Ü b u n g s b l a t t 10

Lösungen von $*$-Aufgaben sind per Web-Formular unter `http://math-www.upb.de/~walter` ($\longrightarrow$ Lehre SS 05 $\longrightarrow$ Übungen) bis spätestens Do, 23.6.05, abzuliefern.
Lösungen von $**$-Aufgaben sind schriftlich abzugeben. Sie werden zu Beginn der Vorlesung am Mi, 22.6.05 eingesammelt.

Aufgabe 65: (O-Kalkül für spezielle Funktionen)
Zeige:

$$a)\quad \frac{\sin(x^2)}{x\cdot\cos(x^3)} = O(x) \text{ im Limes } x\to 0,$$

$$b)\quad \frac{e^x\cdot(1-\cos(x^2))}{x^4} = O(1) \text{ im Limes } x\to 0,$$

$$c)\quad \frac{\sin(x)}{x} = O\Big(\frac{1}{x}\Big) \text{ im Limes } x\to\infty.$$

Musterlösung:
a) Es ist zu zeigen, dass

$$\frac{\sin(x^2)/(x\cdot\cos(x^3))}{x} = \frac{\sin(x^2)}{x^2\cdot\cos(x^3)}$$

auf einer Umgebung von $x=0$ beschränkt ist. Es gilt

$$\sin(x^2) = (x^2) - \frac{(x^2)^3}{3!} + \frac{(x^2)^5}{5!} + \cdots = x^2\cdot\Big(\underbrace{1-\frac{x^4}{3!}+\frac{x^8}{5!}-\cdots}_{f(x)}\Big).$$

Die konvergierende Reihe $f(x)$ ist auf einer Umgebung von $x=0$ beschränkt. Z.B. gilt für $|x|\le 1$

$$|f(x)| = \Big|1-\frac{x^4}{3!}+\frac{x^8}{5!}-\cdots\Big| \le 1+\frac{|x|^4}{3!}+\frac{|x|^8}{5!}+\cdots \le 1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\cdots$$
$$\le 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots = e.$$

Damit ist

$$\frac{\sin(x^2)}{x^2\cdot\cos(x^3)} = \frac{f(x)}{\cos(x^3)}$$

auf einer Umgebung von $x=0$ beschränkt (beachte, dass die stetige Funktion $\cos(x^3)$ in der Nähe von $x=0$ Werte in der Nähe der 1 annimmt).

b) Es ist zu zeigen, dass

$$\frac{e^x\cdot(1-\cos(x^2))}{x^4}$$

auf einer Umgebung von $x=0$ beschränkt ist. Es gilt

$$1-\cos(x^2) = 1-\Big(1-\frac{(x^2)^2}{2!}+\frac{(x^2)^4}{4!}+\cdots\Big) = x^4\cdot\Big(\underbrace{\frac{1}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\cdots}_{f(x)}\Big).$$

Die konvergierende Reihe $f(x)$ ist auf einer Umgebung von $x = 0$ beschränkt. Z.B. gilt für $|x| \leq 1$

$$|f(x)| = \Big|\frac{1}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots\Big| \leq \frac{1}{2!} + \frac{|x|^4}{4!} + \cdots \leq \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \cdots \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = e.$$

Damit ist

$$\frac{e^x \cdot (1 - \cos(x^2))}{x^4} = e^x \cdot f(x)$$

auf einer Umgebung von $x = 0$ beschränkt (beachte, dass die stetige Funktion e^x in der Nähe von $x = 0$ Werte in der Nähe der 1 annimmt).

c) Es ist zu zeigen, dass $\dfrac{\sin(x)/x}{1/x} = \sin(x)$ für alle hinreichend großen x beschränkt ist. In der Tat gilt $|\sin(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 66*: (O-Kalkül für spezielle Funktionen. 10 Bonuspunkte)
Seien M_1, M_2 Zahlen (die `hex` zufällig wählt). Gilt

$$1 - \cos(x^{M_1}) = O(x^{M_2}) \quad \text{im Limes } x \to 0 \text{ ?}$$

Es gibt nur einen Abgabeversuch für die Antwort `TRUE` (richtig) oder `FALSE` (falsch)!

Musterlösung:
Es ist zu prüfen, ob

$$\frac{1 - \cos(x^{M_1})}{x^{M_2}} = \frac{1}{x^{M_2}} \cdot \Big(1 - \Big(1 - \frac{(x^{M_1})^2}{2!} + \frac{(x^{M_1})^4}{4!} - \cdots\Big)\Big) = x^{2M_1 - M_2} \cdot \Big(\underbrace{\frac{1}{2!} - \frac{x^{2 \cdot M_1}}{4!} + \cdots}_{f(x)}\Big)$$

beschränkt ist. Die verbleibende Reihe $f(x)$ ist beschränkt (analog zu den Beweisen für Aufgabe 65). Damit ist der obige Ausdruck in einer Umgebung von $x = 0$ genau dann beschränkt, wenn $2 \cdot M_1 \geq M_2$ gilt. Die Aussage ist damit richtig für

$$2 \cdot M_1 \geq M_2.$$

Aufgabe 67:** (Spezielle Funktionen: Identitäten der trigonometrischen Funktionen. 10 Bonuspunkte)
Diese Aufgabe kann schriftlich bearbeitet werden. Bearbeitungen werden zu Beginn der Vorlesung am Mi, 22.6.05, eingesammelt.

a) Zeige für beliebiges $z \in \mathbb{C}$:

$$\sin\Big(\frac{\pi}{2} - z\Big) = \cos(z), \quad \cos\Big(\frac{\pi}{2} - z\Big) = \sin(z).$$

b) Folgere $\sin\Big(\dfrac{\pi}{4}\Big) = \cos\Big(\dfrac{\pi}{4}\Big) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

c) Zeige für beliebiges $x, y \in \mathbb{C}$:

$$\sin(x) \pm \sin(y) = 2 \cdot \cos\left(\frac{x \mp y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x \pm y}{2}\right).$$

Anleitung: Additionstheoreme.

Musterlösung:
a) Additionstheoreme:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(-z) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin(-z) = \cos(-z) = \cos(z),$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(-z) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin(-z) = -\sin(-z) = \sin(z).$$

b) Für $x = \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - x$ folgt

$$\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x).$$

Aus $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ folgt

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Wegen $\cos(x) > 0$ auf $[0, \frac{\pi}{2})$ kommt nur das positive Vorzeichen in Frage.

c) Es gilt $2 \cdot X = (X + Y) + (X - Y)$, $2 \cdot Y = (X + Y) - (X - Y)$. Die Additionstheoreme liefern

$$\sin(2 \cdot X) \pm \sin(2 \cdot Y) = \sin((X + Y) + (X - Y)) \pm \sin((X + Y) - (X - Y))$$

$$= \sin(X+Y)\cdot\cos(X-Y)+\cos(X+Y)\cdot\sin(X-Y)\pm\Big(\sin(X+Y)\cdot\cos(X-Y)-\cos(X+Y)\cdot\sin(X-Y)\Big).$$

Für $+$ ergibt sich

$$\sin(2 \cdot X) + \sin(2 \cdot Y) = 2 \cdot \sin(X + Y) \cdot \cos(X - Y),$$

für $-$ ergibt sich

$$\sin(2 \cdot X) - \sin(2 \cdot Y) = 2 \cdot \cos(X + Y) \cdot \sin(X - Y).$$

Mit $x = 2 \cdot X$, $y = 2 \cdot Y$ ergibt sich die behauptete Identität.

Aufgabe 68: (Spezielle Funktionen: tan und arctan. Mühselige technische Puzzelei.)
a) Wir führen die Tangens-Funktion $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$ ein. Sie ist für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\cdot\pi}{2}, \pm\frac{5\cdot\pi}{2}, \ldots\}$ definiert (an diesen Stellen gilt $\cos(x) \neq 0$). Zeige, dass sie die Symmetrie $\tan(-x) = -\tan(x)$ und die Periode π hat: $\tan(x + \pi) = \tan(x)$. Zeige, dass das Additionstheorem

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \cdot \tan(y)}$$

für alle x, y mit $x, y, x+y \not\in \{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\cdot\pi}{2}, \pm\frac{5\cdot\pi}{2}, \ldots\}$ gilt.
b) Zeige, dass für alle x, y im Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ gilt:

$$\tan(x)\cdot\tan(y) \begin{cases} = 1 & \text{für} \quad x+y = \pm\frac{\pi}{2}, \\ > 1 & \text{für} \quad x+y > \frac{\pi}{2} \text{ oder } x+y < -\frac{\pi}{2}, \\ > 1 & \text{für} \quad (x < 0 \text{ und } x+y < \frac{\pi}{2}) \text{ oder } (x > 0 \text{ und } x+y > -\frac{\pi}{2}), \\ < 1 & \text{für} \quad (x \geq 0 \text{ und } x+y < \frac{\pi}{2}) \text{ oder } (x \leq 0 \text{ und } x+y > -\frac{\pi}{2}). \end{cases}$$

Verwende hierzu ohne Beweis, dass $\tan(y)$ auf dem "Basisintervall" $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ streng monoton steigt.
c) Schränkt man $\tan(x)$ auf das Basisinterval $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ein, so ist der Tangens wegen der strengen Monotonie dort invertierbar. Die (wiederum streng monoton steigende) Umkehrfunktion wird als Arcus Tangens bezeichnet:

$$\arctan : \mathbb{R} \mapsto \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big).$$

Visualisiere MuPADs `arctan` mit MuPADs `plotfunc2d`. Bestimme $\arctan(0)$, $\arctan(\pm 1)$ und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \arctan(x)$.
d) Zeige, dass die Identität

$$\arctan(X) + \arctan(Y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{X+Y}{1-X\cdot Y}\right) & \text{für} \quad X\cdot Y < 1, \\ \arctan\left(\frac{X+Y}{1-X\cdot Y}\right) + \pi & \text{für} \quad X\cdot Y > 1,\ X > 0,\ Y > 0, \\ \arctan\left(\frac{X+Y}{1-X\cdot Y}\right) - \pi & \text{für} \quad X\cdot Y > 1,\ X < 0,\ Y < 0 \end{cases}$$

für alle $X, Y \in \mathbb{R}$ mit $X \cdot Y \neq 1$ gilt. Welche Identität gilt für $Y = \frac{1}{X}$?
Anleitung: benutze b).

Musterlösung:
a)

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x),$$

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{\sin(x)\cdot\cos(\pi) + \cos(x)\cdot\sin(\pi)}{\cos(x)\cdot\cos(\pi) - \sin(x)\cdot\sin(\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x),$$

$$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin(x)\cdot\cos(y) + \cos(x)\cdot\sin(y)}{\cos(x)\cdot\cos(y) - \sin(x)\cdot\sin(y)}$$

$$= \frac{\cos(y)\cdot\cos(x)\cdot\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\sin(y)}{\cos(y)}\right)}{\cos(x)\cdot\cos(y)\cdot\left(1 - \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\cdot\frac{\sin(y)}{\cos(y)}\right)} = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\cdot\tan(y)}.$$

b) Viele Fallunterscheidungen:

Sei $y = \pm\frac{\pi}{2} - x$:
Aus den Additionstheoremen für den Sinus und Cosinus und den speziellen Werten $\sin(\pm\frac{\pi}{2}) = \pm 1$, $\cos(\pm\frac{\pi}{2}) = 0$ ergibt sich:

$$\tan(x)\cdot\tan(y) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{\sin(\pm\frac{\pi}{2} - x)}{\cos(\pm\frac{\pi}{2} - x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{\sin(\pm\frac{\pi}{2})\cdot\cos(x) - \cos(\pm\frac{\pi}{2})\cdot\sin(x)}{\cos(\pm\frac{\pi}{2})\cdot\cos(x) + \sin(\pm\frac{\pi}{2})\cdot\sin(x)}$$

$$= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{\pm\cos(x)}{\pm\sin(x)} = 1.$$

Sei $x + y > \frac{\pi}{2}$:
Da $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ vorausgesetzt wurde, impliziert $x + y > \frac{\pi}{2}$, dass $x > 0$ gelten muß. Damit gilt $\tan(x) > 0$. Mit $\tan(x)\cdot\tan(y) = 1$ für $y = \frac{\pi}{2} - x$ folgt aus der strengen Monotonie von $\tan(y)$ das Resultat $\tan(x)\cdot\tan(y) > 1$ für $y > \frac{\pi}{2} - x$.
Sei $x + y < -\frac{\pi}{2}$:
Analog impliziert $x + y < -\frac{\pi}{2}$, dass $x < 0$ gelten muß. Damit gilt $\tan(x) < 0$. Mit $\tan(x)\cdot\tan(y) = 1$ für $y = -\frac{\pi}{2} - x$ folgt aus der strengen Monotonie von $\tan(y)$ das Resultat $\tan(x)\cdot\tan(y) > 1$ für $y < -\frac{\pi}{2} - x$.
Sei $x < 0$, $x + y < \frac{\pi}{2}$:
Für $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, also $\tan(x) < 0$, folgt aus $\tan(x)\cdot\tan(y) = 1$ für $y = \frac{\pi}{2} - x$ und der strengen Monotonie von $\tan(y)$ das Ergebnis $\tan(x)\cdot\tan(y) > 1$ für $y < \frac{\pi}{2} - x$.
Sei $x > 0$, $x + y > -\frac{\pi}{2}$:
Für $0 < x < \frac{\pi}{2}$, also $\tan(x) > 0$, folgt aus $\tan(x)\cdot\tan(y) = 1$ für $y = -\frac{\pi}{2} - x$ und der strengen Monotonie von $\tan(y)$ das Ergebnis $\tan(x)\cdot\tan(y) > 1$ für $y > -\frac{\pi}{2} - x$.
Sei $x \geq 0$, $x + y < \frac{\pi}{2}$:
Für $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, also $\tan(x) \geq 0$, folgt aus $\tan(x)\cdot\tan(y) = 1$ für $y = \frac{\pi}{2} - x$ und der strengen Monotonie von $\tan(y)$ das Ergebnis $\tan(x)\cdot\tan(y) < 1$ für $y < \frac{\pi}{2} - x$.
Sei $x \leq 0$, $x + y > -\frac{\pi}{2}$:
Für $-\frac{\pi}{2} < x \leq 0$, also $\tan(x) \leq 0$, folgt aus $\tan(x)\cdot\tan(y) = 1$ für $y = -\frac{\pi}{2} - x$ und der strengen Monotonie von $\tan(y)$ das Ergebnis $\tan(x)\cdot\tan(y) < 1$ für $y > -\frac{\pi}{2} - x$.

c) Offensichtlich gilt $\arctan(0) = 0$, denn $\tan(0) = 0$. Für $x = \frac{\pi}{4}$ gilt nach Aufgabe 67.b)

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad\Rightarrow\quad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad\Rightarrow\quad \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Mit $\arctan(-x) = -\arctan(x)$ folgt $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$.
Für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ gilt $\lim\limits_{x\to\pm\pi/2\mp 0} \tan(x) = \pm\infty$. Durch Spiegelung des Graphen von $\tan(x)$ auf dem Basisintervall an der Winkelhalbierenden erkennt man sofort:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \arctan(x) = \pm\frac{\pi}{2}.$$

d) Setze $x = \arctan(X)$, $y = \arctan(Y)$ in die Identität aus a) ein:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\cdot\tan(y)} \quad\Rightarrow\quad \tan(x+y) = \frac{X+Y}{1 - X\cdot Y}.$$

Sei $X \cdot Y < 1$:

Nach b) folgt $|x+y| < \frac{\pi}{2}$, wenn $\tan(x) \cdot \tan(y) = X \cdot Y < 1$ gilt, denn in b) wurde gezeigt, dass $\tan(x) \cdot \tan(y) \geq 1$ gilt für $|x+y| \geq \frac{\pi}{2}$. Damit liegt $x+y$ im Basisintervall und durch Anwenden von arctan folgt:

$$x + y = \arctan\left(\frac{X+Y}{1 - X \cdot Y}\right) \quad \Rightarrow \quad \arctan(X) + \arctan(Y) = \arctan\left(\frac{X+Y}{1 - X \cdot Y}\right).$$

<u>Sei $X \cdot Y > 1$, $X > 0$, $Y > 0$:</u>

Aus $X > 0, Y > 0$ folgt $x > 0, y > 0$. Mit b) folgt aus $X \cdot Y > 1$, dass $x + y > \frac{\pi}{2}$ gelten muss, denn in b) wurde gezeigt, dass $\tan(x) \cdot \tan(y) = X \cdot Y \leq 1$ für $x > 0$, $x + y \leq \frac{\pi}{2}$ gilt. Es folgt $x + y - \pi \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ und damit

$$\arctan(\tan(x+y)) = \arctan(\tan(x+y-\pi)) = x + y - \pi,$$

da $x + y - \pi$ im Basisintervall liegt. Aus

$$\tan(x+y) = \frac{X+Y}{1 - X \cdot Y}$$

folgt damit

$$x + y = \arctan(X) + \arctan(Y) = \arctan\left(\frac{X+Y}{1 - X \cdot Y}\right) + \pi.$$

<u>Sei $X \cdot Y > 1$, $X < 0$, $Y < 0$:</u>

Aus $X < 0, Y < 0$ folgt $x < 0, y < 0$. Mit b) folgt aus $X \cdot Y > 1$, dass $x + y < -\frac{\pi}{2}$ gelten muss, denn in b) wurde gezeigt, dass $\tan(x) \cdot \tan(y) = X \cdot Y \leq 1$ für $x < 0$, $x + y \geq -\frac{\pi}{2}$ gilt. Es folgt $x + y + \pi \in (0, \frac{\pi}{2})$ und damit

$$\arctan(\tan(x+y)) = \arctan(\tan(x+y+\pi)) = x + y + \pi,$$

da $x + y + \pi$ im Basisintervall liegt. Aus

$$\tan(x+y) = \frac{X+Y}{1 - X \cdot Y}$$

folgt damit

$$x + y = \arctan(X) + \arctan(Y) = \arctan\left(\frac{X+Y}{1 - X \cdot Y}\right) - \pi.$$

<u>Sei $X \cdot Y = 1$, $X > 0$, $Y > 0$:</u>

Aus $X > 0, Y > 0$ folgt $x > 0, y > 0$. Nach b) kann für $X \cdot Y = 1$ nur $x + y = \pm\frac{\pi}{2}$ gelten, wobei nur das positive Vorzeichen in Frage kommt. Also

$$x + y = \arctan(X) + \arctan\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{für} \quad X > 0.$$

<u>Sei $X \cdot Y = 1$, $X < 0$, $Y < 0$:</u>

Aus $X < 0, Y < 0$ folgt $x < 0, y < 0$. Nach b) kann für $X \cdot Y = 1$ nur $x + y = \pm\frac{\pi}{2}$ gelten, wobei nur das negative Vorzeichen in Frage kommt. Also

$$x + y = \arctan(X) + \arctan\left(\frac{1}{X}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{für} \quad X < 0.$$

Die letzten beiden Fälle lassen sich zusammenfassen zu

$$\arctan(X) + \arctan\left(\frac{1}{X}\right) = \operatorname{sign}(X) \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{für} \quad X \neq 0.$$

Aufgabe 69: (Spezielle Funktionen: Ableitung der Exponentialfunktion)
Zeige $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$ und folgere hieraus $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^{z+h} - e^z}{h} = e^z$ für jedes $z \in \mathbb{C}$.

Musterlösung:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \Big(h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \cdots\Big) = \lim_{h\to 0} \Big(1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \cdots\Big) \\ &= 1 + \lim_{h\to 0} \Big(\frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \cdots\Big) = 1 + \lim_{h\to 0} h \cdot \Big(\underbrace{\frac{1}{2!} + \frac{h}{3!} + \cdots}_{f(h)}\Big).\end{aligned}$$

Die verbleibende Reihe $f(h)$ konvergiert nach den Rechenregeln (ihr Wert ist $\frac{1}{h} \cdot (\frac{e^h-1}{h} - 1)$). Sie ist beschränkt in h: für $|h| \le 1$ folgt z.B.

$$|f(h)| \le \frac{1}{2!} + \frac{|h|}{3!} + \cdots < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = e$$

Damit folgt:

$$\frac{e^h - 1}{h} = 1 + O(h) \quad \Rightarrow \quad \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

(Dieser Grenzwert ist die Ableitung der exp-Funktion am Nullpunkt.) Mit der Funktionalgleichung $e^{z+h} = e^z \cdot e^h$ folgt

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{z+h} - e^z}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^z \cdot e^h - e^z}{h} = e^z \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^z.$$

Dieser Grenzwert liefert die Ableitung der exp-Funktion an jedem beliebigen Punkt $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 70: (Spezielle Funktionen: Ableitung der trigonometrischen Funktionen)
Zeige

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1, \quad \lim_{h\to 0} \frac{1 - \cos(h)}{h} = 0$$

und folgere hieraus

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(z + h) - \sin(z)}{h} = \cos(z), \quad \lim_{h\to 0} \frac{\cos(z + h) - \cos(z)}{h} = -\sin(z)$$

für jedes $z \in \mathbb{C}$. Anleitung für den letzten Teil: Additionstheoreme.

Musterlösung:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \Big(h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} + \cdots\Big) = \lim_{h\to 0} \Big(1 - \frac{h^2}{3!} + \frac{h^4}{5!} + \cdots\Big) \\ &= 1 - \lim_{h\to 0} \Big(\frac{h^2}{3!} - \frac{h^4}{5!} + \cdots\Big) = 1 - \lim_{h\to 0} h^2 \cdot \Big(\underbrace{\frac{1}{3!} - \frac{h^2}{5!} + \cdots}_{f(h)}\Big).\end{aligned}$$

Die verbleibende Reihe $f(h)$ konvergiert nach den Rechenregeln (ihr Wert ist $\frac{1}{h^2} \cdot (\frac{\sin(h)}{h} - 1)$). Sie ist beschränkt in h: für $|h| \leq 1$ folgt z.B.

$$|f(h)| \leq \frac{1}{3!} + \frac{|h|^2}{5!} + \cdots \leq \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \cdots < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots = e$$

Damit folgt:

$$\frac{\sin(h)}{h} = 1 + O(h^2) \quad \Rightarrow \quad \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1.$$

Analog:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1 - \cos(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \Big(\frac{h^2}{2!} - \frac{h^4}{4!} + \cdots \Big) = \lim_{h \to 0} \Big(\frac{h}{2!} - \frac{h^3}{4!} + \cdots \Big) = \lim_{h \to 0} h \cdot \Big(\underbrace{\frac{1}{2!} - \frac{h^2}{4!} + \cdots}_{f(h)} \Big),$$

wo die verbleibende Reihe $f(h)$ wiederum beschränkt ist (mit den selben Argumenten wie oben gilt $|f(h)| \leq e$ für $|h| < 1$). Es folgt:

$$\frac{1 - \cos(h)}{h} = O(h) \quad \Rightarrow \quad \lim_{h \to 0} \frac{1 - \cos(h)}{h} = 0.$$

Mit den Additionstheoremen

$$\sin(z + h) = \sin(z) \cdot \cos(h) + \cos(z) \cdot \sin(h),$$

$$\cos(z + h) = \cos(z) \cdot \cos(h) - \sin(z) \cdot \sin(h)$$

folgt

$$\frac{\sin(z + h) - \sin(z)}{h} = \frac{\sin(z) \cdot \cos(h) + \cos(z) \cdot \sin(h) - \sin(z)}{h} = \sin(z) \cdot \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(z) \cdot \frac{\sin(h)}{h},$$

$$\frac{\cos(z + h) - \cos(z)}{h} = \frac{\cos(z) \cdot \cos(h) - \sin(z) \cdot \sin(h) - \cos(z)}{h} = \cos(z) \cdot \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(z) \cdot \frac{\sin(h)}{h}.$$

Die obigen Ergebnisse liefern

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(z + h) - \sin(z)}{h} = \cos(z), \quad \lim_{h \to 0} \frac{\cos(z + h) - \cos(z)}{h} = -\sin(z).$$

Diese Grenzwerte liefern die Ableitung der Sinus- bzw. Cosinus-Funktion.

Aufgabe 71: (Polarkoordinaten)

Bestimme die Polarkoordinaten (r, φ) der folgenden komplexen Zahlen:

$$1, \quad i, \quad -1, \quad -i, \quad 1 + i, \quad -1 + i, \quad -1 - i, \quad 1 - i.$$

Der Polarwinkel einer komplexen Zahl z wird auch „das Argument" von z genannt. Die MuPAD-Funktion dazu: `abs` (= Absolutbetrag = Radius), `arg` (= Argument = Polarwinkel).

Musterlösung:
a) $|1| = 1$, Polarwinkel$(1) = 0$.
b) $|i| = 1$, Polarwinkel$(i) = \frac{\pi}{2}$.
c) $|-1| = 1$, Polarwinkel$(-1) = \pi$.
d) $|-i| = 1$, Polarwinkel$(-i) = \frac{3\cdot\pi}{2}$.
e) $|1+i| = \sqrt{2}$, Polarwinkel$(1+i) = \frac{\pi}{4}$. Kontrolle (beachte $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$):

$$r \cdot e^{i\cdot\varphi} = \sqrt{2}\cdot(\cos(\pi/4) + i\cdot\sin(\pi/4)) = 1 + i.$$

f) $|i-1| = \sqrt{2}$, Polarwinkel$(i-1) = \frac{3\cdot\pi}{4}$. Kontrolle (beachte $\sin(3\cdot\pi/4) = -\cos(3\cdot\pi/4) = 1/\sqrt{2}$):

$$r \cdot e^{i\cdot\varphi} = \sqrt{2}\cdot(\cos(3\cdot\pi/4) + i\cdot\sin(3\cdot\pi/4)) = -1 + i.$$

g) $|-1-i| = \sqrt{2}$, Polarwinkel$(-1-i) = \frac{5\cdot\pi}{4}$. Kontrolle (beachte $\sin(5\cdot\pi/4) = \cos(5\cdot\pi/4) = -1/\sqrt{2}$):

$$r \cdot e^{i\cdot\varphi} = \sqrt{2}\cdot(\cos(5\cdot\pi/4) + i\cdot\sin(5\cdot\pi/4)) = -1 - i.$$

h) $|1-i| = \sqrt{2}$, Polarwinkel$(1-i) = \frac{7\cdot\pi}{4}$. Kontrolle (beachte $-\sin(7\cdot\pi/4) = \cos(7\cdot\pi/4) = 1/\sqrt{2}$):

$$r \cdot e^{i\cdot\varphi} = \sqrt{2}\cdot(\cos(7\cdot\pi/4) + i\cdot\sin(7\cdot\pi/4)) = 1 - i.$$

Aufgabe 70*: (Komplexe Wurzeln. 10 Bonuspunkte)
Seien M_1, M_2, M_3 reelle Zahlen (die von `hex` zufällig gewählt werden). Bestimme die Polarkoordinaten von

$$a = M_1 + i \cdot M_2$$

(der Polarwinkel läßt sich bei den von `hex` gewählten Zahlen exakt ausdrücken). Bestimme die komplexen Wurzeln

$$(i^{M_3} \cdot a)^{1/5},$$

also alle Lösungen z_0, z_1, z_2 etc. von $z^5 = i^{M_3} \cdot a$. Abzugeben sind einige der Lösungen (in der Nummerierung wie in Bemerkung 5.21 der Vorlesung). Sie sind über ihren Betrag und ihren Polarwinkel $\in [0, 2\cdot\pi)$ anzugeben. Für π ist das MuPAD-Symbol `PI` zu verwenden.
Relevante MuPAD-Funktionen zur Kontrolle: `abs, arg, arctan, numeric::polyroots`.

Musterlösung:
Es gilt

$$|a| = \sqrt{M_1^2 + M_2^2}$$

und

$$\Re(a) = M_1 = |a|\cdot\cos(\psi_1), \quad \Im(a) = M_2 = |a|\cdot\sin(\psi_1).$$

`hex` wählt $M_2 = \pm M_1$. Für $\Re(a) \neq 0$ folgt

$$\tan(\psi_1) = \frac{M_1}{M_2} = \pm 1.$$

Je nachdem, ob a im ersten, zweiten, dritten oder vierten Quadranten der komplexen Ebene liegt, ergibt sich

$$\psi_1 = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

bzw.

$$\psi_1 = \arctan(1) + \frac{\pi}{2} = \frac{3 \cdot \pi}{4}$$

bzw.

$$\psi_1 = \arctan(1) + \pi = \frac{5 \cdot \pi}{4}$$

bzw.

$$\psi_1 = \arctan(1) + \frac{3 \cdot \pi}{2} = \frac{7 \cdot \pi}{4}.$$

Die Zahl i^{M_3} hat den Betrag 1 und den Polarwinkel $\psi_2 = M_3 \cdot \frac{\pi}{2}$. Es folgt die Polardarstellung $i^{M_3} \cdot a = |a| \cdot e^{i \cdot (\psi_1 + \psi_2)}$. Für die richtige Nummerierung der Wurzeln ist **dieser Polarwinkel** $\psi_1 + \psi_2$ durch Subtrahieren eines geeigneten Vielfachen von $2\,\pi$ **auf das Basisinterval** $[0, 2\,\pi)$ **zu reduzieren**:

$$\psi_3 = \psi_1 + \psi_2 - \left\lfloor \frac{\psi_2 + \psi_2}{2 \cdot \pi} \right\rfloor \cdot 2 \cdot \pi.$$

Die Wurzeln sind dann

$$\boxed{z_k = |a|^{\frac{1}{5}} \cdot e^{i \cdot \frac{\psi_3}{5} + i \cdot \frac{k \cdot 2 \cdot \pi}{5}}, \quad k = 0, 1, \ldots, 4.}$$

Z.B. $M_1 = -2$, $M_2 = -2$, $M_3 = 3$:

$$|a| = \sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{2}, \quad \psi_1 = \frac{5 \cdot \pi}{4}, \quad \psi_2 = 3 \cdot \frac{\pi}{2}, \quad \psi_1 + \psi_2 = \frac{11 \cdot \pi}{4} = \frac{3 \cdot \pi}{4} \; + \; 2 \cdot \pi.$$

Reduktion von $\psi_1 + \psi_2$ auf den Bereich $[0, 2 \cdot \pi)$ liefert:

$$\psi_3 = \psi_1 + \psi_2 - 2 \cdot \pi = \frac{3 \cdot \pi}{4}.$$

Die 5 fünften Wurzeln sind damit:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \left(2 \cdot \sqrt{2}\right)^{1/5} \cdot \left(\cos\left(\frac{3 \cdot \pi}{20}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \pi}{20}\right)\right), \\
z_1 &= \left(2 \cdot \sqrt{2}\right)^{1/5} \cdot \left(\cos\left(\frac{11 \cdot \pi}{20}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{11 \cdot \pi}{20}\right)\right), \\
z_2 &= \left(2 \cdot \sqrt{2}\right)^{1/5} \cdot \left(\cos\left(\frac{19 \cdot \pi}{20}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{19 \cdot \pi}{20}\right)\right), \\
z_3 &= \left(2 \cdot \sqrt{2}\right)^{1/5} \cdot \left(\cos\left(\frac{27 \cdot \pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{27 \cdot \pi}{4}\right)\right), \\
z_4 &= \left(2 \cdot \sqrt{2}\right)^{1/5} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right).
\end{aligned}$$
