Übungsblatt 1

Mit $*$ gekennzeichnete Aufgaben können zum Sammeln von Bonuspunkten verwendet werden. Lösungen sind per Web-Formular unter `http://math-www.upb.de/~walter` ($\longrightarrow$ Lehre SS 05 $\longrightarrow$ Übungen) abzuliefern bis spätestens So, 24.4.05, $23^{\underline{59}}$ Uhr.

Aufgabe 1*: (Erinnerung an das letzte Semester: lineare Gleichungen. 10 Bonuspunkte)
Seien M_1, M_2, ... gegebene Zahlen (die vom Abgabetool zufällig gewählt werden). Bestimme alle Lösungen x, y, z des Gleichungsystems

$$M_1 \cdot y + M_2 \cdot z = M_3, \quad M_1 \cdot x + 2 \cdot y = M_4, \quad M_2 \cdot x + 3 \cdot z = M_5.$$

Relevante MuPAD-Funktionen: `solve, linsolve`.

Musterlösung:
Hier nur die mit MuPAD ermittelten Endergebnisse:

```
>> linsolve({       M1*y + M2*z = M3,
             M1*x +  2*y        = M4,
             M2*x        +  3*z = M5},
            {x, y, z})

--
|      3 M1 M4 - 6 M3 + 2 M2 M5
|  x = ------------------------,
|                2       2
--           3 M1  + 2 M2

                                  2
       3 M1 M3 - M1 M2 M5 + M2  M4
   y = ---------------------------,
                  2       2
              3 M1  + 2 M2

                                  2    --
       2 M2 M3 - M1 M2 M4 + M1  M5  |
   z = ---------------------------  |
                  2       2         |
              3 M1  + 2 M2         --
```

Aufgabe 2*: (Erinnerung an das letzte Semester: Eigenwerte. 10 Bonuspunkte)
Seien M_1, M_2, M_3 wie in Aufgabe 1. Bestimme die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} M_1 & M_2 & 0 \\ M_2 & -M_1 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{pmatrix}.$$

Relevante MuPAD-Funktionen: `matrix, linalg::eigenvalues, sqrt`.

Musterlösung:
Hier nur die mit MuPAD ermittelten Endergebnisse:

```
>> A:= matrix([[M1, M2, 0], [M2, -M1, 0], [0, 0, M3]]):
```

Das charakteristische Polynom $\det(x \cdot I_3 - A)$:

```
>> linalg::charpoly(A, x)

         3       2          2     2                 2     2
        x  - M3 x  + (- M1  - M2 ) x - M3 (- M1  - M2 )

>> linalg::eigenvalues(A)

                     2     2 1/2        2     2 1/2
              {M3, (M1  + M2 )   , - (M1  + M2 )   }
```

Aufgabe 3: (MuPAD)
Lies die MuPAD–Hilfeseiten zu `Re`, `Im`, `conjugate` und `rectform` (interaktiv durch `?Re` etc. aufzurufen). Sei $z = (1+i\cdot\sqrt{2}\,)/(1-i)$. Zerlege z^5 mit MuPAD in Real- und Imaginärteil.

Musterlösung:

```
>> z:= (1 + sqrt(2)*I)/(1 - I);
>> z^5

                                                    1/2 5
               ((1/2 + 1/2 I) - (1/2 - 1/2 I) 2   )
```

`rectform` zerlegt in Real- und Imaginärteil:

```
>> rectform(z^5)

               /     1/2        \      /     1/2        \
               | 11 2           |      | 11 2           |
             - | ------- + 1/8 | + I | ------- - 1/8 |
               \    8           /      \    8           /
```

Aufgabe 4: (Komplexe Zahlen)
Seien $i = \sqrt{-1}$. $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = 1 + i \cdot \sqrt{15}$. Berechne für $k = 1, 2, 3$

$$a)\quad \frac{1}{z_k}, \qquad b)\quad \overline{z_k}, \qquad c)\quad |z_k| \qquad \text{sowie} \qquad d)\quad z_1 \cdot z_2, \quad \frac{z_2}{z_3}, \quad z_1^4.$$

Musterlösung:
a)

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)\cdot(1-i)} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}, \quad \frac{1}{z_2} = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)\cdot(1+i)} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2},$$

$$\frac{1}{z_3} = \frac{1}{(1+i\cdot\sqrt{15})} = \frac{1-i\cdot\sqrt{15}}{(1+i\cdot\sqrt{15})\cdot(1-i\cdot\sqrt{15})} = \frac{1-i\cdot\sqrt{15}}{16} = \frac{1}{16} - i\cdot\frac{\sqrt{15}}{16},$$

b)

$$\overline{z_1} = 1 - i, \quad \overline{z_2} = 1 + i, \quad \overline{z_3} = 1 - i \cdot \sqrt{15}\ ,$$

c)

$$|z_1| = \sqrt{2}, \quad |z_2| = \sqrt{2}, \quad |z_3| = \sqrt{1+15} = 4,$$

d)

$$z_1 \cdot z_2 = (1+i)\cdot(1-i) = 1 - i^2 = 2.$$

Mit a) gilt $1/z_3 = (1 - i\cdot\sqrt{15})/16$:

$$\frac{z_2}{z_3} = (1-i)\cdot\frac{1-i\cdot\sqrt{15}}{16} = \frac{1-\sqrt{15}-i\cdot(1+\sqrt{15})}{16} = \frac{1-\sqrt{15}}{16} - i\cdot\frac{1+\sqrt{15}}{16},$$

$$z_1^4 = ((z_1)^2)^2 = ((1+i)^2)^2 = (1+2\cdot i+i^2)^2 = (1+2\cdot i-1)^2 = (2\cdot i)^2 = -4.$$

Aufgabe 5*: (Komplexe Zahlen, 10 Bonuspunkte)
Seien M_1, M_2, M_3 wie in Aufgabe 1, $i = \sqrt{-1}$. Seien $z_1 = M_1 + i \cdot M_2$, $z_2 = M_1 - i \cdot M_2$, $z_3 = M_1 + i \cdot M_3$. Berechne $z = z_1 \cdot z_2 / z_3$ in Kartesischen Koordinaten, d.h., als $z = x + i \cdot y$ mit reellem x, y.
Relevante MuPAD-Objekte: `I, rectform, sqrt`.

Musterlösung:
Hier nur die mit MuPAD ermittelten Endergebnisse:

```
>> z1:= M1 + I*M2: z2:= M1 - I*M2: z3:= M1 + I*M3:
>> rectform(z1*z2/z3);

/                                       /                   2    \ \
|    /   M1 M2       M1 M3   \       |   M2 M3        M1     | |
| M2 | --------- - --------- | + M1 | --------- + --------- | |
|    |   2     2     2     2 |       |   2     2     2     2 | |
\    \ M1  + M3    M1  + M3  /       \ M1  + M3    M1  + M3  / /
```

```
          /
          |    /   M1 M2       M1 M3   \
      + I | M1 | --------- - --------- | -
          |    |   2     2     2     2 |
          \    \ M1  + M3    M1  + M3  /

        /                  2    \ \
        |   M2 M3         M1     | |
     M2 | --------- + --------- | |
        |   2     2     2     2 | |
        \ M1  + M3    M1  + M3  / /
```

```
>> normal(%);
```

```
               3        2   /     2         2    \
             M1  + M1 M2    | - M1  M3 - M2  M3 |
             ----------- + | ----------------- | I
                 2     2    |       2     2      |
               M1  + M3     \     M1  + M3       /
```

Aufgabe 6: (Komplexe Lösungen quadratischer Gleichungen)
Bestimme alle Nullstellen des Polynoms $z^2 + z + 1$.
Relevante MuPAD-Funktionen: `solve`.

Musterlösung:
Die aus der Schule bekannte übliche Wuzelformel

$$z_\pm = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

für die Gleichung $z^2 + p \cdot z + q = 0$ liefert für $p = q = 1$:

$$z_\pm = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i \cdot \sqrt{3}}{2}.$$
