Übungsblatt 3

Mit $*$ und $**$ gekennzeichnete Aufgaben können zum Sammeln von Bonuspunkten verwendet werden.
Lösungen von $*$-Aufgaben sind per Web-Formular unter `http://math-www.upb.de/~walter` ($\longrightarrow$ Lehre SS 05 $\longrightarrow$ Übungen) bis spätestens Do, 5.5.05, abzuliefern.
Lösungen von $**$-Aufgaben sind schriftlich abzugeben. Sie werden zu Beginn der Vorlesung am Mi, 4.5.05 eingesammelt.

Aufgabe 15: (Folgen und Grenzwerte)
Konvergieren die angegebenen Folgen für $n \to \infty$? Bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $x_n = 2 - \dfrac{3}{n}$, b) $x_n = \dfrac{2 \cdot n^2}{n^2+1}$, c) $x_n = \dfrac{n^3-1}{n^2+1}$,

d) $x_n = \dfrac{n^3-1}{n^3+1}$, e) $x_n = \dfrac{n^3-1}{n^4+1}$, f) $x_n = \Big(1+\dfrac{2}{n}\Big)^{3\cdot n}$,

g) $x_n = \dfrac{4\cdot n^2-1}{2\cdot n\cdot(n^2+1)}$, h) $x_n = \dfrac{4\cdot n^3-1}{2\cdot n\cdot(n^2+1)}$, i) $x_n = \sqrt{n}\cdot(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

Musterlösung:
Es wird jeweils solange umgeformt und gekürzt, bis nur noch Nullfolgen $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ etc. in den Ausdrücken verbleiben. Dann wird der Limes in den Ausdruck „reingezogen", d.h., diese Nullfolgen werden durch 0 ersetzt:

a)

$$\lim_{n\to\infty}\Big(2-\frac{3}{n}\Big) = \lim_{n\to\infty} 2 \; - \; \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n} = 2 - 3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 2-3\cdot 0 = 2\;.$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot n^2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot n^2}{n^2\cdot\Big(1+\frac{1}{n^2}\Big)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}} = \frac{2}{1+0} = 2.$$

c)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3\cdot\Big(1-\frac{1}{n^3}\Big)}{n^2\cdot\Big(1+\frac{1}{n^2}\Big)} = \lim_{n\to\infty} n\,\frac{1-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} n \;\cdot\; \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \;\cdot\; \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\Big(1-\dfrac{1}{n^3}\Big)}{\lim\limits_{n\to\infty}\Big(1+\dfrac{1}{n^2}\Big)} = \lim_{n\to\infty} n \;\cdot\; \frac{1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}} = \infty \;\cdot\frac{1-0}{1+0} = \infty.$$

d)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3\cdot\Big(1-\frac{1}{n^3}\Big)}{n^3\cdot\Big(1+\frac{1}{n^3}\Big)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\Big(1-\dfrac{1}{n^3}\Big)}{\lim\limits_{n\to\infty}\Big(1+\dfrac{1}{n^3}\Big)}$$

$$= \frac{1 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}}{1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

e)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-1}{n^4+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{n^3}\right)}{n^4 \cdot \left(1 + \frac{1}{n^4}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{1 - \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^4}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^4}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}}{1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}} = 0 \cdot \frac{1-0}{1+0} = 0.$$

f)

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3\cdot n} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n\right)^3 = \left(\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n\right)^3 = \left(e^2\right)^3.$$

Der numerische Wert ist

```
>> float(exp(2))^3
                              403.4287935
```

g)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot n^2 - 1}{2\cdot n \cdot (n^2+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot \left(4 - \frac{1}{n^2}\right)}{n^3 \cdot 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{4 - \frac{1}{n^2}}{2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = 0 \cdot \frac{4-0}{2\cdot(1+0)} = 0.$$

h)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot n^3 - 1}{2\cdot n \cdot (n^2+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 \cdot \left(4 - \frac{1}{n^3}\right)}{n^3 \cdot 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4 - \frac{1}{n^3}}{2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{4-0}{2\cdot(1+0)} = 2.$$

i) Der Trick ist, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ mit $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ zu erweitern, um im Zähler die Wurzeln mittels $(a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2$ „wegquadrieren" zu können:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}^2 - \sqrt{n}^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Damit folgt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} + 1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}} + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 16: (MuPAD)
Lies die MuPAD–Hilfeseite zu `limit` (interaktiv durch `?limit` aufzurufen).

a) Überprüfe mit MuPAD die in Aufgabe 15 ermittelten Grenzwerte.

b) Bestimme den Grenzwert der Folge $x_n = \left(1 + \frac{2}{n^3}\right)^{2 \cdot n^2}$.

c) Lies mit `?!` die MuPAD–Hilfeseite zur (aus der Schule bekannten) Fakultätsfunktion $n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$. Betrachte den Grenzwert der Folge $x_n = n^n/n!$ (den MuPAD nicht berechnen kann). Erzeuge Gleitpunktapproximationen (siehe `?float`) der ersten 10 Folgenglieder und stelle eine Vermutung über die Konvergenzeigenschaft dieser Folge auf!

Musterlösung:
a)

```
>> limit(2 - 3/n, n = infinity)
                                2
>> limit(2*n^2/(n^2 + 1), n = infinity)
                                2
>> limit((n^3 - 1)/(n^2 + 1), n = infinity)
                            infinity
>> limit((n^3 - 1)/(n^3 + 1), n = infinity)
                                1
>> limit((n^3 - 1)/(n^4 + 1), n = infinity)
                                0
>> limit((1 + 2/n)^(3*n), n = infinity)
                              exp(6)
>> limit((4*n^2 - 1)/(2*n*(n^2 + 1)), n = infinity)
                                0
>> limit((4*n^3 - 1)/(2*n*(n^2 + 1)), n = infinity)
                                2
>> limit(sqrt(n)*(sqrt(n+1) - sqrt(n)), n = infinity);
                               1/2
```

b)

```
>> limit((1 + 2/n^3)^(2*n^2), n = infinity)

                          1
```

c) MuPAD kann den Grenzwert nicht bestimmen:

```
>> limit(n^n/n!, n = infinity)

                     /    n                 \
                     |   n                  |
                limit| -------, n = infinity |
                     \ fact(n)              /
```

Gleitpunktapproximationen:

```
>> x := n -> float(n^n/n!):  x(n) $ n = 1..10

     1.0, 2.0, 4.5, 10.66666667, 26.04166667, 64.8, 163.4013889,

             416.1015873, 1067.627009, 2755.731922
```

Vermutung: $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. (Diese Vermutung ist in der Tat richtig.)

Aufgabe 17*: (Grenzwerte, 10 Bonuspunkte)
Seien M_1, M_2, M_3 Zahlen (die von `hex` zufällig gewählt werden). Berechne den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(M_1^2 + \Big(\frac{1+M_3}{n+M_2} + M_1 \cdot i \Big)^2 \right), \quad i = \sqrt{-1}.$$

Relevante MuPAD-Funktionen: `limit`.

Musterlösung:
Es wird solange umgeformt und gekürzt, bis nur noch Nullfolgen $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ etc. in den Ausdrücken verbleiben. Dann wird der Limes in den Ausdruck „reingezogen“, d.h., diese Nullfolgen werden durch 0 ersetzt:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(M_1^2 + \Big(\frac{1+M_3}{n+M_2} + M_1 \cdot i \Big)^2 \right) &= \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(M_1^2 + \frac{(1+M_3)^2}{(n+M_2)^2} + \frac{2 \cdot i \cdot M_1 \cdot (1+M_3)}{n+M_2} - M_1^2 \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n \cdot 1 + M_3)^2}{(n+M_2)^2} + \frac{n \cdot 2 \cdot i \cdot M_1 \cdot (1+M_3)}{n+M_2} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n \cdot (1+M_3)^2}{n^2 \cdot (1+M_2/n)^2} + \frac{n \cdot 2 \cdot i \cdot M_1 \cdot (1+M_3)}{n \cdot (1+M_2/n)} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{(1+M_3)^2}{(1+M_2/n)^2} + \frac{2 \cdot i \cdot M_1 \cdot (1+M_3)}{1+M_2/n} \right) \\
&= 0 \cdot \frac{(1+M_3)^2}{1+0} + \frac{2 \cdot i \cdot M_1 \cdot (1+M_3)}{1+0} \;=\; 2 \cdot i \cdot M_1 \cdot (1+M_3).
\end{aligned}$$

Aufgabe 18: (Rechenregeln für Grenzwerte)
Gegeben seien Folgen (x_n) und (y_n). Die durch $z_n^+ = x_n + y_n$ bzw. $z_n^- = x_n - y_n$ definierten Folgen mögen gegen z^+ bzw. z^- konvergieren. Zeige, daß die Folge $(x_n \cdot y_n)$ konvergiert. Bestimme ihren Grenzwert.

Musterlösung:
Es gilt

$$x_n = \frac{z_n^+ + z_n^-}{2}, \quad y_n = \frac{z_n^+ - z_n^-}{2},$$

also

$$x_n \cdot y_n = \frac{(z_n^+ + z_n^-) \cdot (z_n^+ - z_n^-)}{4} = \frac{(z_n^+)^2 - (z_n^-)^2}{4}.$$

Die Konvergenz von $(x_n \cdot y_n)$ folgt direkt aus den Rechenregeln für konvergierende Folgen, der Grenzwert von $(x_n \cdot y_n)$ ist $\frac{1}{4} \cdot ((z^+)^2 - (z^-)^2)$.

Aufgabe 19$**$: (Folgen und Grenzwerte. 10 Bonuspunkte)
Diese Aufgabe kann schriftlich bearbeitet werden. Bearbeitungen werden zu Beginn der Vorlesung am Mi, 4.5.05, eingesammelt.

Bestimme den Grenzwert von $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ für $n \to \infty$.

Musterlösung:
Es gilt

$$\begin{aligned}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n &= \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Der erste Faktor konvergiert gegen e^{-1}, der zweite gegen 1, also

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

Alternativ:

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e}.$$

Aufgabe 20*: (Rechenregeln für Folgen und Grenzwerte, 10 Bonuspunkte)
Seien M_1, M_2, M_3 Zahlen (die von `hex` zufällig gewählt werden). Betrachte die rekursiv definierte Folge

$$x_{n+1} = \cfrac{1}{M_1 + \cfrac{1}{M_2 + \cfrac{1}{M_3 + x_n}}}$$

mit $x_0 = 1$. Benutze (ohne Beweis), dass diese Folge konvergiert. Bestimme den Grenzwert.
Anleitung: Die Rechenregeln für Grenzwerte liefern eine Gleichung für den Grenzwert.

Musterlösung:
Setzen wir voraus, dass der Grenzwert x^* von (x_n) existiert, so liefern die Rechenregeln

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \cfrac{1}{M_1 + \cfrac{1}{M_2 + \cfrac{1}{M_3 + x_n}}}$$

$$= \frac{1}{M_1 + \frac{1}{M_2 + \frac{1}{M_3 + \lim\limits_{n\to\infty} x_n}}} = \frac{1}{M_1 + \frac{1}{M_2 + \frac{1}{M_3 + x^*}}}.$$

Die rechte Seite ist ein rationaler Ausdruck in x^*. In dieser Musterlösungen verwenden wir einige zusätzliche MuPAD-Funktionen, weil hier M_1, M_2, M_3 symbolisch sind. Mit MuPAD (`x` stellt x^* dar):

```
>> rechts:= normal(1/(M1 + 1/(M2 + 1/(M3 + x))));

                x M2 + M2 M3 + 1
        --------------------------------
        x + M1 + M3 + x M1 M2 + M1 M2 M3
```

Es ergibt sich folgende quadratische Gleichung für den Grenzwert x^* (`denom` ist der Nenner des Ausdrucks, `numer` der Zähler):

```
>> x*denom(rechts) = numer(rechts);

      x (x + M1 + M3 + x M1 M2 + M1 M2 M3) = x M2 + M2 M3 + 1

>> expand(x*denom(rechts) - numer(rechts));
                                             2    2
  x M1 - x M2 + x M3 - M2 M3 + x M1 M2 M3 + x  + x  M1 M2 - 1

>> collect(%, x) = 0
                                        2
 x (M1 - M2 + M3 + M1 M2 M3) - M2 M3 + x  (M1 M2 + 1) - 1 = 0
```

Von den beiden Nullstellen dieses Polynoms ist bei den von `hex` gelieferten Werten nur eine positiv. Dies ist der gesuchte Grenzwert (beachte dass alle x_n positiv sind, also kann der Grenzwert nicht negativ sein). Z.B.:

```
>> M1:= 3: M2:= 5: M3:= 8:
>> solve(x = 1/(M1 + 1/(M2 + 1/(M3 + x))), x)

           {        1/2                1/2        }
           {   5 185              5 185           }
           { - -------- - 63/16, -------- - 63/16 }
           {      16                 16           }

>> float(%);

                  {-8.187959534, 0.312959534}
```

Aufgabe 21: (Folgen und Grenzwerte, etwas anspruchsvoller)
Zeige: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
Anleitung: gehe ähnlich wie im Beweis von Beispiel 2.19 der Vorlesung vor und betrachte dabei in der Entwicklung von $(1 + h_n)^n$ einen zusätzlichen Term. Alternativ kann man zunächst die Folge $\sqrt[2\cdot n]{n} = \sqrt{\sqrt[n]{n}}$ betrachten, die ebenfalls gegen 1 konvergiert.

Musterlösung:
Sicherlich gilt $\sqrt[n]{n} > 1$ für alle $n > 1$. Setze $h_n = \sqrt[n]{n} - 1$, also $n = (1 + h_n)^n$. Wegen $h_n > 0$ gilt

$$n = (1 + h_n)^n \geq 1 + n \cdot h_n + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot h_n^2 + \cdots \geq \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot h_n^2,$$

also

$$h_n^2 \leq \frac{n}{n \cdot (n-1)/2} = \frac{2}{n-1}.$$

Damit gilt $h_n^2 \to 0$ für $n \to \infty$, also auch $h_n \to 0$ und damit $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n \to 1$.

Alternativ: betrachte $z_n = \sqrt[2\cdot n]{n}$ und schreibe dies als $z_n = 1 + h_n$ mit $h_n > 0$, also $\sqrt{n} = (1 + h_n)^n$. Wie im Beweis von Beispiel 2.19:

$$\sqrt{n} = (1 + h_n)^n \geq 1 + n \cdot h_n + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot h_n^2 + \cdots \geq n \cdot h_n$$

$$\Rightarrow h_n \leq \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Es folgt $h_n \to 0$ und damit $z_n \to 1$ und damit $z_n^2 \to 1$. Die gefragte Folge war $\sqrt[n]{n} = z_n^2$.
