Übungsblatt 14

Lösungen von $*$-Aufgaben sind per Web-Formular unter `http://math-www.upb.de/~walter` ($\longrightarrow$ Lehre SS 05 $\longrightarrow$ Übungen) bis spätestens Do, 21.7.05, abzuliefern.
Es gibt keine schriftlich zu bearbeitenden Aufgaben mehr, damit die erreichten Bonuspunkte zum Ende der Vorlesungszeit vorliegen.
Ich werde die erreichten Punkte dann auf der Web-Seite zur Mathe II aushängen.

Aufgabe 91*: (Potenzreihen. 10 Bonuspunkte)
Sei M eine ganze Zahl (die von `hex` zufällig gewählt wird).
Bestimme den Konvergenzradius von $\sum_{k=0}^{\infty} k^M \cdot x^k$.

Musterlösung:
Per Cauchy-Hadamard-Formel ergibt sich der Konvergenzradius r als:

$$r = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k^M}\right)^{1/k} = \frac{1}{\left(\lim\limits_{k\to\infty} k^{1/k}\right)^M} = \frac{1}{1^M} = 1,$$

wobei $\lim\limits_{k\to\infty} k^{1/k} = 1$ eingeht (Aufgabe 21).

Aufgabe 92*: (Potenzreihen. 10 Bonuspunkte)
Bestimme einen expliziten Ausdruck für $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^k$ (für x aus dem Konvergenzbereich der Reihe).
Anleitung: Betrachte $x \cdot \frac{d}{dx} \sum_k x^k$.

Musterlösung:
Da auf dem Konvergenzkreis die Reihe $\sum_k x^k$ gliedweise differenziert werden kann, gilt:

$$x \cdot \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} x^k = x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} x^k = x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^k = f(x).$$

Mit der Summenformel für die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ liefert dies:

$$f(x) = x \cdot \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} x^k = x \cdot \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = x \cdot \frac{1}{(1-x)^2},$$

also

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^k = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Dies gilt für alle x aus dem Konvergenzbereich $|x| < 1$.

Aufgabe 93: (Stammfunktionen. Partielle Integration)
Bestimme:

$$a)\quad \int x^2\cdot e^x\,dx,\quad b)\quad \int x\cdot\sin(x)\,dx,\quad c)\quad \int \sin(x)\cdot\cos(x)\cdot e^{\sin(x)}\,dx,$$

$$d)\quad \int \sin(x)\cdot e^x\,dx,\quad e)\quad \int \sin(x)\cdot\cos(x)\,dx.$$

Musterlösung:
a) Analog zu Beispiel 8.12 der Vorlesung:

$$\int \underbrace{x^2}_{f(x)}\cdot\underbrace{e^x}_{g'(x)}\,dx = \underbrace{x^2}_{f(x)}\cdot\underbrace{e^x}_{g(x)} - \int \underbrace{2\cdot x}_{f'(x)}\cdot\underbrace{e^x}_{g(x)}\,dx = x^2\cdot e^x - 2\cdot\int x\cdot e^x\,dx.$$

Erneute partielle Integration:

$$x^2\cdot e^x - 2\cdot\int \underbrace{x}_{f(x)}\cdot\underbrace{e^x}_{g'(x)}\,dx$$

$$= x^2\cdot e^x - 2\cdot\Big(\underbrace{x}_{f(x)}\cdot\underbrace{e^x}_{g(x)} - \int \underbrace{1}_{f'(x)}\cdot\underbrace{e^x}_{g(x)}\,dx\Big)$$

$$= x^2\cdot e^x - 2\cdot x\cdot e^x + 2\cdot\int e^x\,dx = x^2\cdot e^x - 2\cdot x\cdot e^x + 2\cdot e^x + c = (x^2 - 2\cdot x + 2)\cdot e^x + c.$$

Probe:

$$\frac{d}{dx}\Big((x^2 - 2\cdot x + 2)\cdot e^x + c\Big) = (2\cdot x - 2)\cdot e^x + (x^2 - 2\cdot x + 2)\cdot e^x = x^2\cdot e^x \quad \text{(ok).}$$

b) Analog zu Beispiel 8.12 der Vorlesung:

$$\int \underbrace{x}_{f(x)}\cdot\underbrace{\sin(x)}_{g'(x)}\,dx = \underbrace{x}_{f(x)}\cdot\underbrace{(-\cos(x))}_{g(x)} - \int \underbrace{1}_{f'(x)}\cdot\underbrace{(-\cos(x))}_{g(x)}\,dx$$

$$= -x\cdot\cos(x) + \int \cos(x)\,dx = -x\cdot\cos(x) + \sin(x) + c.$$

Probe:

$$\frac{d}{dx}\Big(-x\cdot\cos(x) + \sin(x) + c\Big) = -\cos(x) + x\cdot\sin(x) + \cos(x) = x\cdot\sin(x) \quad \text{(ok).}$$

c)

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\cdot e^{\sin(x)}\,dx = \int \underbrace{\sin(x)}_{f(x)}\cdot\underbrace{\cos(x)\cdot e^{\sin(x)}}_{g'(x)}\,dx.$$

Die entscheidene Beobachtung ist hier, dass wir die Stammfunktion des Faktors $g'(x)$ kennen (leicht raten können bzw. durch Substitution $y = \sin(x)$ systematisch bestimmten können): $g(x) = e^{\sin(x)}$:

$$\int \underbrace{\sin(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\cos(x) \cdot e^{\sin(x)}}_{g'(x)} \, dx = \underbrace{\sin(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^{\sin(x)}}_{g(x)} - \int \underbrace{\cos(x)}_{f'(x)} \cdot \underbrace{e^{\sin(x)}}_{g(x)} \, dx.$$

Das verbleibende Integral hatten wir oben schon identifiziert:

$$\int \cos(x) \cdot e^{\sin(x)} \, dx = e^{\sin(x)} - c.$$

Macht zusammen:

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x) \cdot e^{\sin(x)} \, dx = (\sin(x) - 1) \cdot e^{\sin(x)} + c.$$

Probe:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\Big((\sin(x) - 1) \cdot e^{\sin(x)} + c\Big) &= \cos(x) \cdot e^{\sin(x)} + (\sin(x) - 1) \cdot \cos(x) \cdot e^{\sin(x)} \\ &= \sin(x) \cdot \cos(x) \cdot e^{\sin(x)} \quad \text{(ok).} \end{aligned}$$

d)

$$\int \sin(x) \cdot e^x \, dx = \int \underbrace{\sin(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{g'(x)} \, dx = \underbrace{\sin(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{g(x)} - \int \underbrace{\cos(x)}_{f'(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{g(x)} \, dx.$$

Das war bislang nicht sehr erfolgreich: $\int \sin(x) \cdot e^x \, dx$ wurde durch $\int \cos(x) \cdot e^x \, dx$ ausgedrückt. Eine zweite partielle Integration:

$$\begin{aligned} \int \cos(x) \cdot e^x \, dx &= \int \underbrace{\cos(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{g'(x)} \, dx = \underbrace{\cos(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{g(x)} - \int \underbrace{(-\sin(x))}_{f'(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{g(x)} \, dx \\ &= \cos(x) \cdot e^x + \int \sin(x) \cdot e^x \, dx. \end{aligned}$$

Dies liefert eine Gleichung für $\int \sin(x) \cdot e^x \, dx$:

$$\begin{array}{rrcl} & \int \sin(x) \cdot e^x \, dx & = & \sin(x) \cdot e^x - \int \cos(x) \cdot e^x \, dx \\ & & = & \sin(x) \cdot e^x - \cos(x) \cdot e^x - \int \sin(x) \cdot e^x \, dx \\ \Rightarrow & 2 \cdot \int \sin(x) \cdot e^x \, dx & = & (\sin(x) - \cos(x)) \cdot e^x + c_1 \\ \Rightarrow & \int \sin(x) \cdot e^x \, dx & = & \frac{1}{2} \cdot \Big(\sin(x) - \cos(x)\Big) \cdot e^x + c. \end{array}$$

(Hierbei wurde $\frac{c_1}{2}$ in c umbenannt.) Probe: $\cdots$ (passt).

e)

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x) \, dx = \int \underbrace{\sin(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g'(x)} \, dx = \underbrace{\sin(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g(x)} - \int \underbrace{\cos(x)}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g(x)} \, dx.$$

Das war bislang nicht sehr erfolgreich: $\int \sin(x) \cdot \cos(x)\, dx$ wurde durch $\int \cos(x) \cdot \sin(x)\, dx$ ausgedrückt. Das Ganze ist aber eine Gleichung für das gesuchte Integral $\int \sin(x) \cdot \cos(x)\, dx$:

$$\begin{aligned} \int \sin(x) \cdot \cos(x)\, dx &= \sin^2(x) - \int \cos(x) \cdot \sin(x)\, dx \\ \Rightarrow \quad 2 \cdot \int \sin(x) \cdot \cos(x)\, dx &= \sin^2(x) + c_1 \\ \Rightarrow \quad \int \sin(x) \cdot \cos(x)\, dx &= \frac{\sin(x)^2}{2} + c. \end{aligned}$$

(Hierbei wurde $\frac{c_1}{2}$ in c umbenannt.) Probe: $\cdots$ (passt).

Aufgabe 94: (Stammfunktionen. Substitution)

Berechne

$$a) \quad \int e^{2\cdot x+3}\, dx, \quad b) \quad \int \cos(x) \cdot e^{2\cdot\sin(x)+3}\, dx, \quad c) \quad \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \cdot \ln(\sin(x))\, dx,$$

$$d) \quad \int \frac{\sin(\ln(2 \cdot x + 3))}{2 \cdot x + 3}\, dx, \quad e) \quad \int x \cdot \sin(x^2) \cdot \sin(\cos(x^2))\, dx.$$

Musterlösung:

a) Substituiere $y = 2 \cdot x + 3$ ($\Rightarrow dy = 2 \cdot dx$):

$$\int e^{2\cdot x+3}\, dx = \int e^y\, \frac{dy}{2} = \frac{e^y}{2} + c = \frac{e^{2\cdot x+3}}{2} + c.$$

b) Substituiere $y = 2 \cdot \sin(x) + 3$ ($\Rightarrow dy = 2 \cdot \cos(x) \cdot dx$):

$$\int \cos(x) \cdot e^{2\cdot\sin(x)+3}\, dx = \int e^y\, \frac{dy}{2} = \frac{e^y}{2} + c = \frac{e^{2\cdot\sin(x)+3}}{2} + c.$$

c) Substituiere $y = \sin(x)$, also $dy = \cos(x) \cdot dx$:

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \cdot \ln(\sin(x))\, dx = \int \frac{\ln(y)}{y}\, dy.$$

Nächste Substitution $z = \ln(y)$, also $dz = dy/y$:

$$\int \frac{\ln(y)}{y}\, dy = \int z\, dz = \frac{z^2}{2} + c = \frac{\ln(y)^2}{2} + c.$$

Macht zusammen

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \cdot \ln(\sin(x))\, dx = \frac{\ln(\sin(x))^2}{2} + c.$$

Beide Schritte können zusammengefasst werden, indem man gleich $z = \ln(\sin(x))$ substituiert. Mit $dz/dx = \cos(x)/\sin(x)$:

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \cdot \ln(\sin(x))\, dx = \int z\, dz = \frac{z^2}{2} + c = \frac{\ln(\sin(x))^2}{2} + c.$$

d) Substituiere $y = \ln(2 \cdot x + 3)$ ($\Rightarrow dy = \frac{2}{2 \cdot x + 3}\, dx$):

$$\int \frac{\sin(\ln(2 \cdot x + 3))}{2 \cdot x + 3}\, dx = \int \sin(y)\, \frac{dy}{2} = -\frac{\cos(y)}{2} = -\frac{1}{2} \cdot \cos(\ln(2 \cdot x + 3)) + c.$$

e) Substituiere $y = \cos(x^2)$ ($\Rightarrow dy = -2 \cdot x \cdot \sin(x^2) \cdot dx$):

$$\int x \cdot \sin(x^2) \cdot \sin(\cos(x^2))\, dx = \int \sin(y)\, \frac{dy}{-2} = -\frac{1}{2} \cdot (-\cos(y)) + c = \frac{1}{2} \cdot \cos(\cos(x^2)) + c.$$

Aufgabe 95*: (Integration. 10 Bonuspunkte)

Seien $M_1, \ldots, M_4$ Zahlen (die von `hex` zufällig gewählt werden). Bestimme:

$$\int \frac{\cos(M_1 \cdot x)}{\sin(M_1 \cdot x)} \cdot \ln\Big(M_2 \cdot \sin(M_1 \cdot x)\Big)\, dx + \int \frac{M_3 \cdot e^{M_4 \cdot \sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx.$$

Siehe auch Aufgabe 94.c.

Anmerkung: ältere MuPAD-Versionen liefern für das erste Integral eine komplexe Darstellung, die bei der Abgabe nicht akzeptiert wird. Es ist eine reelle Darstellung gefragt!

Musterlösung:

Substituiere $y = \sin(M_1 \cdot x)$ im ersten Integral, also $dy = M_1 \cdot \cos(M_1 \cdot x) \cdot dx$:

$$\int \frac{\cos(M_1 \cdot x)}{\sin(M_1 \cdot x)} \cdot \ln\Big(M_2 \cdot \sin(M_1 \cdot x)\Big)\, dx$$

$$= \int \frac{\ln(M_2 \cdot y)}{M_1 \cdot y}\, dy.$$

Mit $z = \ln(M_2 \cdot y)$, also

$$\frac{dz}{dy} = \frac{M_2}{M_2 \cdot y} \quad \Rightarrow \quad dz = \frac{dy}{y},$$

folgt

$$\int \frac{\ln(M_2 \cdot y)}{M_1 \cdot y}\, dy = \int \frac{z}{M_1}\, dz = \frac{z^2}{2 \cdot M_1} + c_1$$

$$= \frac{\ln(M_2 \cdot y)^2}{2 \cdot M_1} + c_1 = \frac{\ln\Big(M_2 \cdot \sin(M_1 \cdot x)\Big)^2}{2 \cdot M_1} + c_1.$$

Substituiere im zweiten Integral $y = M_4 \cdot \sqrt{x}$, also $dy = M_4 \cdot dx/(2 \cdot \sqrt{x})$, also

$$\int \frac{M_3 \cdot e^{M_4 \cdot \sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = \int M_3 \cdot e^y \cdot \frac{2}{M_4}\, dy = \frac{2 \cdot M_3}{M_4} \cdot \int e^y dy$$

$$= \frac{2 \cdot M_3}{M_4} \cdot e^y + c_2 = \frac{2 \cdot M_3}{M_4} \cdot e^{M_4 \cdot \sqrt{x}} + c_2$$

für $M_4 \neq 0$ bzw.

$$\int \frac{M_3 \cdot e^{M_4 \cdot \sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{M_3}{\sqrt{x}}\, dx = 2 \cdot M_3 \cdot \sqrt{x} + c_2$$

für $M_4 = 0$. **Endergebnis:**

$$\int \frac{\cos(M_1 \cdot x)}{\sin(M_1 \cdot x)} \cdot \ln(M_2 \cdot \sin(M_1 \cdot x))\, dx + \int \frac{M_3 \cdot e^{M_4 \cdot \sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$$

$$= \frac{\ln\Big(M_2 \cdot \sin(M_1 \cdot x)\Big)^2}{2 \cdot M_1} + \frac{2 \cdot M_3}{M_4} \cdot e^{M_4 \cdot \sqrt{x}} + c$$

für $M_4 \neq 0$ bzw.

$$= \frac{\ln\Big(M_2 \cdot \sin(M_1 \cdot x)\Big)^2}{2 \cdot M_1} + 2 \cdot M_3 \cdot \sqrt{x} + c$$

für $M_4 = 0$.

Aufgabe 96: (Stammfunktionen. Rationale Integranden)
Bestimme folgende Stammfunktionen:

$$a) \quad \int \frac{2 \cdot x}{(x+1) \cdot (x-2)}\, dx, \quad b) \quad \int \frac{x^2 + 2}{(x-1) \cdot (x-2)}\, dx.$$

Musterlösung:
a) Ansatz

$$\frac{2 \cdot x}{(x+1) \cdot (x-2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2} = \frac{a \cdot (x-2) + b \cdot (x+1)}{(x+1) \cdot (x-2)}.$$

Vergleich der Zähler:

$$2 \cdot x = a \cdot (x-2) + b \cdot (x+1) = (a+b) \cdot x + (b - 2 \cdot a).$$

Es folgen die Gleichungen

$$2 = a + b, \quad 0 = b - 2 \cdot a$$

mit der Lösung $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{4}{3}$. Also:

$$\int \frac{2 \cdot x}{(x+1) \cdot (x-2)}\, dx = \int \left(\frac{\frac{2}{3}}{x+1} + \frac{\frac{4}{3}}{x-2} \right) dx = \frac{2}{3} \cdot \ln(|x+1|) + \frac{4}{3} \cdot \ln(|x-2|) + c.$$

b) Zunächst Polynomdivision, um den Zählergrad zu reduzieren. Beachte $(x-1) \cdot (x-2) = x^2 - 3 \cdot x + 2$:

$$\begin{array}{rcl} x^2 + 2 & : & x^2 - 3 \cdot x + 2 \quad = \quad 1 \\ \underline{x^2 - 3 \cdot x + 2} & & \\ 3 \cdot x & & \end{array}$$

also

$$\frac{x^2 + 2}{(x-1) \cdot (x-2)} = 1 + \frac{3 \cdot x}{(x-1) \cdot (x-2)}.$$

Partialbruchzerlegung des verbleibenden Bruchs:

$$\frac{3 \cdot x}{(x-1) \cdot (x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} = \frac{a \cdot (x-2) + b \cdot (x-1)}{(x-1) \cdot (x-2)}.$$

Vergleich der Zähler:

$$3 \cdot x = a \cdot (x-2) + b \cdot (x-1) = (a+b) \cdot x + (-2 \cdot a - b).$$

Es folgen die Gleichungen

$$3 = a + b, \quad 0 = -2 \cdot a - b$$

mit der Lösung $a = -3$, $b = 6$. Also:

$$\frac{x^2+2}{(x-1)\cdot(x-2)} = 1 - \frac{3}{x-1} + \frac{6}{x-2}.$$

Es folgt:

$$\int \frac{x^2+2}{(x-1)\cdot(x-2)}\, dx = \int \Big(1 - \frac{3}{x-1} + \frac{6}{x-2}\Big)\, dx = x - 3 \cdot \ln(|x-1|) + 6 \cdot \ln(|x-2|) + c.$$

Aufgabe 97: (Bestimmte Integrale)
Berechne

$$a) \quad \int_0^{10} \sin(\pi \cdot t)\, dt, \quad b) \quad \int_0^2 t \cdot e^{-t}\, dt, \quad c) \quad \int_0^{\pi} \cos(t) \cdot e^{\sin^2(t)}\, dt.$$

Musterlösung:
a) Mit der Stammfunktion

$$\int \sin(\pi \cdot t)\, dt = -\frac{1}{\pi} \cdot \cos(\pi \cdot t) + c$$

folgt sofort

$$\int_0^{10} \sin(\pi \cdot t)\, dt = \left[\frac{-\cos(\pi \cdot t)}{\pi}\right]_{t=0}^{t=10} = \frac{1}{\pi} \cdot \Big(-\cos(10 \cdot \pi) + \cos(0)\Big) = 0.$$

b) Partielle Integration:

$$\int_0^2 \underbrace{t}_{f(t)} \cdot \underbrace{e^{-t}}_{g'(t)}\, dt = \Big[\underbrace{t}_{f(t)} \cdot \underbrace{(-e^{-t})}_{g(t)}\Big]_{t=0}^{t=2} - \int_0^2 \underbrace{1}_{f'(t)} \cdot \underbrace{(-e^{-t})}_{g(t)}\, dt$$

$$= \Big[-t \cdot e^{-t}\Big]_{t=0}^{t=2} + \int_0^2 e^{-t} dt = \Big[-t \cdot e^{-t}\Big]_{t=0}^{t=2} + \Big[-e^{-t}\Big]_{t=0}^{t=2}$$

$$= -2 \cdot e^{-2} - e^{-2} + e^0 = 1 - 3 \cdot e^{-2} \approx 0.594.$$

c) Substitution $y = \sin(t)$, $dy = \cos(t)\, dt$. Transformation der unteren Grenze: $t = 0 \Rightarrow y = \sin(0) = 0$. Transformation der oberen Grenze: $t = \pi \Rightarrow y = \sin(\pi) = 0$. Damit ergibt sich:

$$\int_0^{\pi} \cos(t) \cdot e^{\sin^2(t)}\, dt = \int_0^0 e^{y^2}\, dy.$$

Da die Intervallgrenzen übereinstimmen, ist das Integral 0: wir brauchen die Stammfunktion von e^{y^2} gar nicht zu kennen!

$$\int_0^{\pi} \cos(t) \cdot e^{\sin^2(t)}\, dt = 0.$$

Aufgabe 98: (Bestimmte Integrale, gerade und ungerade Funktionen)
Eine Funktion mit der Eigenschaft $f(-t) = -f(t)$ heißt **„ungerade"**. Beispiele: $f(t) = t+t^3$, $f(t) = \sin(t)$. Zeige, daß für jede ungerade Funktion f und für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_{-a}^{a} f(t)\; dt = 0.$$

Eine Funktion mit der Eigenschaft $f(-t) = f(t)$ heißt **„gerade"**. Beispiele: $f(t) = 1 + t^2$, $f(t) = \cos(t)$. Zeige, daß für jede gerade Funktion f und für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_{-a}^{a} f(t)\; dt = 2 \cdot \int_{0}^{a} f(t)\; dt.$$

Anleitung:$\int_{-a}^{a} f(t)\; dt = \int_{-a}^{0} f(t)\; dt + \int_{0}^{a} f(t)\; dt$. Substituiere $y = -t$ im ersten Integral.

Musterlösung:

$$\int_{-a}^{a} f(t)\; dt = \int_{-a}^{0} f(t)\; dt + \int_{0}^{a} f(t)\; dt.$$

Substituiere $y = -t$ im ersten Integral: $dy = -dt$. Transformation der Grenzen: $t = -a \Rightarrow y = a$, $t = 0 \Rightarrow y = 0$.

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{0} f(t)\; dt + \int_{0}^{a} f(t)\; dt &= -\int_{a}^{0} f(-y)\; dy + \int_{0}^{a} f(t)\; dt \\ = \int_{0}^{a} f(-y)\; dy + \int_{0}^{a} f(t)\; dt &= \pm \int_{0}^{a} f(y)\; dy + \int_{0}^{a} f(t)\; dt, \end{aligned}$$

wobei für gerade Funktionen das $+$ Zeichen, für ungerade Funktionen das $-$ Zeichen gilt. Nennt man y wieder in t um:

$$\int_{-a}^{a} f(t)\; dt = \pm \int_{0}^{a} f(t)\; dt + \int_{0}^{a} f(t)\; dt = \begin{cases} 2 \cdot \int_{0}^{a} f(t)\; dt & \text{für gerade Funktionen } f, \\ 0 & \text{für ungerade Funktionen } f. \end{cases}$$

Aufgabe 99*: (Bestimmte Integrale. 10 Bonuspunkte)
Seien $M_1, \ldots, M_5$ Zahlen (die von `hex` zufällig gewählt werden). Berechne

$$\int_{0}^{M_1 \cdot 2 \cdot \pi} \sin(M_2 \cdot t) \cdot e^{M_3 \cdot t}\; dt + \int_{-M_4}^{M_4} t^7 \cdot e^{-M_5 \cdot t^2}\; dt.$$

Anleitung: 2-fache partielle Integration beim ersten Integral. Zweites Integral: beachte die anderen Aufgaben auf diesem Blatt.

Musterlösung:
Erstes Integral:

$$I_1 = \int_0^{M_1\cdot 2\cdot\pi} \underbrace{\sin(M_2\cdot t)}_{f(t)} \cdot \underbrace{e^{M_3\cdot t}}_{g'(t)}\ dt = \Big[\underbrace{\sin(M_2\cdot t)}_{f(t)} \cdot \underbrace{\frac{e^{M_3\cdot t}}{M_3}}_{g(t)}\Big]_{t=0}^{t=M_1\cdot 2\cdot\pi} - \int_0^{M_1\cdot 2\cdot\pi} \underbrace{M_2\cdot\cos(M_2\cdot t)}_{f'(t)} \cdot \underbrace{\frac{e^{M_3\cdot t}}{M_3}}_{g(t)}\ dt$$

$$= -\frac{M_2}{M_3}\cdot\int_0^{M_1\cdot 2\cdot\pi} \cos(M_2\cdot t)\cdot e^{M_3\cdot t}\ dt.$$

(beachte $\sin(M_1\cdot M_2\cdot 2\cdot\pi) = 0$, da M_1, M_2 von `hex` ganzzahlig gewählt werden). Weitere partielle Integration des Restintegrals:

$$\int_0^{M_1\cdot 2\cdot\pi} \underbrace{\cos(M_2\cdot t)}_{f(t)} \cdot \underbrace{e^{M_3\cdot t}}_{g'(t)}\ dt = \Big[\underbrace{\cos(M_2\cdot t)}_{f(t)} \cdot \underbrace{\frac{e^{M_3\cdot t}}{M_3}}_{g(t)}\Big]_{t=0}^{t=M_1\cdot 2\cdot\pi} - \int_0^{M_1\cdot 2\cdot\pi} \underbrace{M_2\cdot\Big(-\sin(M_2\cdot t)\Big)}_{f'(t)} \cdot \underbrace{\frac{e^{M_3\cdot t}}{M_3}}_{g(t)}\ dt$$

$$= \frac{\overbrace{\cos(M_1\cdot M_2\cdot 2\cdot\pi)}^{1}\cdot e^{M_1\cdot M_3\cdot 2\cdot\pi} - 1}{M_3} + \frac{M_2}{M_3}\cdot\int_0^{M_1\cdot 2\cdot\pi} \sin(M_2\cdot t)\cdot e^{M_3\cdot t}\ dt.$$

Man findet das Ausgangsintegral I_1 wieder. Insgesamt hat sich die Gleichung

$$I_1 = -\frac{M_2}{M_3}\cdot\Big(\frac{e^{M_1\cdot M_3\cdot 2\cdot\pi} - 1}{M_3} + \frac{M_2}{M_3}\cdot I_1\Big)$$

ergeben, also

$$\Big(1 + \Big(\frac{M_2}{M_3}\Big)^2\Big)\cdot I_1 = -\frac{M_2}{M_3^2}\cdot\Big(e^{M_1\cdot M_3\cdot 2\cdot\pi} - 1\Big),$$

aus der sich I_1 sofort ergibt:

$$I_1 = \frac{M_2}{M_2^2 + M_3^2}\cdot\Big(1 - e^{M_1\cdot M_3\cdot 2\cdot\pi}\Big).$$

Für das zweite Integral ergibt sich mit Aufgabe 98 sofort ohne Rechnung

$$\int_{-M_4}^{M_4} t^7\cdot e^{-M_5\cdot t^2}\ dt = 0,$$

da der Integrand ungerade ist: $(-t)^7\cdot e^{-M_5\cdot(-t)^2} = -t^7\cdot e^{-M_5\cdot t^2}$.

Aufgabe 100: (Uneigentliche Integrale)
Für welche Werte von n existieren die folgenden Integrale?

$$a)\quad \int_1^\infty t^n\ dt,\quad b)\quad \int_0^1 t^n\ dt.$$

Berechne

$$c)\quad \int_{-\infty}^\infty t\cdot e^{-t^2}\ dt.$$

Musterlösung:
Es gilt

$$\int t^n\ dt = \begin{cases} \dfrac{t^{n+1}}{n+1} + c & (n \neq -1), \\ \ln(|t|) + c & (n = -1). \end{cases}$$

a) Der Integrand t^n hat für negatives n eine Singularität bei $t = 0$. Für $n \neq -1$:

$$\int_0^1 t^n\ dt = \lim_{\epsilon \to 0+0} \int_\epsilon^1 t^n\ dt = \lim_{\epsilon \to 0+0} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_{t=\epsilon}^{t=1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} \cdot \lim_{\epsilon \to 0+0} \epsilon^{n+1}.$$

Für $n+1 > 0$ existiert dieser Grenzwert (und ist $\frac{1}{n+1}$). Für $n+1 < 0$ existiert er nicht (bzw. ist ∞; beachte $\frac{1}{n+1} < 0$). Für $n = -1$ gilt:

$$\int_0^1 \frac{1}{t}\ dt = \lim_{\epsilon \to 0+0} \int_\epsilon^1 \frac{1}{t}\ dt = \lim_{\epsilon \to 0+0} \Big[\ln(|t|) \Big]_{t=\epsilon}^{t=1} = - \lim_{\epsilon \to 0+0} \ln(|\epsilon|) = \infty.$$

Ergebnis:

$$\boxed{\int_0^1 t^n\ dt = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{für } n > -1, \\ \infty & \text{für } n \leq -1. \end{cases}}$$

b) Für $n \neq -1$ gilt:

$$\int_1^\infty t^n\ dt = \lim_{b \to \infty} \int_1^b t^n\ dt = \lim_{b \to \infty} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_{t=1}^{t=b} = \frac{1}{n+1} \cdot \lim_{b \to \infty} b^{n+1} - \frac{1}{n+1}.$$

Für $n+1 > 0$ existiert dieser Grenzwert nicht (bzw. ist ∞). Für $n+1 < 0$ existiert der Grenzwert und ist $-\frac{1}{n+1}$. Für $n = -1$ gilt:

$$\int_1^\infty \frac{1}{t}\ dt = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{1}{t}\ dt = \lim_{b \to \infty} \Big[\ln(|t|) \Big]_{t=1}^{t=b} = \lim_{b \to \infty} \ln(|b|) = \infty.$$

Ergebnis:

$$\boxed{\int_1^\infty t^n\ dt = \begin{cases} \infty & \text{für } n \geq -1, \\ -\frac{1}{n+1} & \text{für } n < -1. \end{cases}}$$

c) Substitution $y = t^2$, $dy = 2 \cdot t\ dt \Rightarrow t \cdot dt = \frac{dy}{2}$:

$$\int_{-\infty}^\infty t \cdot e^{-t^2}\ dt = \lim_{a \to -\infty} \left(\lim_{b \to \infty} \int_a^b e^{-t^2} \underbrace{t \cdot dt}_{dy/2} \right) = \lim_{a \to -\infty} \left(\lim_{b \to \infty} \frac{1}{2} \cdot \int_{a^2}^{b^2} e^{-y}\ dy \right)$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left(\lim_{b \to \infty} \Big[- e^{-y} \Big]_{y=a^2}^{y=b^2} \right) = \lim_{a \to -\infty} \left(\lim_{b \to \infty} (e^{-a^2} - e^{-b^2}) \right)$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left(e^{-a^2} - \lim_{b \to \infty} e^{-b^2}) \right) = \lim_{a \to -\infty} e^{-a^2} = 0.$$

Aufgabe 101: (Substitution und partielle Integration. Braucht etwas „Augenmaß“.)
Zeige

$$\int_0^\infty \sqrt{t}\cdot e^{-t}\ dt = \int_0^\infty e^{-y^2}\ dy.$$

(Anleitung: Substitution $y=\sqrt{t}$, dann geeignete partielle Integration). Welchen Wert liefert MuPAD für das Integral?

Musterlösung:
Mit $y=\sqrt{t}$ ($\Rightarrow dy = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}\ dt = \frac{1}{2\cdot y}\ dt$):

$$\int_0^\infty \sqrt{t}\cdot e^{-t}\ dt = \int_0^\infty y\cdot e^{-y^2}\cdot\underbrace{2\cdot y\ dy}_{dt}.$$

Nun partielle Integration (hier braucht man „Augenmaß“, was zu tun ist):

$$\int_0^\infty \underbrace{y}_{f(y)}\cdot\underbrace{e^{-y^2}\cdot 2\cdot y}_{g'(y)}\ dy = \Big[\underbrace{y}_{f(y)}\cdot\underbrace{(-e^{-y^2})}_{g(y)}\Big]_{y=0}^{y=\infty} - \int_0^\infty \underbrace{1}_{f'(y)}\cdot\underbrace{(-e^{-y^2})}_{g(y)}\ dy = \int_0^\infty e^{-y^2}\ dy$$

Die Randterme fallen dabei weg:

$$\Big[y\cdot(-e^{-y^2})\Big]_{y=0}^{y=\infty} = \lim_{b\to\infty}\Big[y\cdot(-e^{-y^2})\Big]_{y=0}^{y=b} = \lim_{b\to\infty}\Big(-b\cdot e^{-b^2}\Big) - 0\cdot(-e^{-0^2}) = 0$$

(denn e^{-b^2} fällt für $b\to\infty$ schneller als z.B. $1/b^2$). MuPAD liefert als Wert:

```
>> int(sqrt(t)*exp(-t), t = 0..infinity)

                                1/2
                              PI
                              -----
                                2

>> int(exp(-y^2), y = 0..infinity)

                                1/2
                              PI
                              -----
                                2
```

Aufgabe 102: (MuPAD und numerische Integration)
Studiere einige Beispiele der Hilfeseiten zu MuPAD’s numerischen Integrierern `numeric::int` und `numeric::quadrature`. Berechne den Wert von $\int_0^\infty \frac{e^{-t^2}}{\pi+\sqrt{t}+\sin(t)}\ dt$ auf 10 Dezimalstellen genau!

Musterlösung:

```
>> numeric::int(exp(-t^2)/(PI + sqrt(t) + sin(t)), t = 0..infinity)

                                 0.2094116015
```
