Ü b u n g s b l a t t 11

Lösungen von $*$-Aufgaben sind per Web-Formular unter `http://math-www.upb.de/~walter` ($\longrightarrow$ Lehre SS 05 $\longrightarrow$ Übungen) bis spätestens Do, 30.6.05, abzuliefern.
Lösungen von $**$-Aufgaben sind schriftlich abzugeben. Sie werden zu Beginn der Vorlesung am Mi, 29.6.05 eingesammelt.

Aufgabe 71: (Differentiation)
Sind die Funktionen

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(\frac{1}{x}) & \text{für} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}, \qquad b) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x}) & \text{für} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

am Nullpunkt differenzierbar?

Musterlösung:
a) Der Grenzwert des Differenzenquotienten am Nullpunkt

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot \sin(\frac{1}{h})}{h} = \lim_{h \to 0} \sin\left(\frac{1}{h}\right)$$

existiert nicht: für die Nullfolge $h_n = \frac{1}{n \cdot \pi}$ ergibt sich

$$\lim_{n \to \infty} \sin\left(\frac{1}{h_n}\right) = \lim_{n \to \infty} \sin(n \cdot \pi) = \lim_{n \to \infty} 0 = 0,$$

während sich für die Nullfolge $h_n = \frac{1}{(2 \cdot n + \frac{1}{2}) \cdot \pi}$ ein anderer Grenzwert ergibt:

$$\lim_{n \to \infty} \sin\left(\frac{1}{h_n}\right) = \lim_{n \to \infty} \sin\left(\left(2 \cdot n + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi\right) = \lim_{n \to \infty} 1 = 1.$$

b) Der Grenzwert des Differenzenquotienten am Nullpunkt

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \cdot \sin(\frac{1}{h})}{h} = \lim_{h \to 0} h \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$$

existiert (denn $\sin(\frac{1}{h})$ ist beschränkt).

Aufgabe 72: (Differentiation)
Berechne die Ableitung von

$$a) \quad \frac{1 + x^2}{2 + x^2}, \qquad b) \quad \sin(x^2), \qquad c) \quad \cos(\pi - x^3),$$

$$c) \quad \sin(x^2 \cdot e^x), \qquad d) \quad \sin^2(x) + \cos^2(x).$$

Musterlösung:

a)

$$\frac{d}{dx}\ \frac{1+x^2}{2+x^2} = \frac{2\cdot x\cdot(2+x^2)-(1+x^2)\cdot 2\cdot x}{(2+x^2)^2} = \frac{2\cdot x}{(2+x^2)^2}.$$

b):

$$\frac{d}{dx}\ \sin(x^2) = \cos(x^2)\cdot 2\cdot x.$$

c)

$$\frac{d}{dx}\ \cos(\pi - x^3) = (-\sin(\pi - x^3))\cdot(-3\cdot x^2) = 3\cdot x^2\cdot\sin(x^3).$$

d)

$$\frac{d}{dx}\ \sin(x^2\cdot e^x) = \cos(x^2\cdot e^x)\cdot(2\cdot x\cdot e^x + x^2\cdot e^x) = (2\cdot x + x^2)\cdot e^x\cdot\cos(x^2\cdot e^x).$$

e)

$$\frac{d}{dx}\ (\sin^2(x)+\cos^2(x)) = 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x) + 2\cdot\cos(x)\cdot(-\sin(x)) = 0.$$

Dies ist verständlich, da $\frac{d}{dx}\ (\sin^2(x)+\cos^2(x)) = \frac{d}{dx}\ 1$.

Aufgabe 73*: (Differentiation. 10 Bonuspunkte)

Seien $M_1, \ldots, M_5$ Zahlen (die von `hex` zufällig gewählt werden). Berechne die Ableitung von

$$f(x) = \frac{M_1 + M_2\cdot x^3}{M_3 + e^{-x^2}} + \sin(M_4\cdot x^2 + M_5).$$

Musterlösung:

```
>> f:= (M1 + M2*x^3)/(M3 + exp(-x^2)) + sin(M4*x^2 + M5):
>> diff(f, x)

          2
    3 M2 x                      2
-------------- + 2 M4 x cos(M4 x  + M5) +
            2
M3 + exp(- x )

              2       3
   2 x exp(- x ) (M2 x  + M1)
   --------------------------
                    2  2
        (M3 + exp(- x ))
```

Aufgabe 74: (Differentiation)

In Aufgabe 68 wurde $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ sowie die Umkehrfunktion $\arctan(x)$ eingeführt.

a) Zeige: $\frac{d}{dx}\tan(x) = 1 + \tan^2(x)$.

b) Berechne die Ableitung von $\arctan(x)$.

c) Berechne die Ableitung von $\arctan(x) + \arctan(1/x)$. Erklärung?

Musterlösung:

a)

$$\frac{d}{dx}\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\cos^2(x) - \sin(x)\cdot(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

b) Sei $f = \tan$, $f^{-1} = \arctan$, $x = \tan(y)$, $y = \arctan(x)$. Es gilt

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{1 + \tan^2(y)} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

c)

$$\frac{d}{dx}\Big(\arctan(x) + \arctan(1/x)\Big) = \frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + (1/x)^2}\cdot\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{x^2 + 1} = 0.$$

Dies wird verständlich wegen der in Aufgabe 68.d) herzuleitenden Identität

$$\arctan(x) + \arctan(1/x) = \operatorname{sign}(x)\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Aufgabe 75: (Die Produktregel)

Seien $f(x)$ und $g(x)$ genügend oft differenzierbar. Beweise durch Induktion nach n:

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x)\cdot g(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot f^{(n-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x)$$

mit den durch $\binom{n}{0} = 1$ und

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}, \quad k = 1, \ldots, n$$

definierten Binomialkoeffizienten des Pascalschen Dreiecks.

Musterlösung:

Induktionsstart: Für $n = 0$ ist die Behauptung $f(x)\cdot g(x) = f(x)\cdot g(x)$ sicherlich richtig.

Induktionsschritt $n \to n + 1$: Es gelte

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x)\cdot g(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot f^{(n-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x).$$

Durch eine weitere Ableitung erhält man:

$$\begin{aligned}
\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} f(x)\cdot g(x) = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot f^{(n-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x) \\
= \quad & \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot f^{(n+1-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x) + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot f^{(n-k)}(x)\cdot g^{(k+1)}(x) \\
= \quad & f^{(n+1)}(x)\cdot g(x) + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cdot f^{(n+1-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x) \\
& \qquad + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\cdot f^{(n-k)}(x)\cdot g^{(k+1)}(x) + f(x)\cdot g^{(n+1)}(x) \\
= \quad & f^{(n+1)}(x)\cdot g(x) + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cdot f^{(n+1-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x) \\
& \qquad + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}\cdot f^{(n+1-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x) + f(x)\cdot g^{(n+1)}(x) \\
= \quad & f^{(n+1)}(x)\cdot g(x) + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)\cdot f^{(n+1-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x) + f(x)\cdot g^{(n+1)}(x) \\
= \quad & f^{(n+1)}(x)\cdot g(x) + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}\cdot f^{(n+1-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x) + f(x)\cdot g^{(n+1)}(x) \\
= \quad & \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\cdot f^{(n+1-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x).
\end{aligned}$$

Aufgabe 76:** (Implizite Differentiation; 10 Bonuspunkte)
Diese Aufgabe kann schriftlich bearbeitet werden. Bearbeitungen werden zu Beginn der Vorlesung am Mi, 29.6.05, eingesammelt.

Eine Funktion $y = f(x)$ ist als Lösung der Gleichung

$$y^3 + x^2\cdot y = e^{(x^2)}$$

definiert. Offensichtlich gilt $f(0) = 1$. Bestimme $f'(0)$.
Anleitung: differenziere die Identität $f(x)^3 + x^2\cdot f(x) = e^{(x^2)}$ nach x. Es ergibt sich eine Gleichung für $f'(x)$.

Musterlösung:
Für $x = 0$ ist $y = f(0)$ durch die Gleichung $y^3 + 0\cdot y = e^0 = 1$ definiert, woraus $y = f(0) = 1$ folgt. Durch Differentiation der definierenden Gleichung erhält man:

$$f(x)^3 + x^2\cdot f(x) = e^{(x^2)} \quad\Rightarrow\quad 3\cdot f(x)^2\cdot f'(x) + 2\cdot x\cdot f(x) + x^2\cdot f'(x) = 2\cdot x\cdot e^{(x^2)}.$$

Mit $x = 0$, $f(0) = 1$ ergibt sich

$$3\cdot f(0)^2\cdot f'(0) + 2\cdot 0\cdot f(0) + 0^2\cdot f'(0) = 2\cdot 0\cdot e^{(0^2)} \quad\Rightarrow\quad 3\cdot f'(0) = 0 \quad\Rightarrow\quad f'(0) = 0.$$

Aufgabe 77*: (Implizite Differentiation. 10 Bonuspunkte)
Seien $M_1, \ldots, M_4$ Zahlen (die von `hex` zufällig gewählt werden). Betrachte die durch die Gleichung

$$e^{M_1\cdot(y-M_2)} + M_3 \cdot y = 1 + M_2 \cdot M_3 \cdot e^{x-M_4}$$

definierte Funktion $y = f(x)$. Berechne $f(M_4)$ und $f'(M_4)$.
Anleitung: siehe Aufgabe 76.

Musterlösung:
Für $x = M_4$ ist $y = f(M_4)$ durch die Gleichung

$$e^{M_1\cdot(y-M_2)} + M_3 \cdot y = 1 + M_2 \cdot M_3 \quad \Rightarrow \quad e^{M_1\cdot(y-M_2)} = 1 - M_3 \cdot (y - M_2)$$

gegeben. Die Lösung ist $y = f(M_4) = M_2$. Durch Ableitung von

$$e^{M_1\cdot(f(x)-M_2)} + M_3 \cdot f(x) = 1 + M_2 \cdot M_3 \cdot e^{x-M_4}$$

erhält man

$$M_1 \cdot f'(x) \cdot e^{M_1\cdot(f(x)-M_2)} + M_3 \cdot f'(x) = M_2 \cdot M_3 \cdot e^{x-M_4}.$$

Mit $x = M_4$, $f(x) = f(M_4) = M_2$ ergibt sich die Gleichung

$$M_1 \cdot f'(M_4) + M_3 \cdot f'(M_4) = M_2 \cdot M_3 \quad \Rightarrow \quad f'(M_4) = \frac{M_2 \cdot M_3}{M_1 + M_3}.$$

Aufgabe 78*: (Differentiation von Umkehrfunktionen. 10 Bonuspunkt)
Seien $M_1, \ldots, M_4$ Zahlen (die von `hex` zufällig gewählt werden). Finde eine Formel, um die zweite Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} einer invertierbaren Funktion f an einer Stelle x durch Ableitungen von f an der Stelle $y = f^{-1}(x)$ auszudrücken. Berechne $(f^{-1})''(M_2 + M_3)$ für

$$f(y) = M_1 \cdot y + M_2 + M_3 \cdot e^{M_4\cdot y}.$$

Musterlösung:
Ableiten der Identität

$$(f^{-1})(f(y)) = y$$

nach y liefert über die Kettenregel

$$(f^{-1})'(f(y)) \cdot f'(y) = 1.$$

Erneutes Ableiten liefert

$$(f^{-1})''(f(y)) \cdot f'(y) \cdot f'(y) + (f^{-1})'(f(y)) \cdot f''(y) = 0.$$

Mit $(f^{-1})'(f(y)) = 1/f'(y)$ folgt

$$(f^{-1})''(f(y)) = -\frac{(f^{-1})'(f(y)) \cdot f''(y)}{f'(y)^2} = -\frac{f''(y)}{f'(y)^3}.$$

Sei $g = f^{-1}$, $x = f(y)$, $y = g(x)$:

$$g''(x) = -\frac{f''(g(x))}{f'(g(x))^3}.$$

Für

$$f(y) = M_1 \cdot y + M_2 + M_3 \cdot e^{M_4 \cdot y},$$
$$f'(y) = M_1 + M_3 \cdot M_4 \cdot e^{M_4 \cdot y},$$
$$f''(y) = M_3 \cdot M_4^2 \cdot e^{M_4 \cdot y}$$

ergibt sich

$$g''(x) = -\frac{M_3 \cdot M_4^2 \cdot e^{M_4 \cdot g(x)}}{\left(M_1 + M_3 \cdot M_4 \cdot e^{M_4 \cdot g(x)}\right)^3}.$$

Mit $f(0) = M_2 + M_3 \;\Rightarrow\; g(M_2 + M_3) = 0$ folgt

$$g''(M_2 + M_3) = -\frac{M_3 \cdot M_4^2}{(M_1 + M_3 \cdot M_4)^3}.$$

Abzugeben waren:

$$g(M_2 + M_3) = 0, \quad g'(M_2 + M_3) = \frac{1}{M_1 + M_3 \cdot M_4}, \quad g''(M_2 + M_3) = -\frac{M_3 \cdot M_4^2}{(M_1 + M_3 \cdot M_4)^3}.$$

Aufgabe 79: (Mittelwertsatz)

Sei $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, die $f'(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$ erfüllt. Zeige, dass f konstant ist.

Musterlösung:

Der Mittelwertsatz auf einem Intervall $[a, x] \subset [a, b]$ besagt

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi) = 0$$

(mit irgendeinem Zwischenwert ξ). Es folgt $f(x) = f(a)$ für jedes $x \in [a, b]$.
