} \quad \Rightarrow \quad x_n = 1 + \frac{1}{x_{n-1}}.$$

Für $x^* = \lim_n x_n$ folgt „wie üblich“ die Gleichung

$$x^* = 1 + \frac{1}{x^*} \quad \Rightarrow \quad (x^*)^2 = x^* + 1 \quad \Rightarrow \quad x^* = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Nur der positive Wert $x^* = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ kommt als Grenzwert in Frage.

b)

```
>> x:= n -> numlib::fibonacci(n+1)/numlib::fibonacci(n):
>> float(x(n)) $ n=1..25

1.0, 2.0, 1.5, 1.666666667, 1.6, 1.625, 1.615384615,

   1.619047619, 1.617647059, 1.618181818, 1.617977528,

   1.618055556, 1.618025751, 1.618037135, 1.618032787,

   1.618034448, 1.618033813, 1.618034056, 1.618033963,

   1.618033999, 1.618033985, 1.61803399, 1.618033988,

   1.618033989, 1.618033989
```

Die ersten 10 Stellen von x_{25} scheinen schon stabil geworden zu sein und mit denen des Grenzwerts übereinzustimmen.

c) Es gilt

$$F_n = x_{n-1} \cdot F_{n-1} = x_{n-1} \cdot x_{n-2} \cdot F_{n-2} = \ldots = \underbrace{x_{n-1} \cdot x_{n-2} \cdot \ldots \cdot x_k}_{n-k} \cdot F_k$$

mit beliebigem $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$. Da (x_n) einigermaßen schnell gegen den Grenzwert x^* strebt, kann man $x^* \approx x_n \approx x_{n-1} \approx \ldots$ setzen und es folgt

$$F_n \approx (x^*)^{n-k} \cdot F_k$$

für jedes „hinreichend große“ k, für das die Näherung $x_k \approx x_{k+1} \approx \ldots \approx x_{n-1} \approx x^*$ gerechtfertigt ist. Wählen wir z.B. $k = 25$ (die betrachteten Folgenglieder $x_{25}, x_{26}, \ldots$ scheinen nach b) alle den Grenzwert auf mindestens 10 Dezimalstellen genau zu approximieren), so erhalten wir:

```
>> x:= float((1 + sqrt(5))/2):
>> k:= 25:
>> x^(10^7 - k)*numlib::fibonacci(k)

                              1.129834378e2089876
```

Also: F_{10^7} hat über 2 Millionen Dezimalstellen.
