MATHE II FÜR INFORMATIKER — Sommersemester 05
WALTER OEVEL — 4. 7. 2005

Übungsblatt 13

Lösungen von $*$-Aufgaben sind per Web-Formular unter `http://math-www.upb.de/~walter` ($\longrightarrow$ Lehre SS 05 $\longrightarrow$ Übungen) bis spätestens Do, 14.7.05, abzuliefern.
Lösungen von $**$-Aufgaben sind schriftlich abzugeben. Sie werden zu Beginn der Vorlesung am Mi, 13.7.05 eingesammelt.

Aufgabe 86: (de l'Hospital)

Berechne mittels der de l'Hospitalschen Regel $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$.

Musterlösung:
Zweifache Anwendung von l'Hospital (solange eine $\frac{0}{0}$–Situation vorliegt):

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(1-\cos(x))}{\frac{d}{dx}x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{2\cdot x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\sin(x)}{\frac{d}{dx}2\cdot x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{2} = \frac{\cos(0)}{2} = \frac{1}{2}\ .$$

MuPAD:

```
>> limit((1 - cos(x))/x^2, x = 0)

                    1/2
```

Aufgabe 87:** (de l'Hospital. 10 Bonuspunkte)
Diese Aufgabe kann schriftlich bearbeitet werden. Bearbeitungen werden zu Beginn der Vorlesung am Mi, 13.7.05, eingesammelt.

Berechne den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x$.
Anleitung: $x^x = e^{x\cdot\ln(x)}$. Forme $x\cdot\ln(x)$ so um, dass sich für $x=0$ eine $\frac{\infty}{\infty}$–Situation ergibt.

Musterlösung:
Es wird zunächst $\lim\limits_{x\to 0+0} x\cdot\ln(x)$ per l'Hospital berechnet:

$$\lim_{x\to 0+0} x\cdot\ln(x) = \lim_{x\to 0+0}\frac{\ln(x)}{1/x}.$$

Dies ergibt für $x=0$ eine ∞/∞-Situation, d.h., wir können l'Hospital anwenden:

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{d}{dx}\ln(x)}{\frac{d}{dx}1/x} = \lim_{x\to 0+0}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+0}(-x) = 0.$$

Es folgt

$$\lim_{x\to 0+0} x^x = \lim_{x\to 0+0} e^{x\cdot\ln(x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0+0} x\cdot\ln(x)} = e^0 = 1.$$

Aufgabe 88*: (de l'Hospital. 10 Bonuspunkte)
Seien $M_1, \ldots, M_5$ Zahlen (die von `hex` zufällig gewählt werden). Berechne den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0+0}\left(\sin(M_1\cdot x)^{M_2\cdot x}+\frac{\arctan(M_3\cdot x^2)}{M_4\cdot x^2\cdot(M_5+x)}\right).$$

Anleitung: siehe auch Aufgabe 87. Die Ableitung von arctan war in Aufgabe 74.b) zu bestimmen.

Musterlösung:
Der Grenzwert des ersten Summanden ergibt sich analog zu Aufgabe 88:

$$\lim_{x\to 0+0}\sin(M_1\cdot x)^{M_2\cdot x}=\lim_{x\to 0+0} e^{M_2\cdot x\cdot\ln(\sin(M_1\cdot x))}.$$

Hierbei gilt nach l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0+0} x\cdot\ln(\sin(M_1\cdot x))=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln(\sin(M_1\cdot x))}{1/x}$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{d}{dx}\ \ln(\sin(M_1\cdot x))}{\frac{d}{dx}\ 1/x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{M_1\cdot\cos(M_1\cdot x)}{\sin(M_1\cdot x)}}{-1/x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\Big(-\cos(M_1\cdot x)\cdot\frac{M_1\cdot x}{\sin(M_1\cdot x)}\cdot x\Big)$$

$$=-\Big(\lim_{x\to 0+0}\cos(M_1\cdot x)\Big)\cdot\Big(\lim_{x\to 0+0}\frac{M_1\cdot x}{\sin(M_1\cdot x)}\Big)\cdot\Big(\lim_{x\to 0+0} x\Big)=-1\cdot 1\cdot 0=0,$$

also

$$\lim_{x\to 0+0}\sin(M_1\cdot x)^{M_2\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to 0+0} M_2\cdot x\cdot\ln(\sin(M_1\cdot x))}=e^0=1.$$

Der Grenzwert des zweiten Summanden ergibt sich per l'Hospital (beachte $\frac{d}{dx}\ \arctan(x)=\frac{1}{1+x^2}$):

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\arctan(M_3\cdot x^2)}{M_4\cdot x^2\cdot(M_5+x)}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{d}{dx}\ \arctan(M_3\cdot x^2)}{\frac{d}{dx}\Big(M_4\cdot x^2\cdot(M_5+x)\Big)}$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{2\cdot M_3\cdot x}{1+M_3^2\cdot x^4}}{2\cdot M_4\cdot M_5\cdot x+3\cdot M_4\cdot x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{2\cdot M_3}{(1+M_3^2\cdot x^4)\cdot\Big(2\cdot M_4\cdot M_5+3\cdot M_4\cdot x\Big)}$$

$$=\frac{M_3}{M_4\cdot M_5}.$$

Endergebnis:

$$\lim_{x\to 0+0}\left(\sin(M_1\cdot x)^{M_2\cdot x}+\frac{\arctan(M_3\cdot x^2)}{M_4\cdot x^2\cdot(M_5+x)}\right)=1+\frac{M_3}{M_4\cdot M_5}.$$

Aufgabe 89: (Das Newton-Verfahren. Technisch anspruchsvoller.)
Betrachte eine mehrfach differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mit einer Nullstelle x^*, für die $f'(x^*) \neq 0$ gelte. Zur numerischen Suche nach der Nullstelle betrachte die Iteration

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

mit einem Startpunkt x_0 in der Nähe von x^* („das **Newton-Verfahren**“).

a) Sei $N(x) = x - f(x)/f'(x)$. Zeige:

$$N(x) - x^* = \frac{f''(x^*) + O(x - x^*)}{2 \cdot f'(x^*) + O(x - x^*)} \cdot (x - x^*)^2$$

und folgere, dass es eine Umgebung von x^* gibt, sodass für alle x aus dieser Umgebung $|N(x) - x^*| \leq C \cdot |x - x^*|^2$ gilt mit einer geeigneten Konstanten C.

Anleitung: Taylor-Entwicklung von $f(x)$ und $f'(x)$ um x^*.

b) Folgere $|N(x) - x^*| \leq \dfrac{|x - x^*|}{2}$ und $|N(x) - x^*| \leq \frac{1}{2 \cdot C}$, falls $|x - x^*| \leq \frac{1}{2 \cdot C}$ gilt.

c) Folgere $x_i \to x^*$ für die aus einem Startpunkt x_0 entstehende Newton-Folge (x_i), falls $|x_0 - x^*| \leq \frac{1}{2 \cdot C}$ gilt.

Interpretation von c): die Newton-Folge (x_i) konvergiert gegen eine Nullstelle, wenn der Startpunkt x_0 hinreichend nahe bei der Nullstelle liegt.

Musterlösung:
a) Setze zur Abkürzung $d = x - x^*$. Mit $f'(x^*) = 0$ liefert Taylor-Entwicklung von f um x^*:

$$f(x) = f(x^*) + f'(x^*) \cdot (x - x^*) + \frac{f''(x^*)}{2} \cdot (x - x^*)^2 + O((x - x^*)^3) = f'(x^*) \cdot d + \frac{f''(x^*)}{2} \cdot d^2 + O(d^3).$$

Taylor-Entwicklung von f' um den Punkt x^*:

$$f'(x) = f'(x^*) + f''(x^*) \cdot (x - x^*) + O((x - x^*)^2) = f'(x^*) + f''(x^*) \cdot d + O(d^2).$$

Dies ergibt

$$N(x) - x^* = x - x^* - \frac{f'(x^*) \cdot d + \frac{f''(x^*)}{2} \cdot d^2 + O(d^3)}{f'(x^*) + f''(x^*) \cdot d + O(d^2)}.$$

$$\Rightarrow \quad N(x) - x^* = d - \frac{f'(x^*) \cdot d + \frac{f''(x^*)}{2} \cdot d^2 + O(d^3)}{f'(x^*) + f''(x^*) \cdot d + O(d^2)}$$

$$= \frac{d \cdot \Big(f'(x^*) + f''(x^*) \cdot d + O(d^2) \Big) - f'(x^*) \cdot d - \frac{f''(x^*)}{2} \cdot d^2 + O(d^3)}{f'(x^*) + f''(x^*) \cdot d + O(d^2)}$$

$$= \frac{\frac{f''(x^*)}{2} \cdot d^2 + O(d^3)}{f'(x^*) + O(d)} = \frac{f''(x^*) + O(d)}{2 \cdot f'(x^*) + O(d)} \cdot d^2.$$

Da $O(d) \to 0$ für $x \to x^*$, gibt es eine Umgebung von x^* mit $|O(d)| \leq |f'(x^*)/2| > 0$:

$$|f'(x^*) + O(d)| \geq |f'(x^*)| - |O(d)| \geq \frac{|f'(x^*)|}{2}.$$

Damit kann der Nenner des obigen Ausdrucks auf dieser Umgebung nicht beliebig klein werden. Damit gibt es eine Konstante C, sodass für alle x aus dieser Umgebung

$$|N(x) - x^*| \leq C \cdot |x - x^*|^2 \qquad (\#)$$

gilt, wobei als Konstante $C \approx \frac{f''(x^*)}{2 \cdot f'(x^*)}$ gewählt werden kann, wenn man sich auf sehr kleine Umgebungen von x^* beschränkt.

b) und c): Wähle x_0 aus der Umgebung, auf der (#) gilt. Sei x_i die rekursiv aus x_0 hervorgehende Newton-Folge, setze $d_i = x_i - x^*$. Für $|d_0| \leq \frac{1}{2 \cdot C}$ folgt

$$|d_1| \leq (C \cdot |d_0|) \cdot |d_0| \leq \frac{|d_0|}{2}.$$

Hiermit gilt wiederum $|d_1| \leq |d_0| \leq \frac{1}{2 \cdot C}$, und es folgt

$$|d_2| \leq \frac{|d_1|}{2} \leq \frac{|d_0|}{4}.$$

Mit diesem Argument folgt induktiv unmittelbar

$$|d_i| \leq \frac{|d_0|}{2^i},$$

woraus

$$\lim_{i \to \infty} d_i = 0$$

folgt. Die Abstände $d_i = x_i - x^*$ zwischen x_i und der Nullstelle konvergieren gegen 0, also gilt

$$\lim_{i \to \infty} x_i = x^*,$$

d.h., die Newton-Folge (x_i) konvergiert gegen die Nullstelle, wenn nur x_0 hinreichend dicht bei der Nullstelle liegt.

Tutoren:

i) geometrische Interpretation liefern (x_{i+1} = Nullstelle der Tangente am Punkt x_i).

ii) Auf quadratische Konvergenz hinweisen.

Aufgabe 90*: (Das Newton-Verfahren. 10 Bonuspunkte)

Seien M_1, M_2 Zahlen (die von `hex` zufällig gewählt werden. Finde über das Newton-Verfahren aus Aufgabe 89 eine numerische Approximation von $M_1^{1/3}$ indem nach einer Nullstelle von $f(x) = x^3 - M_1$ gesucht wird. Wähle als Startpunkt $x_0 = M_2$. Abzuliefern ist das Element x_4 der mit x_0 startenden Newton-Folge $x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i)$. Dieser Wert ist als Gleitpunktzahl mit mindestens 9 Nach„komma"stellen einzugeben.

Musterlösung:
Für $M_1 = 13/18$ und $M_2 = 7/8$:

```
>> f:= x ->  x^3 - 13/18:
>> N:= x -> x - f(x)/f'(x):
>> x0 := float(7/8)
                          0.875
               //           ^              1 Stelle korrekt
>> x1 := N(x0)
                          0.8977702192
               //           ^^^            3 Stellen korrekt
>> x2 := N(x1)
                          0.8972024615
               //           ^^^^^^         6 Stellen korrekt
>> x3 := N(x2)
                          0.897202102
               //           ^^^^^^^^^      alle Stellen korrekt
>> x4 := N(x3)
                          0.897202102
               //           ^^^^^^^^^      alle Stellen korrekt
>> x5 := N(x4)
                          0.897202102
               //           ^^^^^^^^^      alle Stellen korrekt
```