Ü b u n g s b l a t t 15 (Wiederholung)

Folgende Aufgaben dienen zur Wiederholung und Klausurvorbereitung.

Aufgabe 103: (Komplexe Zahlen. Induktion.)
Beweise formal: $(1+i)^{2 \cdot n} = (-1)^{n/2} \cdot 2^n$ für alle $n \in \{0, 2, 4, \cdots\}$.

Aufgabe 104: (Polynome. Induktion.)
Sei $p(z) = z^n + c_{n-1} \cdot z^{n-1} + \cdots + c_0$ ein Polynom vom Grad n mit den (eventuell übereinstimmenden) Nullstellen $z_1, \ldots, z_n$. Beweise formal:

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = -c_{n-1}.$$

Aufgabe 105: (Funktionalkalkül für Matrizen)
Bestimme eine explizite Form der Matrixpotenz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^n$.

Aufgabe 106: (Folgen, Grenzwerte)
Berechne $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sin(n) \cdot n}{n^2 + 1}$.

Aufgabe 107: (Folgen, Grenzwerte)
Berechne $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} \cdot \ln\Big(\dfrac{e^n}{2^n} + 1\Big)$.

Aufgabe 108: (Folgen, O-Kalkül)
Sei $x_n = \dfrac{n^3 + n \cdot O(n)}{2 \cdot n^3 + \frac{O(n^3)}{n+1}}$. Bestimme den Grenzwert der Folge (x_n).

Aufgabe 109: (Reihen)
Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{k+1}{k+2} \cdot x^k$.

Aufgabe 110: (Reihen)
Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{\ln(k)}{k^3 + k^2}$?

Aufgabe 111: (Reihen, Partialbruchzerlegung)
Berechne den Reihenwert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{2}{k \cdot (k+2)}$.

Aufgabe 112: (Stetigkeit)

Zeige, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x^2)}{x^4} & \text{für } x \neq 0, \\[2ex] \dfrac{1}{2} & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

am Punkt $x = 0$ stetig ist.

Aufgabe 113: (Grenzwerte)
Bestimme $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\ln(x)}$.

Aufgabe 114: (O-Kalkül)
Zeige formal: $e^{1+x} = e + O(x)$ im Limes $x \to 0$.

Aufgabe 115: (O-Kalkül)
Zeige formal: $\sqrt{|x|} \cdot O(x) = o(x)$ im Limes $x \to 0$.

Aufgabe 116: (Spezielle Funktionen)
Bestimme $\sin(\frac{\pi}{3})$ und $\cos(\frac{\pi}{3})$ als explizite exakte Ausdrücke. Anleitung: betrachte

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x), \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \quad \text{und} \quad \sin(2 \cdot x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$$

für ein geeignetes x.

Aufgabe 117: (Komplexe Wurzeln)
Bestimme alle komplexen Lösungen von $z^3 = -1$ in kartesischer Darstellung. Beachte Aufgabe 116.

Aufgabe 118: (Differentiation, Implizite Funktionen)
Die Funktion $y = f(x)$ sei implizit als Lösung der Gleichung

$$y + y^3 = x^2 + x^4$$

definiert. Bestimme alle Extrema von $f(x)$ und identifiziere sie als Minimum oder Maximum.

Aufgabe 119: (Taylor-Entwicklung)
Sei $T_2(x)$ das quadratische Taylor–Polynom der Funktion $f(x) = \ln(\cos(x))$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.
a) Bestimme $T_2(x)$.
b) Zeige, dass $|f(x) - T_2(x)| \leq \dfrac{2 \cdot |x|^3}{3}$ für alle $x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ gilt.

Aufgabe 120: (Differentiation, Extremwerte)
Welche Punkte des Parabelbogens $y = 2 - x^2$ haben den kleinsten Abstand zum Ursprung? Wie groß ist dieser minimale Abstand?

Aufgabe 121: (Differentiation, de l'Hospital)
Bestimme $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$. Anleitung: betrachte den Logarithmus des Ausdrucks.

Aufgabe 122: (Unbestimmte Integration)
Bestimme $\displaystyle\int \frac{2 \cdot x \cdot \ln(x)}{(x^2-1)^2}\, dx$. Anleitung: zunächst partielle Integration.

Aufgabe 123: (Bestimmte Integration)
Berechne $\displaystyle\int_0^1 t \cdot \sqrt{1-t^2}\, dt$.

Aufgabe 124: (Uneigentliche Integrale)
Bestimme $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(t)}{t^2}\, dt$.