W. Oevel

Mathematik II für Informatiker

Veranstaltungsnr: 172010

Skript zur Vorlesung, Universität Paderborn, Sommersemester 2005

Inhalt

Literatur

Die Vorlesung baut nicht streng auf irgendeinem Buch auf, sondern geht ihren eigenen Weg. Die angegebenen Referenzen dienen dazu, sich *unabhängig* vom Skript entsprechende Grundlagen anzueignen oder spezielle Inhalte zu vertiefen. Es handelt sich um eine recht willkürliche Auswahl: Neben den angegebenen Büchern gibt es sicherlich jede Menge weiterer Literatur, die den behandelten Stoff analog abdeckt.

[Pap] Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. Band 1 - 3 + Mathematische Formelsammlung. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg 2001. (P41 TBG2788)

Recht elementar und mathematisch nicht sehr tief gehend; dafür leicht und angenehm zu lesen. Ist ein Standardbuch und großer Renner bei den Ingenieuren. Hier steht zwar „für Ingenieure und Naturwissenschaftler" drauf, diese Reihe ist aber allgemein für eine anwendungsorientierte Kundschaft sehr geeignet, die sich weniger für das Abstrakte in der Mathematik interessiert. Übungen und Anwendungsbeispiele sind allerdings speziell auf Ingenieure zugeschnitten.
Im Wesentlichen ist hier **Band 1** interessant: er umfaßt Folgen, Reihen, Stetigkeit, Differentialrechnung, spezielle Funktionen und Integration (der Stoff der Mathe II).
Band 2 umfaßt die Lineare Algebra (Stoff der Mathe I des letzten Semesters), komplexe Zahlen und viele weitere Dinge, die für diese Vorlesung aber nicht so interessant sind.
Band 3 umfaßt mehrdimensionale Differential- und Integralrechnung sowie Stochastik und ist für uns nicht so interessant.

[TI] S. Timman: Repetitorium der Analysis (Teil 1) Springe: Binomi-Verlag.

Eigentlich keine 'Repetitorium', sondern eine vollständige Einführung mit Definitionen etc. Recht elementar geschrieben, sehr übersichtlich. Gelungener Kompromiss zwischen mathematischem Tiefgang und guter Lesbarkeit auf für Nicht-Mathematiker. Grundlagen, Folgen und Reihen, Stetigkeit, Differential-und Integralrechnung (der Stoff der Mathe II). Zahlreiche Übungsaufgaben mit Musterlösungen.

[KS] K.-H. Kiyek und F. Schwarz: Mathematik für Informatiker 1 + 2. Stuttgart: Teubner 1996 + 1994. (P41 TBM1740)

Deutlicher formaler, abstrakter und anspruchsvoller als z.B. [Pap].
Band 1 umfaßt Folgen, Reihen, Stetigkeit, Differential- und Integralrechnung (der Stoff der Mathe II). **Band 2** ist für uns nicht so relevant.

[BK] G. Baron und P. Kirschenhofer: Einführung in die Mathematik für Informatiker 1 - 3. Wien: Springer 1990. (P41 TBM1732)

Liegt vom Anspruch und Abstraktionsgrad zwischen [Pap] und [KS]. **Band 2** umfaßt Folgen, Reihen, Stetigkeit, Differential- und Integralrechnung (der Stoff der Mathe II). **Band 1** umfaßt Grundlagen, komplexe Zahlen, Lineare Algebra, Polynome. **Band 3** ist für uns nicht so relevant.

[For] O. Forster: Analysis 1 - 3. Vieweg. 2001. (P41 TIA 2647)

Abstrakt und anspruchsvoller. Recht kompakt. Standardwerk für Mathematikstudenten. **Band 1** umfaßt Folgen, Reihen, Stetigkeit, Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen (der Stoff der Mathe II). Die **Bände 2** und **3** umfassen die mehrdimensionale Analysis und sind für uns nicht so relevant.

[Bla] C. Blatter: Analysis 1 + 2. Berlin: Springer 1991. (P41 THX1325)

Abstrakt und anspruchsvoller. Recht kompakt. **Band 1** umfaßt Folgen, Reihen, Stetigkeit, Differential- und Integralrechnung (der Stoff der Mathe II). **Band 2** ist für uns nicht so relevant.

Bei starken Defiziten in der Schulmathematik schaue man z.B. in:

[Sch] Jochen Schwarze: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Band 1: Grundlagen. Herne: Verlag deutsche Wirtschafts-Briefe GmbH 1996.

Extrem elementar. Nur zum Aufarbeiten fehlender Grundlagen aus der Schule, falls es daran hapert.

Kapitel 1

Komplexe Zahlen

$\boxed{\downarrow 12.4.05}$

Motivation: die Gleichung $x^2 = -1$ hat offensichtlich keine reellen Lösungen, da $x^2 \geq 0$ für jedes reelle x gilt. Um auch diese Gleichung lösen zu können, muß man neue Zahlen einführen: die **komplexen Zahlen**. Die grundsätzliche Idee ist ganz einfach: man führt ein neues Symbol i ein, das $\sqrt{-1}$ repräsentieren soll. Es wird einzig und allein durch die Rechenregel $i^2 = -1$ festgelegt. Ansonsten behält man alle aus dem Reellen bekannten Rechenregeln einfach bei.

1.1 Definitionen

Definition 1.1: (Die komplexen Zahlen)

Die **Menge der komplexen Zahlen** $\mathbb{C}$ *ist die Menge aller formalen Summen der Form*

$$\mathbb{C} = \{x + i \cdot y;\ x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Für $z = x + i \cdot y \in \mathbb{C}$ nennt man x den **Realteil** *und y den* **Imaginärteil** *von z.*
Zahlen $z = x + i \cdot 0$ mit $y = 0$ nennt man **reell**, *schreibt auch kurz $z = x$ und identifiziert z mit $x \in \mathbb{R}$.*
Zahlen $z = 0 + i \cdot y$ mit $x = 0$ nennt man **imaginär** *und schreibt auch kurz $z = i \cdot y$.*
Der **Nullpunkt** *$z = 0 + i \cdot 0$ wird auch kurz als $z = 0$ geschrieben.*
Auf $\mathbb{C}$ definieren wir die Addition

$$z_1 + z_2 = (x_1 + i \cdot y_1) + (x_2 + i \cdot y_2) = \underbrace{(x_1 + x_2)}_{\in\mathbb{R}} + i \cdot \underbrace{(y_1 + y_2)}_{\in\mathbb{R}}$$

sowie die Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + i \cdot y_1) \cdot (x_2 + i \cdot y_2) = \underbrace{(x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2)}_{\in\mathbb{R}} + i \cdot \underbrace{(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)}_{\in\mathbb{R}}.$$

Interpretation 1.2:

Hinter dieser Definition der Multiplikation steckt $i^2 = -1$:

$$i \cdot i = (0 + i \cdot 1) \cdot (0 + i \cdot 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + i \cdot (0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = -1.$$

Man braucht sich die formale Definition der Multiplikation nicht zu merken: man benutze einfach die üblichen aus $\mathbb{R}$ bekannten Rechenregeln (Kommutativität $a \cdot b = b \cdot a$, Assoziativität $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, das Distributivgesetz $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ etc.), und setze beim Rechnen

$$i^2 = -1, \quad i^3 = (i^2) \cdot i = -i, \quad i^4 = (i^3) \cdot i = (-i) \cdot i = -(i^2) = 1$$

usw. ein:

$$(x_1 + i \cdot y_1) \cdot (x_2 + i \cdot y_2) = x_1 \cdot x_2 + i \cdot x_1 \cdot y_2 + i \cdot x_2 \cdot y_1 + \underbrace{i^2}_{-1} \cdot y_1 \cdot y_2$$

$$= x_1 \cdot x_2 + i \cdot x_1 \cdot y_2 + i \cdot x_2 \cdot y_1 - y_1 \cdot y_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i \cdot (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1).$$

Folgerung 1.3:

Wir konstruieren eine Division für $z = x + i \cdot y \neq 0 + i \cdot 0 \equiv 0$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + i \cdot y} = \frac{1}{x + i \cdot y} \cdot \frac{x - i \cdot y}{x - i \cdot y}$$

$$= \frac{x - i \cdot y}{(x + i \cdot y) \cdot (x - i \cdot y)} = \frac{x - i \cdot y}{x^2 - (i \cdot y)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Allgemein:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + i \cdot y_1}{x_2 + i \cdot y_2} = \frac{(x_1 + i \cdot y_1) \cdot (x_2 - i \cdot y_2)}{(x_2 + i \cdot y_2) \cdot (x_2 - i \cdot y_2)}$$

$$= \frac{(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2) + i \cdot (-x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)}{x_2^2 + y_2^2 + i \cdot (x_2 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_2)}$$

$$= \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Definition 1.4: (komplexe Konjugation etc.)

Es werden folgende speziellen Operationen auf den komplexen Zahlen eingeführt:

$\Re(z)$	$=$	$\Re(x + i \cdot y)$	$=$	x	*(der* **Realteil** *von z),*
$\Im(z)$	$=$	$\Im(x + i \cdot y)$	$=$	y	*(der* **Imaginärteil** *von z),*
$\lvert z\rvert$	$=$	$\lvert x + i \cdot y\rvert$	$=$	$\sqrt{x^2 + y^2}$	*(der* **Betrag** *von z),*
$\overline{z}$	$=$	$\overline{x + i \cdot y}$	$=$	$x - i \cdot y$	*(das* **komplex Konjugierte** *von z).*

Merkregel 1.5:

Die Division komplexer Zahlen läuft auf den Standardtrick „Erweitern mit dem komplex konjugierten Nenner hinaus“:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + i \cdot y_1}{x_2 + i \cdot y_2} = \frac{(x_1 + i \cdot y_1) \cdot (x_2 - i \cdot y_2)}{(x_2 + i \cdot y_2) \cdot (x_2 - i \cdot y_2)} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2}.$$

Satz 1.6: (Rechenregeln)

Für alle $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt: „Kommutativität“ und „Assoziativität“ von Multiplikation und Division

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1, \quad (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3),$$

$$\frac{1}{z_1 \cdot z_2} = \frac{1}{z_2} \cdot \frac{1}{z_1}, \quad \Big(\frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2}\Big) \cdot \frac{1}{z_3} = \frac{1}{z_1} \cdot \Big(\frac{1}{z_2} \cdot \frac{1}{z_3}\Big),$$

„Linearität“ *von $\Re$, $\Im$ und Konjugation*

$$\Re(z_1+z_2) = \Re(z_1)+\Re(z_2), \quad \Im(z_1+z_2) = \Im(z_1)+\Im(z_2), \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1+\overline{z}_2,$$

„Multiplikativität“ *des Betrags und der Konjugation*

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \quad \overline{\Big(\frac{z_1}{z_2}\Big)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

sowie die Beziehungen

$$|z|^2 = |\overline{z}|^2 = z \cdot \overline{z} = \Re(z)^2 + \Im(z)^2, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{|z_2|^2}$$

und die **„Dreiecksungleichung“***:*

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|.$$

Beweis: Alles ist direkt nachzurechnen, z.B.

$$z \cdot \overline{z} = (x + i \cdot y) \cdot (x - i \cdot y) = x^2 + y^2 = |z|^2 = |\overline{z}|^2$$

oder (wie schon oben durchgeführt):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

Q.E.D.

Beispiel 1.7: In MuPAD wird $i = \sqrt{-1}$ durch `I` dargestellt:

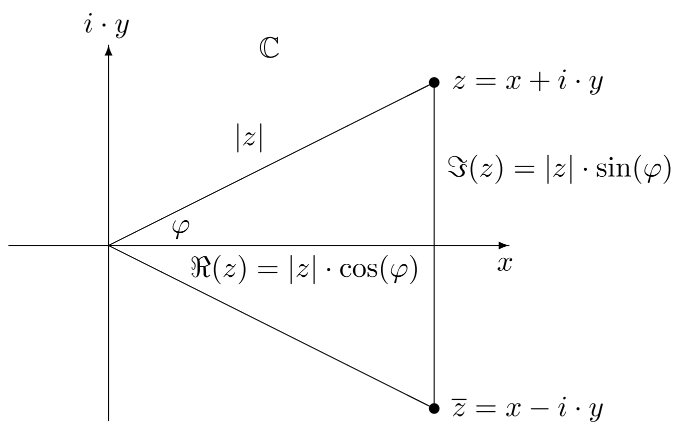
```
>> sqrt(-1)
                                        I
>> I^2
                                       -1
```

Die MuPAD-Funktionen `Re`, `Im`, `conjugate` und `abs` berechnen Real- und Imaginärteil, komplexe Konjugation und den Absolutbetrag:

```
>> z:= 2 + 3*I:
>> Re(z), Im(z), conjugate(z), abs(z)
                                                  1/2
                          2, 3, 2 - 3 I, 13
```

Geometrische Interpretation 1.8:

*Man stellt sich üblicherweise die Menge der komplexen Zahlen als 2-dimensionale Ebene (**„die komplexe Ebene“**) vor:*



*Der Betrag von z ist der Abstand zum Ursprung, komplexe Konjugation entspricht der Spiegelung an der x-Achse (**„die reelle Achse“**). Die y-Achse wird auch als **„imaginäre Achse“** bezeichnet.*

Geometrisch ist $\mathbb{C}$ nichts anderes als $\mathbb{R}^2$: $x + i \cdot y \in \mathbb{C} \mathrel{\widehat{=}} (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Die komplexe Addition entspricht genau der Addition von Vektoren im $\mathbb{R}^2$. Algebraisch besteht der Unterschied zwischen $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$ darin, dass man auf $\mathbb{C}$ neben der Addition noch eine Multiplikation $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ hat, wohingegen es auf $\mathbb{R}^2$ keine interessante Multiplikation zweier Vektoren gibt, die wieder einen Vektor liefert (außer derjenigen, die $\mathbb{R}^2$ zu $\mathbb{C}$ macht).

Bemerkung 1.9: *Führt man den eingezeichneten Winkel φ zwischen dem „Vektor“ z und der reellen Achse ein, so gilt mit den aus der Schule bekannten Winkelfunktionen* sin *und* cos*:*

$$z = x + i \cdot y = |z| \cdot \cos(\varphi) + i \cdot |z| \cdot \sin(\varphi).$$

Die Darstellung $z = x + i \cdot y$ nennt man die **Kartesische Darstellung** *der komplexen Zahl z durch Real- und Imaginärteil. Die Darstellung*

$$z = |z| \cdot \Big(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi) \Big)$$

durch den Betrag $|z|$ und den **„Polarwinkel“** *$\varphi \in [0, 2\,\pi)$ heißt* **Polardarstellung** *von z (φ heißt auch* **„das Argument von** z**“***). Wir werden später in Abschnitt 5.3 auf die Polardarstellung komplexer Zahlen zurückkommen, nachdem wir die komplexe Exponentialfunktion eingeführt haben.*

1.2 Nullstellen von Polynomen, der Fundamentalsatz der Algebra

↓13.4.05

Die Motivation zur Einführung der komplexen Zahlen war, Polynomgleichungen wie z.B. $x^2 + 1 = 0$ lösen zu können. In der Tat stellt sich nun heraus, dass Polynome vom Grad n immer genau n (evtl. „entartete“) komplexe Nullstellen haben. Wir definieren zunächst „Entartung“ von Nullstellen, wobei wir auf die aus der Schule bekannte Differentiation zurückgreifen:

Definition 1.10: (Vielfachheit von Nullstellen)

Sei $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ eine mehrfach differenzierbare Funktion (siehe Kapitel 6). Man nennt x^* eine Nullstelle der **„Vielfachheit“** *k (oder auch* **„k-fache Nullstelle“***), wenn*

$$f(x^*) = f'(x^*) = \cdots = f^{(k-1)}(x^*) = 0, \quad f^{(k)}(x^*) \neq 0.$$

Beispiel 1.11: (Mehrfache Polynomwurzeln)
Für das Polynom $p(x) = (x - x^*)^n$ mit $n > 0$ ist x^* eine n-fache Nullstelle:

$$p(x) = (x - x^*)^n, \quad p'(x) = n \cdot (x - x^*)^{n-1}, \quad p''(x) = n \cdot (n-1) \cdot (x - x^*)^{n-2},$$

$$\ldots\,, \quad p^{(n-1)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot (x - x^*), \quad p^{(n)}(x) = n!,$$

also

$$p(x^*) = (x^* - x^*)^n = 0,$$
$$p'(x^*) = n \cdot (x^* - x^*)^{n-1} = 0,$$

$$p''(x^*) = n \cdot (n-1) \cdot (x^* - x^*)^{n-2} = 0,$$
$$\ldots$$
$$p^{(n-1)}(x^*) = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot (x^* - x^*)^1 = 0,$$
$$p^{(n)}(x^*) = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 \cdot (x^* - x^*)^0 = n! \neq 0.$$

Beispiel 1.12: (Mehrfache Polynomwurzeln)
Seien $x_1, \ldots, x_k$ verschieden. Für das Polynom

$$p(x) = (x - x_1)^{n_1} \cdot \cdots \cdot (x - x_k)^{n_k}$$

vom Grad $n = n_1 + \cdots + n_k$ sind $x_1, \ldots, x_k$ Nullstellen der Vielfachheit $n_1, \ldots n_k$. Der Nachweis geht analog zum letzten Beispiel: Betrachte eine der Nullstellen x_i und schreibe

$$p(x) = (x - x_i)^{n_i} \cdot f(x), \quad f(x) = (x - x_1)^{n_1} \cdot \cdots \cdot \cancel{(x - x_i)}^{n_i} \cdot \cdots \cdot (x - x_k)^{n_k}.$$

Über die aus der Schule bekannte Produktregel $(g \cdot f)' = g' \cdot f + g \cdot f'$ der Differentiation folgt

$$p(x) = (x - x_i)^{n_i} \cdot f(x),$$
$$p'(x) = n_i \cdot (x - x_i)^{n_i - 1} \cdot f(x) + (x - x_i)^{n_i} \cdot f'(x),$$
$$p''(x) = n_i \cdot (n_i - 1) \cdot (x - x_i)^{n_i - 2} \cdot f(x) + 2 \cdot n_i \cdot (x - x_i)^{n_i - 1} \cdot f'(x) + (x - x_i)^{n_i} \cdot f''(x)$$

usw., wobei f, f', f'' etc. Polynome sind. Die ersten $n_i - 1$ Ableitungen verschwinden an der Stelle $x = x_i$:

$$p(x_i) = 0^{n_i} \cdot f(x_i) = 0 \ ,$$
$$p'(x_i) = 0^{n_i - 1} \cdot f(x_i) + 0^{n_i} \cdot f'(x_i) = 0$$
$$p''(x_i) = (..) \cdot 0^{n_i - 2} \cdot f(x_i) + (..) \cdot 0^{n_i - 1} \cdot f'(x_i) + 0^{n_i} \cdot f''(x_i) = 0$$

usw. Die n_i-te Ableitung verschwindet nicht:

$$p^{(n_i)}(x) = n_i! \cdot f(x) + (..) \cdot (x - x_i) \cdot f'(x) + \cdots + (x - x_i)^{n_i} \cdot f^{(n_i)}(x),$$

also $p^{(n_i)}(x_i) = n_i! \cdot f(x_i)$, wobei

$$f(x_i) = (x_i - x_1)^{n_1} \cdot \cdots \cdot \cancel{(x_i - x_i)}^{n_i} \cdot \cdots \cdot (x_i - x_k)^{n_k} \neq 0$$

gilt, da $x_i \neq x_1, \ldots, x_i \neq x_k$ vorausgesetzt ist. Damit ist x_i eine Nullstelle der Vielfachheit n_i.

Ein Polynom und seine Ableitungen

$$p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0,$$

$$p'(x) = a_n \cdot n \cdot x^{n-1} + a_{n-1} \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} + \cdots + a_1$$

etc. ist natürlich auch für komplexe Zahlen x wohldefiniert und man kann daher nach (mehrfachen) komplexen Nullstellen fragen. Die Definition 1.10 der Vielfachheit wird dabei auch für komplexe Nullstellen beibehalten.

Wir rekapitulieren zunächst das in der Mathematik I des letzten Semesters schon vorgestellte Horner-Schema zur Polynomauswertung und Polynomdivision:

Satz 1.13: (Polynomauswertung und -division per Horner-Schema)

Für das Polynom $p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_0$ mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$ gilt für jedes $x^* \in \mathbb{C}$:

$$\frac{p(x) - p(x^*)}{x - x^*} = b_0 \cdot x^{n-1} + b_1 \cdot x^{n-2} + \cdots + b_{n-2} \cdot x + b_{n-1},$$

*wobei b_0, b_1 etc. durch die Rekursion (**„Horner-Schema“**)*

$$\boxed{\begin{array}{l} b_0 := a_n \ ; \\ \textit{for } k := 1 \textit{ to } n \textit{ do } \ b_k := b_{k-1} \cdot x^* + a_{n-k} \ ; \end{array}}$$

gegeben sind. Es gilt $b_n = p(x^*)$.

Beweis: Mit $b_0 = a_n$, $b_k - b_{k-1} \cdot x^* = a_{n-k}$ und $-b_{n-1} \cdot x^* = a_0 - b_n$ folgt

$$(x - x^*) \cdot \Big(b_0 \cdot x^{n-1} + b_1 \cdot x^{n-2} + \cdots + b_{n-2} \cdot x + b_{n-1} \Big)$$

$$\begin{array}{rllllllll} = & b_0 \cdot x^n & + \ b_1 \cdot x^{n-1} & + \ b_2 \cdot x^{n-2} & + \ \cdots & + \ b_{n-1} \cdot x & & \\ & & - \ \underbrace{b_0 \cdot x^*} \cdot x^{n-1} & - \ \underbrace{b_1 \cdot x^*} \cdot x^{n-2} & - \ \cdots & - \ \underbrace{b_{n-2} \cdot x^*} \cdot x & - \ \underbrace{b_{n-1} \cdot x^*} & \\ = & a_n \cdot x^n & + \ a_{n-1} \cdot x^{n-1} & + \ a_{n-2} \cdot x^{n-2} & + \ \cdots & + \quad a_1 \cdot x & + \ a_0 & - \ b_n \\ = & p(x) - b_n. & & & & & & \end{array}$$

Für $x = x^*$ folgt $0 = p(x^*) - b_n$ und damit

$$(x - x^*) \cdot \Big(b_0 \cdot x^{n-1} + b_1 \cdot x^{n-2} + \cdots + b_{n-2} \cdot x + b_{n-1} \Big) = p(x) - p(x^*).$$

Q.E.D.

Das Horner-Schema liefert mittels $b_n = p(x^*)$ die Auswertung des Polynoms an einer Stelle x^* mit n Multiplikationen und $n-1$ Additionen. In der Tat ist es (für „dicht besetzte“ Polynome) das Standardschema, mit dem auf dem Rechner Polynomauswertungen implementiert werden. Bei der Auswertung werden gleichzeitig die Koeffizienten $b_0, \ldots, b_{n-1}$ des **„Faktorpolynoms“** $(p(x) - p(x^*))/(x - x^*)$ mitgeliefert. Das Horner-Schema läuft auf die folgende Darstellung des Polynoms hinaus:

$$p(x^*) \;=\; ((\ldots ((a_n \cdot x^* + a_{n-1}) \cdot x^* + a_{n-2}) \cdot x^* + \cdots) \ldots) \cdot x^* + a_1) \cdot x^* + a_0 .$$

$$\begin{array}{l}
\uparrow \\
b_0 = a_n \\
\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{} \\
b_1 = a_n \cdot x^* + a_{n-1} \\
\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{} \\
b_2 = a_n \cdot {x^*}^2 + a_{n-1} \cdot x^* + a_{n-2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ddots \\
\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{} \\
b_n = a_n \cdot {x^*}^n + a_{n-1} \cdot {x^*}^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x^* + a_0 = p(x^*)
\end{array}$$

Ist x^* eine Nullstelle („Wurzel“) des Polynoms, so folgt $p(x)/(x - x^*) =$ Polynom(x). Es ergibt sich das schon in der Mathematik I vorgestellte Grundprinzip, dass man bei einer gegebenen Nullstelle einen „Linearfaktor“ $x - x^*$ vom Polynom abspalten kann:

Folgerung 1.14:

Ist x^* eine Wurzel des Polynoms p vom Grad $n > 0$, so gilt

$$p(x) = (x - x^*) \cdot q(x)$$

mit einem „Faktorpolynom“ $q(x) = b_0 \cdot x^{n-1} + b_1 \cdot x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}$ vom Grad $n-1$, dessen Koeffizienten z.B. durch das Horner-Schema berechenbar sind.

Merke: *x^* ist dann und genau dann eine Wurzel, wenn sich der Linearfaktor $x - x^*$ vom Polynom abspalten läßt.*

18.4.05↓

Zwar hat nicht jedes Polynom reelle Nullstellen, aber es gilt das (zu beweisende) wichtige Prinzip:

> Jedes Polynom vom Grad > 0 hat (mindestens) eine komplexe Nullstelle.

Setzen wir zur Motivation des kommenden Fundamentalsatzes 1.15 mal dieses Prinzip voraus. Es gilt $p(x) = (x - x^*) \cdot q(x)$ mit einer (garantiert existierenden) Nullstelle x^* von p. Die Nullstellen des Faktorpolynoms q sind offensichtlich wieder Nullstellen des Ausgangspolyms p. Hat man nun eine Nullstelle x^{**} von q, so kann man nach Folgerung 1.14 angewendet auf q einen weiteren Linearfaktor abspalten:

$$q(x) = (x - x^{**}) \cdot \tilde{q}(x), \quad \text{also} \quad p(x) = (x - x^{*}) \cdot (x - x^{**}) \cdot \tilde{q}(x)$$

mit einem Restpolynom $\tilde{q}$ vom Grad $n-2$. Dies setzt man fort, bis man nach n Schritten auf ein konstantes Polynom stößt, das keine Nullstellen mehr besitzt. Es folgt eine Faktordarstellung

$$p(x) = (x - x^{*}) \cdot (x - x^{**}) \cdot (x - x^{***}) \cdot \cdots \cdot (x - x^{*\cdots *}) \cdot a_n,$$

wobei a_n das zuletzt verbleibende konstante Restpolynom (vom Grad 0) ist. Vergleicht man die führenden Koeffizienten auf der linken und rechten Seite dieser Gleichung, so sieht man sofort, dass das verbleibende konstante Restpolynom nichts anderes als der führende Koeffizient von $p(x) = a_n \cdot x^n + \cdots + a_0$ ist. Es folgt das Grundprinzip:

$$\boxed{\text{Jedes Polynom vom Grad } n > 0 \text{ hat genau } n \text{ komplexe Nullstellen.}}$$

Hierbei müssen wir aber etwas vorsichtig zählen, da in der Konstruktion die Nullstellen x^{*}, x^{**}, x^{***} etc. eventuell übereinstimmen können. Eine saubere Formulierung liefert der folgende fundamentale Satz:

Satz 1.15: (Fundamentalsatz der Algebra, Gauß 1799)

Zu jedem Polynom $p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_0$ vom Grad $n > 0$ mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$ gibt es komplexe Zahlen $z_1, \ldots, z_k$ (die Wurzeln) und $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ (die Vielfachheiten) mit $n_1 + \cdots + n_k = n$, so dass

$$p(x) = a_n \cdot (x - z_1)^{n_1} \cdot \cdots \cdot (x - z_k)^{n_k}.$$

Für die Anzahl k der *unterschiedlichen* Wurzeln gilt hierbei $k \leq n$ wegen $n_1 + \cdots + n_k = n$.

zum Beweis: Wie in der Motivation gezeigt, braucht man nur zu beweisen, dass jedes Polynom vom Grad > 0 mindestens eine komplexe Nullstelle bezitzt. Dies ist je nach den zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln aber gar nicht so einfach und sprengt unseren Rahmen hier. Typischerweise wird der Satz in Lehrbüchern über komplexe Funktionentheorie bewiesen. Ein „elementarer“ Beweis findet sich z.B. unter:

`http://helios.mathematik.uni-kl.de/~luene/kleinodien/laplace.html`

Interpretation 1.16:

Nach Beispiel 1.12 sind $z_1, \ldots, z_k$ die Nullstellen von p mit den Vielfachheiten $n_1, \ldots, n_k$. Zählt man z_1 als n_1 Wurzeln, z_2 als n_2 Wurzeln etc., so ergeben sich insgesamt $n_1 + \cdots + n_k = n$ komplexe Wurzeln des Polynoms, und in der Tat erhalten wir in dieser Zählweise:

$$\boxed{\text{Jedes Polynom vom Grad } n > 0 \text{ hat genau } n \text{ komplexe Nullstellen!}}$$

Über die Anzahl der **reellen** *Nullstellen hingegen kann man i.A. wenig aussagen (z.B. hat $p(x) = x^2 + 1$ überhaupt keine reelle Nullstellen).*

Merkregel 1.17:

Der Punkt x^* ist dann und genau dann eine Nullstelle eines Polynoms $p(x)$, wenn sich gemäß Folgerung 1.14 der Linearfaktor $x - x^*$ vom Polynom abfaktorisieren läßt. Die Vielfachheit von x^* gibt an, wie oft sich dieser Linearfaktor abspalten läßt. Man sollte eine Polynomwurzel besser als einen Linearfaktor ansehen. Der Fundamentalsatz besagt, dass sich ein Polynom vom Grad n immer in genau n Linearfaktoren aufspalten läßt.

Die Existenz der komplexen Wurzeln sagt nichts darüber aus, ob man diese Wurzeln in irgendeiner Weise explizit darstellen kann. In der Tat gibt es z.B. für Polynome vom Grad ≥ 4 keine allgemeingültige Lösungsformel mit Hilfe von (verschachtelten) Wurzeln. Numerisch kann man jedoch stets Gleitpunktapproximationen der Wurzeln finden.

Beispiel 1.18: In MuPAD ist `solve` für exakte Lösungen und `numeric::solve` für numerische Lösungen zuständig. Das folgende Polynom hat 9 Wurzeln, die sich (zufälligerweise) alle explizit darstellen lassen:

```
>> p:= x^9 + 2*x^7 - x^3 - 2*x:
>> solve(p = 0, x)

                1/2     1/2            1/2
{0, -1, 1, - I 2   , I 2   , - 1/2 I 3    - 1/2,

                1/2         1/2                1/2
   1/2 - 1/2 I 3   , 1/2 I 3    - 1/2, 1/2 I 3    + 1/2}
```

Der numerische Gleichungslöser liefert Gleitpunktnäherungen der Wurzeln:

```
>> numeric::solve(p = 0, x)

{0.0, - 0.5 - 0.8660254038 I, - 0.5 + 0.8660254038 I,

   0.5 - 0.8660254038 I, 1.0, -1.414213562 I, 1.414213562 I,

   0.5 + 0.8660254038 I, -1.0}
```

Die zurückgegebenen Objekte {...} sind jeweils Mengen, deren Elementanordnung willkürlich vom System nach internen Kriterien bestimmt wird. Diese sehen für exakte Werte anders aus als für Gleitpunktnäherungen, so dass sich die Reihenfolge der Elemente beim exakten und beim numerischen Lösen unterscheiden kann (was im obigen Beispiel auch in der Tat der Fall ist).

Es fällt hierbei auf, dass die komplexen Wurzeln als komplex konjugierte Paare $x_k \pm i \cdot y_k$ auftauchen. Das ist kein Zufall und liegt daran, dass das eben betrachtete Polynom „reell" ist (damit ist gemeint, dass die Koeffizienten reell sind). $\boxed{\downarrow 19.4.05}$

Satz 1.19: (konjugierte Wurzelpaare reeller Polyome)

Ist z eine k-fache Nullstelle des Polynoms $p(x) = a_n \cdot x^n + \cdots + a_0$ mit **reellen** *Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$, so ist auch $\overline{z}$ eine k-fache Nullstelle des Polynoms. Bei reellen Polynomen tauchen nicht-reelle Wurzeln also immer in komplex-konjugierten Paaren auf.*

Beweis: Für ein reelles Polynom gilt wegen $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ offensichtlich

$$\overline{p(z)} = p(\overline{z}).$$

Also gilt $p(\overline{z}) = 0$ dann und genau dann, wenn $p(z) = 0$ gilt. Da mit p auch alle Ableitungen von p wieder reelle Polynome sind, stimmen auch die Vielfachheiten der Nullstellen z und $\bar{z}$ überein.

Q.E.D.

1.3 Ein Anwendungsbeispiel: Diagonalisierung von Matrizen

Selbst wenn man sich als Lebensprinzip zu eigen gemacht hat, sich nur für reale (reelle) Dinge zu interessieren, kommt man oft doch nicht um komplexe Zahlen herum. Wir betrachten als Beispiel die (rein reelle) Aufgabenstellung:

$$\boxed{\text{Berechne } A^{1\,000\,000} \text{ für die Matrix } A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Allgemein ist die Frage, ob es für Matrixpotenzen explizite Darstellungen gibt, mit denen sich die Berechnung über viele Matrixmultiplikationen vermeiden läßt. Wäre A eine Diagonalmatrix, so könnten wir das Ergebniss sofort explizit hinschreiben, denn es gilt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}.$$

Eine Standardmethode der Linearen Algebra besteht darin, allgemeine Matrizen durch Transformation auf Diagonalgestalt zu bringen (**„Diagonalisierung“**). Hierbei geht es um Eigenwerte und -vektoren. Als Nullstellen des charakteristischen Polynoms sollten als Eigenwerte auch komplexe Zahlen in Betracht gezogen werden:

Satz 1.20: (Diagonalisierung von Matrizen)

Sei A eine reelle oder komplexe $n \times n$-Matrix mit den (eventuell komplexen) Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ und den entsprechenden Eigenvektoren $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$, also $A\,\vec{x}_k = \lambda_k\,\vec{x}_k$. Sei $T = [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n]$ die Matrix, deren Spalten aus diesen Eigenvektoren besteht. Es gilt

$$A\,T = T\,D \quad \textit{mit} \quad D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Sind die Eigenvektoren linear unabhängig, so ist T invertierbar, und es folgt

$$A = T\,D\,T^{-1}.$$

Beweis: Nach Definition der Matrixmultiplikation gilt

$$A\,T = A\,[\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n] = [A\,\vec{x}_1, \ldots, A\,\vec{x}_n]$$

(die Spalten eines Matrixproduktes bestehen aus der ersten Matrix wirkend auf die Spalten der zweiten Matrix). Mit

$$T\,D = [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n] \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = [\lambda_1\,\vec{x}_1, \ldots, \lambda_n\,\vec{x}_n]$$

und $A\,\vec{x}_k = \lambda_k\,\vec{x}_k$ folgt $A\,T = T\,D$.

Q.E.D.

Folgerung 1.21:

Mit einer Diagonalisierung $A = T\,D\,T^{-1}$ gilt

$$A^n = \underbrace{T\,D\,T^{-1}}_{A}\,\underbrace{T\,D\,T^{-1}}_{A} \cdots \underbrace{T\,D\,T^{-1}}_{A} = T\,D\,D \cdots D\,T^{-1} = T\,D^n\,T^{-1}.$$

Die Potenzen von A sind damit auf Potenzen der Diagonalform D von A zurückgeführt, wobei D^n sich ohne große Rechnung durch Potenzieren der Diagonalelemente ergibt.

Bemerkung 1.22: *Hat man einen Eigenwert λ_k der zu diagonalisierenden Matrix gefunden, so kann man nach 1.20* **irgendeinen** *dazugehörigen Eigenvektor $\vec{x}_k$ benutzen, die entsprechende Spalte von T zu besetzen. Nun sind Eigenvektoren aber nicht eindeutig: ist $\vec{x}_k$ ein Eigenvektor, so ist jedes Vielfaches $\vec{y}_k = c_k\,\vec{x}_k$ wieder ein Eigenvektor zum selben Eigenwert λ_k. Es gibt damit viele unterschiedliche Transformationsmatrizen T, während die Diagonalmatrix bis auf Umnummerierung der Eigenwerte eindeutig ist. Wie kann das sein? Antwort: die Transformationsmatrizen unterscheiden sich nur um eine Diagonalmatrix:*

$$\tilde{T} = [\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n] = [c_1\,\vec{x}_1, \ldots, c_n\,\vec{x}_n] = \underbrace{[\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n]}_{T}\underbrace{\begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_n \end{pmatrix}}_{C} = T\,C.$$

In der Diagonalisierung fällt die diagonale „Skalierungsmatrix" C heraus, da die Multiplikation von Diagonalmatrizen kommutativ ist:

$$A = \tilde{T}\,D\,\tilde{T}^{-1} = T\,C\,D\,(T\,C)^{-1} = T\,C\,D\,C^{-1}\,T^{-1}$$
$$= T\,D\,C\,C^{-1}\,T^{-1} = T\,D\,T^{-1}.$$

Bemerkung 1.23: *Da bei der Diagonalisierung die Invertierbarkeit von T wichtig ist, nützt es überhaupt nichts, triviale Eigenvektoren $\vec{x}_k = 0$ zu betrachten (die ja auch strenggenommen per Definition von Eigenvektoren gar nicht als Eigenvektoren zulässig sind).*

Die Aufgabenstellung der Diagonalisierung läuft darauf hinaus, die Eigenvektoren zu *allen* Eigenwerten zu finden. Sobald man eine Basis von linear unabhängigen Eigenvektoren gefunden hat, hat man die invertierbare Transformationsmatrix T gefunden, welche die betrachtete Matrix auf Diagonalform bringt. Sind alle Eigenwerte verschieden, so existiert immer eine Basis von linear unabhängigen Eigenvektoren. Bei entarteten Eigenwerten (mehrfachen Nullstellen des charakteristischen Polynoms) ist dies jedoch nicht garantiert, und in der Tat gibt es nicht-diagonalisierbare Matrizen. Symmetrische reelle Matrizen sind immer diagonalisierbar, selbst wenn die (bei Symmetrie der Matrix automatisch reellen) Eigenwerte entartet sind.

Beispiel 1.24: Mittels Diagonalisierung können wir für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

eine explizite Darstellung von A^n für jedes $n \in \mathbb{Z}$ ermitteln. Nach Satz 1.20 sind alle Eigenwerte und –vektoren zu bestimmen. Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\det(\lambda\,E_2 - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda - 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\,\lambda + 2$$

(hier ist E_2 die 2×2-Einheitsmatrix). Nach der Standardformel für die Nullstellen quadratischer Polynome ergeben sich die komplex konjugierten Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i.$$

Die Eigenvektoren zu λ_1 bzw. λ_2 findet man, indem man die Kernvektoren von $A - \lambda_k\,E_2$ ermittelt, d.h., die Gleichungen $(A - \lambda_k\,E_2)\,\vec{x}_k = A\,\vec{x}_k - \lambda_k\,\vec{x}_k = \vec{0}$ löst. Mit den Techniken der Mathematik I des letzten Semesters findet man die Lösungen

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \cdot i \end{pmatrix}.$$

Die Transformationsmatrix T wird spaltenweise aus diesen Eigenvektoren aufgebaut, die Inverse wird berechnet:

$$T = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & 2 \cdot i \end{pmatrix} \quad , \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{4} \end{pmatrix}.$$

Damit folgt die Diagonalisierung

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & 2 \cdot i \end{pmatrix}}_{T} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 + i & 0 \\ 0 & 1 - i \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{4} \end{pmatrix}}_{T^{-1}}.$$

Dies liefert

$$\begin{aligned} A^n &= \underbrace{\begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & 2 \cdot i \end{pmatrix}}_{T} \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} (1+i)^n & 0 \\ 0 & (1-i)^n \end{pmatrix}}_{D^n} \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{4} \end{pmatrix}}_{T^{-1}}} \\ &= \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & 2 \cdot i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} \cdot (1+i)^n & \frac{1}{4} \cdot (1+i)^n \\ \frac{1}{2} \cdot (1-i)^n & -\frac{i}{4} \cdot (1-i)^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot (1+i)^n + \frac{1}{2} \cdot (1-i)^n & \frac{i}{4} \cdot (1+i)^n - \frac{i}{4} \cdot (1-i)^n \\ -i \cdot (1+i)^n + i \cdot (1-i)^n & \frac{1}{2} \cdot (1+i)^n + \frac{1}{2} \cdot (1-i)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Das Ergebnis muß als Potenz der reellen Matrix A reell sein. Dies ist in dieser Darstellung leider alles andere als offensichtlich. In der Tat brauchen wir noch einige grundsätzliche Überlegungen zu Potenzen komplexer Zahlen, die in Polarkoordinaten wesentlich einfacher zu handhaben sind als in Kartesischen Koordinaten. Wir werden später nach der Einführung der exp-Funktion für komplexe Zahlen hierauf genauer eingehen und in Beispiel 5.23 diese Darstellung von A^n noch weiter vereinfachen.

Kapitel 2

Folgen und Grenzwerte

$\boxed{\downarrow 20.4.05}$

Die Grundlage der Analysis ist der Begriff des Grenzwertes. Er ist aus der Schule bekannt (bzw. sollte bekannt sein) und wird hier rekapituliert. Da es kaum einen Unterschied macht, Folgen und Grenzwerte in $\mathbb{R}$ oder in $\mathbb{C}$ zu betrachten, formulieren wir die folgenden Definitionen und Sätze in $\mathbb{C}$, was $\mathbb{R}$ als Spezialfall umschließt. In den Beispielen und Übungen werden hauptsächlich reelle Folgen betrachtet.

2.1 Definitionen, Beispiele, einige Sätze

Notation: $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Definition 2.1: (Folgen)

Eine **Folge** $(z_n) = (z_1, z_2, z_3 \dots)$, *manchmal auch* $(z_n) = (z_0, z_1, z_2, \dots)$, *ist eine Zuordnung (Funktion)*

$$\textit{Index } n \in \mathbb{N} \ (\textit{bzw. } \mathbb{N}_0) \longrightarrow \ \textit{Wert } z_n \in \mathbb{C}.$$

Beispiel 2.2:

a) $x_n = (-1)^n; n \in \mathbb{N}$. Die Folge (x_n) ist $(-1, 1, -1, 1, \dots)$.

b) $x_n = \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}$. Die Folge (x_n) ist $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$.

c) $x_n = 1 - \frac{1}{n^2}; n \in \mathbb{N}$. Die Folge (x_n) ist $(0, \frac{3}{4}, \frac{8}{9}, \frac{15}{16}, \frac{24}{25}, \dots)$.

d) $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n; n \in \mathbb{N}$. Die Folge (x_n) ist

$$\Big(2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \frac{625}{256}, \frac{7776}{3125}, \dots\Big) \approx (2.0, 2.25, 2.3703..., 2.4414..., 2.4883..., \dots).$$

Beispiel 2.3: Einige simple Berechnungen mit MuPAD. Folgen können z.B. als Funktionen definiert werden:

```
>> x := n -> (1 + 1/n)^n

                              n -> (1 +  1/n)^n
```

Der „Folgengenerator" `$` dient zur Erzeugung von Folgen:

```
>> x(n) $ n = 1..5

                2, 9/4, 64/27, 625/256, 7776/3125
```

Gleitpunktnäherungen werden durch `float` erzeugt:

```
>> float(x(n)) $ n = 1..5

          2.0, 2.25, 2.37037037, 2.44140625, 2.48832
```

Manchmal sind Monotonieeigenschaften von Folgen interessant. Da hierzu Folgenglieder verglichen werden müssen, kann Monotonie nur im Reellen betrachtet werden (auf $\mathbb{C}$ gibt es keine sinnvolle Begriffsbildung der Art $z_1 < z_2$).

Bezeichnung 2.4:

Eine reelle Folge (x_n) heißt **„monoton wachsend"** *bzw.* **„monoton fallend"**, *wenn $x_n \leq x_m$ bzw. $x_n \geq x_m$ gilt für alle Indexpaare n, m mit $n < m$. Bei $x_n < x_m$ bzw. $x_n > x_m$ spricht man von* **„streng monoton wachsend"** *bzw.* **„streng monoton fallend"**.

Zunächst die formale Definition von „Konvergenz" und „Grenzwert", die etwas abschreckend sein mag, aber (keine Angst!) später nur in (den hier nicht wirklich interessierenden) technischen Beweisen zum Einsatz kommt. Oft reicht es, einfache Vererbungsreglen wie z.B. aus Satz 2.13 zu benutzen, um Grenzwerte mittels Arithmetikregeln zu ermitteln.

Definition 2.5: (Grenzwerte von Folgen)

Eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ heißt **„konvergent"**, *wenn eine Zahl $z^* \in \mathbb{C}$ existiert, so dass sich (intuitiv) „alle Zahlen z_n für großes n dem Wert z^* beliebig genau annähern".*
Formal: zu jedem noch so kleinen $\epsilon > 0$ läßt sich eine reelle Zahl $N(\epsilon)$ angeben, so dass $|z_n - z^*| \leq \epsilon$ gilt für alle Indizes $n \geq N(\epsilon)$.
Anschaulich: alle Werte z_n weichen für $n \geq N(\epsilon)$ maximal um den Wert ϵ vom Grenzwert ab.
Der Wert z^* heißt dann **„Grenzwert" („Limes")** *der Folge (z_n). Schreibweisen:*

$$z^* = \lim_{n \to \infty} z_n \quad \text{oder auch} \quad z_n \to z^* \text{ für } n \to \infty.$$

Eine nicht konvergierende Folge heißt **„divergent“**. *Konvergente Folgen mit dem Grenzwert 0 heißen auch* **Nullfolgen**.

Bemerkung 2.6: *Die Aussage „für alle $n \geq N(\epsilon)$“ impliziert, dass nur „hinreichend große Indizes n“ betrachtet zu werden brauchen.* **Merke:** *für Konvergenz ist das Verhalten der Folge für kleine Indexwerte völlig irrelevant. Genauer: man kann immer endlich viele Folgenelemente abändern, ohne dass sich etwas an der Konvergenz ändert: man kann o.B.d.A. (= ohne Beschränkung der Allgmeinheit) immer $N(\epsilon)$ größer wählen als der größte Index der geänderten Folgenglieder.*

Eine intuitive Interpretation der ϵ-Definition der Konvergenz lautet:

Für jedes (noch so kleine) $\epsilon > 0$ haben höchstens endlich viele Folgenglieder einen Abstand zum Grenzwert, der größer ist als ϵ.

Satz 2.7: (Eindeutigkeit von Grenzwerten)

Grenzwerte sind eindeutig, d.h., zu (z_n) gibt es höchstens ein z^* mit der obigen Eigenschaft.

Beweis: Seien z^* und z^{**} zwei Grenzwerte. Zu jedem $\epsilon > 0$ gilt für hinreichend große Indizes n:

$$|z_n - z^*| \leq \epsilon, \quad |z_n - z^{**}| \leq \epsilon$$

$$\Rightarrow |z^* - z^{**}| = |z^* - z_n + z_n - z^{**}| \leq |z^* - z_n| + |z_n - z^{**}| \leq 2 \cdot \epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann und damit auch $2 \cdot \epsilon$ beliebig klein sein kann, folgt $|z^* - z^{**}| = 0$, also $z^* = z^{**}$.

Q.E.D.

Einige einfache Beispiele mit formalem Beweis:

Beispiel 2.8: Die konstante Folge $(z_n) = (c, c, c, \dots)$ ist konvergent mit dem Grenzwert $z^* = \lim\limits_{n \to \infty} z_n = c$, denn für alle n gilt

$$|z_n - z^*| = |c - c| = 0 \leq \epsilon \ ,$$

wie auch immer $\epsilon > 0$ vorgegeben wird. Formal: zu $\epsilon > 0$ wähle $N(\epsilon) = 1$.

Nun ja, im obigen Beispiel war sogar das formale $N(\epsilon)$–Kriterium sehr einfach zu handhaben. Im nächsten Beispiel wird es ein klein wenig komplizierter:

Beispiel 2.9: Die Folge $x_n = \frac{1}{n}$ ist konvergent mit dem Grenzwert $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Formaler Beweis: zu beliebigem $\epsilon > 0$ wähle $N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}$. Dann folgt für alle $n \geq N(\epsilon)$:

$$|x_n - x^*| = |x_n - 0| = |x_n| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N(\epsilon)} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon.$$

Und noch ein Beispiel mit formalem Beweis:

Beispiel 2.10: Für $c \in \mathbb{C}$ gelte $|c| < 1$. Dann ist die Folge $z_n = c^n$ eine Nullfolge.

Beweis: Für $c = 0$ ist alles klar. Sei nun $c \neq 0$. Definiere $h = \frac{1}{|c|} - 1 > 0$, d.h., $|c| = \frac{1}{1+h}$. Es gilt

$$\frac{1}{|c^n|} = \frac{1}{|c|^n} = (1+h)^n = 1 + n \cdot h + \binom{n}{2} \cdot h^2 + \cdots \geq 1 + n \cdot h > n \cdot h.$$

Es folgt $|c^n| < \frac{1}{n \cdot h} \leq \epsilon$ für alle Indizes $n \geq \frac{1}{h \cdot \epsilon} =: N(\epsilon)$.

Q.E.D.

Beispiele:

$$c = 0.5: \quad (c^n) = (0.5,\ 0.25,\ 0.125,\ 0.0625,\ 0.03125\ldots).$$

Für $|c| \geq 1$ gilt diese Aussage nicht! Z.B.:

$$\begin{array}{lll} c = 1: & (c^n) = (1, 1, 1, 1, \ldots) & \text{(konvergiert gegen 1)}, \\ c = i: & (c^n) = (i, -1, -i, 1, i, -1, \ldots) & \text{(konvergiert nicht)}, \\ c = 2: & (c^n) = (2, 4, 8, 16, \ldots) & \text{(divergiert, bzw. „konvergiert gegen } \infty\text{“)}. \end{array}$$

Beispiel 2.11: Einige Berechnungen mit MuPAD:

```
>> x := n -> c^n
                              n -> c^n
>> x(n) $ n = 1..10

             2   3   4   5   6   7   8   9   10
          c, c , c , c , c , c , c , c , c , c
```

Grenzwerte werden mit `limit` berechnet. Die Hilfeseite dazu wird mittels `?limit` angefordert:

```
>> ?limit
```

Ohne Weiteres kann der Grenzwert nicht bestimmt werden, da er ja von den Eigenschaften von c abhängt:

```
>> limit(x(n), n = infinity)
Warning: cannot determine sign of ln(c) [stdlib::limit::limitMRV]

                            n
                     limit(c  , n = infinity)
```

Nehmen wir an, c sei reell und $0 < c < 1$:

```
>> assume(0 < c < 1):
>> limit(x(n), n = infinity)

                                 0
```

Nehmen wir an, $c > 1$:

```
>> assume(c > 1):
>> limit(x(n), n = infinity)

                             infinity
```

Ein Beispiel einer nicht konvergierenden Folge:

Beispiel 2.12: Die Folge $x_n = (-1)^n$, also $(x_n) = (-1, 1, -1, 1, \dots)$ ist nicht konvergent (hat keinen Grenzwert). Hier ein formaler Beweis (damit in dieser Vorlesung wenigstens einmal ein sauberer Nichtexistenzbeweis vorkommt): zu $\epsilon = \frac{1}{2}$ läßt sich kein $N(\epsilon)$ finden. Angenommen, ein Grenzwert x^* existiert. Dann müßte $N(\epsilon)$ existieren mit

$$|x_n - x^*| \le \epsilon, \quad |x_{n+1} - x^*| \le \epsilon$$

für alle $n \ge N(\epsilon)$. Es würde folgen:

$$|x_n - x_{n+1}| = |x_n \underbrace{-x^* + x^*}_{=0} - x_{n+1}| \le |x_n - x^*| + |x^* - x_{n+1}| \le \epsilon + \epsilon = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Für die betrachtete Folge gilt aber $|x_n - x_{n+1}| = 2$ für jedes n. Widerspruch! Damit muß die Annahme „es existiert x^*" falsch gewesen sein.

$\boxed{\downarrow 26.4.05}$

Die formale Definition mit ϵ und $N(\epsilon)$ ist unangenehm und man möchte diese recht technischen Betrachtungen und Abschätzungen liebend gern vermeiden. Wie geht man beim praktischen Rechnen vor? Es gibt Rechenregeln! Damit läßt sich ϵ und $N(\epsilon)$ praktisch immer verbannen:

Satz 2.13: (Rechenregeln für Grenzwerte)

Seien (x_n), (y_n) konvergente Folgen in $\mathbb{C}$, sei $c \in \mathbb{C}$ eine Konstante. Dann gilt:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot x_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, *b)* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$, **falls** $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$ **gilt (!)**,

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$.

Eine Beweisandeutung (nur für technisch Interessierte):

Beweisskizze: Seien x^* bzw. y^* die Grenzwerte von (x_n) bzw. (y_n).
a) Für $c = 0$ ist die Behauptung sicherlich richtig. Sei nun $c \neq 0$. Zu $\epsilon > 0$ gibt es ein N, so dass

$$|x_n - x^*| \leq \frac{\epsilon}{|c|}$$

gilt für alle $n \geq N$. Für diese Indizes folgt

$$|c \cdot x_n - c \cdot x^*| = |c| \cdot |x_n - x^*| \leq |c| \cdot \frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon.$$

b) Wähle ein beliebiges $\epsilon > 0$. Da (x_n) und (y_n) als konvergent vorausgesetzt sind, gibt es Werte N_x bzw. N_y mit

$$|x_n - x^*| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \text{bzw.} \quad |y_n - y^*| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

für alle $n \geq N_x$ bzw. $n \geq N_y$. Für alle $n \geq N(\epsilon) := \max(N_x, N_y)$ folgt

$$\begin{aligned} |x_n \pm y_n - (x^* \pm y^*)| &= |x_n - x^* \pm (y_n - y^*)| \\ &\leq |x_n - x^*| + |\pm(y_n - y^*)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Die Aussagen c) – e) lassen sich mit ähnlichen (etwas aufwendigeren) Abschätzungen beweisen.

Q.E.D.

Beispiel 2.14: Wir wissen bereits, dass konstante Folgen $x_n = c$ gegen c konvergieren, und dass $x_n = \frac{1}{n}$ eine Nullfolge ist. Durch Einsatz der Rechenregeln folgt unmittelbar:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0\cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0\cdot 0 = 0,$$

usw. Durch Induktion nach k ergibt sich:

Alle Folgen der Form $x_n = \frac{1}{n^k}$ mit positiven Potenzen k sind Nullfolgen.

Manchmal muß man etwas manipulieren und umschreiben. Bei rationalen Ausdrücken in n (also Polynom(n)/Polynom(n)) gilt das allgemeine Rezept: ziehe in Zähler und Nenner die führende Potenz von n raus und kürze. Typischerweise verbleiben dann nur noch Nullfolgen im Ausdruck, die zu 0 werden, wenn man über die obigen Rechenregeln „den Grenzwert in den Ausdruck 'reinzieht“:

Beispiel 2.15:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot n^2+1}{n^2-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot(2+\frac{1}{n^2})}{n^2\cdot(1-\frac{1}{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n}}=\frac{2+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}{1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}}=\frac{2+0}{1-0}=2\,.$$

Hierbei wurde benutzt, dass wir in den Beispielen 2.9 und 2.14 bereits $1/n$ und $1/n^2$ als Nullfolgen identifiziert haben. Man sieht, mit etwas Geschick eingesetzt, machen die Rechenregeln die Berechnung von Grenzwerten oft sehr einfach. Manchmal muß man allerdings „tricksen“:

Beispiel 2.16:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}^{\,2}-\sqrt{n}^{\,2}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n\cdot(1+\frac{1}{n})}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}\;+\;1\right)}$$

$$=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}}\;+\;1}=0\cdot\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=0.$$

Manchmal helfen alle Rechenregeln nichts, und man muß technisch abschätzen. Eine hilfreiche Aussage liefert der folgende Satz, der nur für reelle Folgen gilt. Liegen die Folgenglieder x_n in Intervallen $[a_n,b_n]$ und konvergieren die Intervallenden gegen den selben Wert, so bleibt der Folge nichts anderes übrig, als ebenfalls gegen diesen Wert zu konvergieren (die Intervalllänge b_n-a_n konvergiert gegen 0):

Satz 2.17: (Intervallschachtelung)

Seien (a_n), (b_n), (x_n) reelle Folgen. Die Folgen (a_n) und (b_n) mögen gegen den selben Grenzwert konvergieren. Gilt für alle hinreichend großen Indizes $a_n \le x_n \le b_n$, so konvergiert auch (x_n) gegen

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Beweis: Sei x^* der Grenzwert von (a_n) und (b_n). Die Folge $(b_n - a_n)$ ist positiv und eine Nullfolge. Zu $\epsilon > 0$ gibt es Werte N_1 bzw. N_2 mit

$$b_n - a_n = |b_n - a_n| \le \frac{\epsilon}{2}, \quad |a_n - x^*| \le \frac{\epsilon}{2}$$

für alle $n \ge N_1$ bzw. $n \ge N_2$. Für alle $n \ge N := \max(N_1, N_2)$ folgt

$$|x_n - x^*| = |x_n - a_n + a_n - x^*| \le |x_n - a_n| + |a_n - x^*|$$

$$= x_n - a_n + |a_n - x^*| \le b_n - a_n + |a_n - x^*| \le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Q.E.D.

Beispiel 2.18: Sei $x_n = \frac{n}{n^2+1}$. Offensichtlich gilt

$$\underbrace{0}_{a_n} \le x_n = \frac{n}{n^2+1} \le \frac{n}{n^2} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{b_n}.$$

Die Intervallgrenzen $a_n = 0$ und $b_n = \frac{1}{n}$ sind beides Nullfolgen, also ist auch x_n eine Nullfolge.

Beispiel 2.19: Für positive reelle Zahlen c definieren wir $z_n = c^{1/n}$ als die positive reelle Lösung von $z^n = c$.

Fall 1: Sei $c \ge 1$. Sicherlich gilt $z_n \ge 1$. Setze $z_n = 1 + h_n$ mit $h_n \ge 0$. Es folgt

$$c = (1 + h_n)^n = 1 + n \cdot h_n + \binom{n}{2} \cdot h_n^2 + \cdots \ge 1 + n \cdot h_n \quad \Rightarrow \quad 0 \le h_n \le \frac{c-1}{n}.$$

Damit ist h_n eine Nullfolge, also $z_n = 1 + h_n \to 1$ für $n \to \infty$.

Fall 2: Sei $0 < c \le 1$. Sicherlich gilt $0 < z_n \le 1$. Setze $z_n = 1/(1 + h_n)$ mit $h_n \ge 0$. Analog zu Fall 1 folgt

$$\frac{1}{c} = (1 + h_n)^n = 1 + n \cdot h_n + \binom{n}{2} \cdot h_n^2 + \cdots \ge 1 + n \cdot h_n \quad \Rightarrow \quad 0 \le h_n \le \frac{\frac{1}{c} - 1}{n}.$$

Damit ist h_n eine Nullfolge, also $z_n = 1/(1 + h_n) \to 1$ für $n \to \infty$.

Merke:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} c^{1/n} = 1 \text{ für jedes reelle } c > 0.}$$

Satz und Definition 2.20:

Sei z eine beliebige komplexe Zahl. Die Folge $x_n = (1 + \frac{z}{n})^n$ konvergiert gegen einen von z abhängenden Grenzwert $x^*(z)$, der auch als e^z oder auch als $\exp(z)$ bezeichnet wird. Die Funktion $\exp : z \mapsto e^z$ heißt **„Exponential-Funktion“**. *Der spezielle Grenzwert $e = e^1$ für $z = 1$ heißt* **„Eulersche Zahl“**:

$$e = \lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \approx 2.71828\ldots .$$

Der Beweis ist sehr technisch und bringt keine wirklichen Erkenntnisse. Nur der Vollständigkeit halber wird eine Teilskizze angegeben:

Beweisskizze: Wir betrachten nur den Fall $z = 1$. Man zeigt jeweils per Induktion, dass die reelle Folge $x_n = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n$ streng monoton wachsend in n ist und dass

$$y_n = \Big(1 + \frac{1}{n-1}\Big)^n = \Big(1 + \frac{1}{n-1}\Big)^{n-1} \cdot \Big(1 + \frac{1}{n-1}\Big) = x_{n-1} \cdot \Big(1 + \frac{1}{n-1}\Big)$$

streng monoton fallend in n ist. Da offensichtlich $x_n < y_n < y_2 = 4$ gilt, ist x_n monoton wachsend und nach oben beschränkt. Dies reicht, um die Konvergenz von (x_n) zu folgern (Satz 2.28). Zusatz: y_n ist monoton fallend und nach unten durch $y_n > x_{n-1} > x_1 = 2$ beschränkt, konvergiert also ebenfalls. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_{n-1} \cdot \Big(1 + \frac{1}{n-1}\Big) = \lim_{n\to\infty} x_{n-1} \cdot \lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{1}{n-1}\Big)$$
$$= \lim_{n\to\infty} x_{n-1} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Damit liefert jedes x_n eine untere und y_n eine obere Schranke für die Eulersche Zahl, wobei das Intervall $[x_n, y_n]$, in dem sie zu finden ist, auf die Länge 0 zusammenschrumpft.

Q.E.D.

Eine technische Vorüberlegung für den Beweis des kommenden Satzes 2.22: $\boxed{\downarrow 3.5.05}$

Technischer Hilfssatz 2.21:

Sei (z_n) eine komplexe Nullfolge mit der Eigenschaft, dass $(n^2 \cdot z_n)$ beschränkt ist (d.h., es gibt eine Konstante $c > 0$, so dass für alle Indizes n $|z_n| \le \frac{c}{n^2}$ gilt). Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} (1 + z_n)^n = 1.$$

Der Beweis ist sehr technisch und bringt keine wirklichen Erkenntnisse. Er ist nur der Vollständigkeit halber angegeben:

Beweis: Es gilt (Aufgabe 8) für jedes $z \in \mathbb{C}$:

$$z^n - 1 = (z-1) \cdot \Big(1 + z + \cdots + z^{n-1}\Big).$$

Für $z = 1 + z_n$ folgt

$$(1+z_n)^n - 1 = z_n \cdot \Big(1 + (1+z_n) + \cdots + (1+z_n)^{n-1}\Big).$$

Die Dreiecksungleichung liefert

$$\Big|(1+z_n)^n - 1\Big| \le |z_n| \cdot \Big(1 + |1+z_n| + \cdots + |1+z_n|^{n-1}\Big)$$

$$\le |z_n| \cdot \Big(1 + (1+|z_n|) + \cdots + (1+|z_n|)^{n-1}\Big).$$

Mit $(1+|z_n|)^k \le (1+|z_n|)^n$ für alle $k = 0, 1, \ldots, n-1$ folgt

$$\Big|(1+z_n)^n - 1\Big| \le |z_n| \cdot \Big((1+|z_n|)^n + (1+|z_n|)^n + \cdots + (1+|z_n|)^n\Big)$$

$$= n \cdot |z_n| \cdot (1+|z_n|)^n.$$

Wegen $|z_n| \le c/n^2$ gilt auch $|z_n| \le c/n$:

$$\Big|(1+z_n)^n - 1\Big| \le n \cdot |z_n| \cdot \Big(1 + \frac{c}{n}\Big)^n \le n \cdot |z_n| \cdot e^c.$$

Wegen $|z_n| \le c/n^2$ gilt $|n \cdot z_n| \le c/n$:

$$\Big|(1+z_n)^n - 1\Big| \le \frac{c \cdot e^c}{n}.$$

Damit gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \Big((1+z_n)^n - 1\Big) = 0$, und es folgt $\lim\limits_{n\to\infty} (1+z_n)^n = 1$.

Q.E.D.

Der folgende Satz ist fundamental und sehr wichtig:

Satz 2.22: (Funktionalgleichungen der Exponentialfunktion)

Für alle $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\boxed{e^0 = 1, \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z}, \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}, \quad (e^z)^n = e^{n \cdot z}.}$$

Trotz aller Wichtigkeit des Satzes: der Beweis bringt keine wirklichen Erkenntnisse und ist nur der Vollständigkeit halber für technisch Interessierte angegeben:

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
&\Big(1+\frac{z_1+z_2}{n}\Big)^n\cdot\Big(1-\frac{z_1}{n}\Big)^n\cdot\Big(1-\frac{z_2}{n}\Big)^n\\
&=\Big(\Big(1+\frac{z_1+z_2}{n}\Big)\cdot\Big(1-\frac{z_1}{n}\Big)\cdot\Big(1-\frac{z_2}{n}\Big)\Big)^n\\
&=\Big(1-\frac{z_1^2+z_1\cdot z_2+z_2^2}{n^2}+\frac{z_1\cdot z_2\cdot(z_1+z_2)}{n^3}\Big)^n.
\end{aligned}$$

Die Folge

$$\begin{aligned}
x_n&=-\frac{z_1^2+z_1\cdot z_2+z_2^2}{n^2}+\frac{z_1\cdot z_2\cdot(z_1+z_2)}{n^3}\\
&=\frac{1}{n^2}\cdot\Big(z_1^2+z_1\cdot z_2+z_2^2+\frac{z_1\cdot z_2\cdot(z_1+z_2)}{n}\Big)
\end{aligned}$$

erfüllt die im Hilfssatz 2.21 geforderte Bedingung $|x_n|\le c/n^2$ mit

$$\begin{aligned}
\Big|z_1^2+z_1\cdot z_2+z_2^2+\frac{z_1\cdot z_2\cdot(z_1+z_2)}{n}\Big|&\le|z_1^2+z_1\cdot z_2+z_2^2|+\frac{|z_1\cdot z_2\cdot(z_1+z_2)|}{n}\\
&\le|z_1^2+z_1\cdot z_2+z_2^2|+|z_1\cdot z_2\cdot(z_1+z_2)|=:c.
\end{aligned}$$

Hilfssatz 2.21 liefert damit

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{z_1+z_2}{n}\Big)^n\cdot\Big(1-\frac{z_1}{n}\Big)^n\cdot\Big(1-\frac{z_2}{n}\Big)^n=\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^n=1$$

und folglich gilt:

$$\begin{aligned}
1&=\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{z_1+z_2}{n}\Big)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\Big(1-\frac{z_1}{n}\Big)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\Big(1-\frac{z_2}{n}\Big)^n\\
&=e^{z_1+z_2}\cdot e^{-z_1}\cdot e^{-z_2}.
\end{aligned}$$

Mit $e^0=\lim\limits_{n\to\infty}\Big(1+\dfrac{0}{n}\Big)^n=\lim\limits_{n\to\infty}1^n=1$ folgt für $z_1=z, z_2=-z$:

$$1=e^0\cdot e^{-z}\cdot e^z=e^{-z}\cdot e^z\quad\Rightarrow\quad e^{-z}=\frac{1}{e^z}.$$

Für allgemeine z_1, z_2 folgt dann:

$$1=e^{z_1+z_2}\cdot e^{-z_1}\cdot e^{-z_2}\quad\Rightarrow\quad e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}.$$

Hiermit folgt für $n\in\mathbb{N}$:

$$(e^z)^n=e^z\cdot e^z\cdot\dots\cdot e^z=e^{z+z+\dots+z}=e^{n\cdot z}.$$

Mit $e^{-z}=1/e^z$ folgt die selbe Eigenschaft auch für negative ganzzahlige Potenzen n.

Q.E.D.

Beispiel 2.23: Einige Rechnungen mit MuPAD. Die Exponentialfunktion heißt `exp`:

```
>> limit((1 + 1/n)^n, n = infinity)

                              exp(1)
```

Mit % wird auf den letzten Wert zugegriffen:

```
>> float(%)
                            2.718281829

>> exp(20) = float(exp(20))

                      exp(20) = 485165195.4

>> exp(3 + I/2) = float(exp(3 + I/2))

         exp(3 + 1/2 I) = 17.62671695 + 9.629519358 I
```

Für reelle Argumente kann die Exponentialfunktion mittels `plotfunc2d` gezeichnet werden. Falls `x` vorher einen Wert zugewiesen bekommen hatte, muß dieser zunächst mittels `delete` gelöscht werden:

```
>> delete x:
>> plotfunc2d(exp(x), x = -2..3)
```

2.2 Weitere Konvergenzsätze

In diesem Abschnitt werden einige allgemeine Sätze formuliert, die hilfreich sind, die Konvergenz von Folgen zu prüfen. Als Vorbereitung wird zunächst das Supremumsaxiom vorgestellt. Es garantiert, dass $\mathbb{R}$ „vollständig“ genug ist, um die Existenz diverser Grenzwerte zu sichern.

2.2.1 Das Supremumsaxiom für $\mathbb{R}$

Welcher Unterschied besteht zwischen der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen und der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen? In beiden Mengen ist die Arithmetik (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) definiert und verläßt die Menge nicht. Mathematisch gesprochen: beide Mengen sind **„Körper“**. Die Einführung der reellen Zahlen als Verallgemeinerung der rationalen Zahlen ist dadurch motiviert, Gleichungen wie z.B. $x^2 = 2$ lösen zu können ($\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl, also in $\mathbb{R}$, aber nicht in $\mathbb{Q}$). In diesem Sinne ist $\mathbb{R}$ „vollständiger“ als $\mathbb{Q}$. Worauf läuft dies mathematisch hinaus?

Definition 2.24: (Beschränktheit)

Eine Teilmenge A von $\mathbb{R}$ heißt **„nach oben bzw. nach unten beschränkt"**, *wenn es Zahlen $M \in \mathbb{R}$ bzw. $m \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a \leq M$ bzw. $m \leq a$ für alle $a \in A$ gilt. Die Zahl M bzw. m heißt* **„obere bzw. untere Schranke"** *für A. Eine sowohl nach oben als auch nach unten beschränkte Menge heißt* **„beschränkt"**. *Es gilt $|a| \leq \max(|m|, |M|)$ für alle $a \in A$.*

Das Supremumsaxiom 2.25:

*Jede nach oben beschränkte nichtleere Teilmenge A von $\mathbb{R}$ besitzt eine kleinste obere Schranke (**„das Supremum" von** A):*

$$\sup A = \min\{M \in \mathbb{R}; a \leq M \ \forall a \in A\}.$$

*Jede nach unten beschränkte nichtleere Teilmenge A von $\mathbb{R}$ besitzt eine größte untere Schranke (**„ das Infimum" von** A):*

$$\inf A = \max\{m \in \mathbb{R}; m \leq a \ \forall a \in A\}.$$

Hierbei braucht man als Axiom eigentlich nur die Existenz eine Supremums zu fordern. Das Infimum von A ergibt sich dann automatisch als das negative Supremum der Menge der negativen Werte in A:

$$\inf A = -\sup\,\{-a; a \in A\}.$$

Die Existenz des Minimums/Maximums aller oberen/unteren Schranken, welche das Supremum/Infimum definieren, ist die gewünschte Vollständigkeit der reellen Zahlen, die $\mathbb{R}$ z.B. von $\mathbb{Q}$ unterscheidet.

Bemerkung 2.26: *Existiert in $A \subset \mathbb{R}$ ein maximales Element, so ist dieses Maximum auch das Supremum:*

$$\sup A = \max A.$$

Aber nicht jede beschränkte Menge hat ein maximales Element. Z.B. hat $A = [0, 1)$ kein Maximum, denn das Supremum $\sup A = 1$ (der einzige Kandidat für das Maximum) liegt nicht in A.

Beispiel 2.27: Beispielsweise garantiert das Supremumsaxiom, dass es eine positive reelle Zahl $\sqrt{2}$ gibt, deren Quadrat 2 ist. Betrachte dazu $A = \{a \in \mathbb{R}; a^2 \leq 2\}$. Die beiden Lösungen von $x^2 = 2$ ergeben sich als

$$\sqrt{2} = \sup A, \quad -\sqrt{2} = \inf A.$$

Das ist intuitiv plausibel, kann aber auch ganz formal bewiesen werden. Wir betrachten hier nur das Supremum und führen den Beweis von $(\sup A)^2 = 2$ für technisch Interessierte formal durch:

Offensichtlich ist die Menge A beschränkt (sicherlich gilt z.B. $A \subset [-3/2, 3/2]$). Es ist zu zeigen, dass das Supremum (nennen wir es s) in der Tat $s^2 = 2$ erfüllt:

Sicherlich gilt $s > 0$, also speziell $2 + s > 0$.

Angenommen, es gilt $s^2 < 2$. Dann kann s keine obere Schranke von A sein, denn z.B. die Zahl

$$a = s + \frac{2 - s^2}{\underbrace{2 + s}_{>0}} = \frac{2 \cdot s + s^2 + 2 - s^2}{2 + s} = \frac{2 + 2 \cdot s}{2 + s}$$

wäre echt größer als s und liegt in A, denn es gilt

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{4 + 8 \cdot s + 4 \cdot s^2}{(2 + s)^2} = \frac{(8 + 8 \cdot s + 2 \cdot s^2) - 2 \cdot (2 - s^2)}{(2 + s)^2} \\ &= \frac{2 \cdot (2 + s)^2 - 2 \cdot (2 - s^2)}{(2 + s)^2} = 2 - 2 \cdot \frac{2 - s^2}{\underbrace{(2 + s)^2}_{>0}} < 2. \end{aligned}$$

Widerspruch!
Angenommen, es gilt $s^2 > 2$. Dann kann s nicht die kleinste obere Schranke von A sein, denn z. B. die Zahl

$$M = s + \frac{2 - s^2}{\underbrace{2 + s}_{<0}} = \frac{2 \cdot s + s^2 + 2 - s^2}{2 + s} = \frac{2 + 2 \cdot s}{2 + s}$$

ist kleiner als s und ist obere Schranke von A, denn wegen

$$\begin{aligned} M^2 &= \frac{4 + 8 \cdot s + 4 \cdot s^2}{(2 + s)^2} = \frac{(8 + 8 \cdot s + 2 \cdot s^2) + 2 \cdot (s^2 - 2)}{(2 + s)^2} \\ &= \frac{2 \cdot (2 + s)^2 + 2 \cdot (s^2 - 2)}{(2 + s)^2} = 2 + 2 \cdot \frac{s^2 - 2}{\underbrace{(2 + s)^2}_{>0}} > 2 \end{aligned}$$

gilt:

$$a \in A \quad \Leftrightarrow \quad a^2 \leq 2 \quad \Rightarrow \quad a^2 < M^2 \quad \Rightarrow \quad a < M.$$

(Im letzten Schritt wird ausgenutzt, dass wir bereits wissen, dass $M = (2+2 \cdot s)/(2+s) > 0$ gilt, da sicherlich $s > 0$ gilt.) Widerspruch!
Also muss $s^2 = 2$ gelten.

Q.E.D.

2.2.2 Konvergenz monotoner reeller Folgen

Die folgende Aussage ist äußerst hilfreich, denn sie garantiert Konvergenz, ohne dass der konkrete Grenzwert bekannt zu sein braucht. Die Aussage beruht auf Monotonie und ist daher nur auf reelle Folgen anwendbar. Die Konvergenz basiert auf dem Supremumsaxiom 2.25 für $\mathbb{R}$.

Satz 2.28: (Konvergenz monotoner Folgen)

Sei (x_n) eine monoton steigende bzw. fallende reelle Folge. Ist die Folge nach oben bzw. unten beschränkt, also $x_n \leq M$ bzw. $m \leq x_n$ für alle Indizes n, so ist (x_n) konvergent. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \leq M \quad \text{bzw.} \quad m \leq \lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n; n \in \mathbb{N}\}.$$

Beweis: Betrachte eine monoton steigende und durch M nach oben beschränkte Folge (x_n). Setze $A = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$. Der gesuchte Grenzwert ist $x^* = \sup A$. Zum Beweis der Konvergenz gegen x^* sei $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Da x^* die *kleinste* obere Schranke von A ist, ist $x^* - \epsilon$ keine obere Schranke, d.h., es existiert ein Index $N(\epsilon)$ mit $x_{N(\epsilon)} > x^* - \epsilon$. Wegen der Monotonie gilt für alle Indizes $n \geq N(\epsilon)$:

$$x^* \geq x_n \geq x_{N(\epsilon)} \geq x^* - \epsilon \quad \Rightarrow \quad 0 \leq x^* - x_n \leq \epsilon \quad \Rightarrow \quad |x^* - x_n| \leq \epsilon.$$

Da x^* die kleinste obere Schranke von A ist, gilt für die obere Schranke M die Ungleichung $x^* \leq M$.

Die Konvergenz monoton fallender, nach unten beschränkter Folgen ist analog zu beweisen.

Q.E.D.

Beispiel 2.29: Betrachte

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Offensichtlich ist (x_n) monoton steigend und nach oben beschränkt:

$$x_n = 1 + \underbrace{\frac{1}{1!}}_{=\frac{1}{2^0}} + \underbrace{\frac{1}{2!}}_{=\frac{1}{2^1}} + \underbrace{\frac{1}{3!}}_{<\frac{1}{2^2}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{n!}}_{<\frac{1}{2^{n-1}}} \leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \leq 3.$$

Die Folge konvergiert gegen einen Grenzwert ≤ 3 (es ist die Eulersche Zahl 2.71828...).

2.2.3 Cauchy–Folgen, Häufungspunkte von Mengen

$\boxed{\downarrow 4.5.05}$

Wir betrachten einige Aussagen, die sowohl in $\mathbb{R}$ als auch allgemeiner in $\mathbb{C}$ gelten. Zunächst wird der Zusammenhang zwischen reeller und komplexer Konvergenz von Folgen durch den folgenden Satz aufgedeckt:

Satz 2.30: (Komplexe und reelle Konvergenz)

Sei $z_n = x_n + i \cdot y_n \in \mathbb{C}$ mit $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Die Folge (z_n) konvergiert dann und genau dann gegen $z^* = x^* + i \cdot y^*$ $(x^*, y^* \in \mathbb{R})$, wenn Real- und Imaginärteil einzeln konvergieren: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y^*$.

Beweis: Es gilt $|z_n - z^*|^2 = (x_n - x^*)^2 + (y_n - y^*)^2$.

Gilt $(x_n) \to x^*$ und gleichzeitig $(y_n) \to y^*$, so ist $|z_n - z^*|^2$ eine Nullfolge, also auch $|z_n - z^*|$. Dies ist per Definition die Konvergenz $(z_n) \to z^*$.

Umgekehrt, es gelte $(z_n) \to z^*$. Mit

$$0 \leq |x_n - x^*| \leq |z_n - z^*|, \quad 0 \leq |y_n - y^*| \leq |z_n - z^*|$$

folgt mit Satz 2.17 unmittelbar, dass $|x_n - x^*|$ und $|y_n - y^*|$ Nullfolgen sein müssen. Dies ist per Definition die Konvergenz $(x_n) \to x^*$, $(y_n) \to y^*$.

Q.E.D.

Die Definition der Konvergenz 2.5 benötigt die Kenntnis des Grenzwerts. Der folgende Satz 2.31 ist eine Existenzaussage, mit der auch ohne Kenntnis des konkreten Grenzwerts die Konvergenz abgelesen werden kann. Zunächst die entscheidende Begriffsbildung:

Definition 2.31: (Cauchy–Folgen)

Eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ heißt **„Cauchy–Folge“**, *wenn zu jedem $\epsilon > 0$ eine reelle Zahl $N(\epsilon)$ existiert, so dass für alle $n, m \geq N(\epsilon)$ gilt: $|z_n - z_m| \leq \epsilon$.*

Satz 2.32: (Die konvergenten Folgen sind die Cauchy–Folgen)

Eine Folge in $\mathbb{C}$ konvergiert dann und genau dann, wenn sie eine Cauchy–Folge ist.

Der Beweis ist technisch und bringt keine wirklichen Erkenntnisse. Er ist nur der Vollständigkeit halber angegeben:

Beweis: Wir betrachten zunächst Folgen (x_n) in $\mathbb{R}$.
Konvergenz $\Rightarrow$ Cauchy–Folge: Ist (x_n) konvergent mit Grenzwert x^*, so gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon)$, so dass

$$|x_n - x^*| \leq \epsilon, \quad |x_m - x^*| \leq \epsilon$$

gilt für alle $n, m \geq N(\epsilon)$. Für alle $n, m \geq N(\epsilon/2)$ folgt

$$|x_n - x_m| = |x_n - x^* + x^* - x_m| \leq |x_n - x^*| + |x^* - x_m| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

d.h., (x_n) ist eine Cauchy–Folge.
Cauchy–Folge ⇒ Konvergenz: Sei (x_n) eine Cauchy–Folge mit $|x_n - x_m| \leq \epsilon$ für alle $n, m \geq N_x(\epsilon)$. Hieraus folgt, dass die Menge $A_n = \{x_m; m \geq n\}$ für jedes n beschränkt ist:

$$|x_m| \;=\; |x_m - x_n + x_n| \begin{cases} \leq |x_n| + |x_m - x_n|, \\ \geq |x_n| - |x_m - x_n|, \end{cases}$$

wobei z.B. $|x_m - x_n| \leq 1$ für $m, n \geq N_x(1)$ gilt. Man kann also definieren:

$$a_n := \inf \{x_m; m \geq n\}, \quad b_n := \sup \{x_m; m \geq n\}.$$

Offensichtlich gilt $a_n \leq x_n \leq b_n$. Die Folge b_n ist monoton fallend, da die Suprema immer kleinerer Mengen betrachtet werden. Analog ist die Folge a_n monoton wachsend. Nach Satz 2.28 konvergieren damit (a_n) und (b_n) gegen gewisse Grenzwerte a^* und b^* mit $a^* \leq b^*$. Wir zeigen, dass $a^* = b^*$ gilt. Angenommen, es gilt $a^* < b^*$. Betrachte $\epsilon = (b^* - a^*)/4 > 0$. Wähle ein $n \geq N_x(\epsilon)$. Da a_n als Infimum die *größte* untere Schranke von A_n ist, ist $a_n + \epsilon$ keine untere Schranke von A_n mehr: es gibt ein $m_1 \geq n$, so dass $x_{m_1} < a_n + \epsilon$. Anlog gibt es ein $m_2 \geq n$, so dass $x_{m_2} > b_n - \epsilon$. Wegen der Monotonie von (a_n) und (b_n) gilt $a_n \leq a^*$ und $b_n \geq b^*$, also:

$$b_n - a_n \geq b^* - a^* = 4 \cdot \epsilon.$$

Damit folgt

$$x_{m_2} - x_{m_1} = \underbrace{x_{m_2} - b_n}_{>-\epsilon} + \underbrace{b_n - a_n}_{\geq 4 \cdot \epsilon} + \underbrace{a_n - x_{m_1}}_{>-\epsilon} \geq -\epsilon + 4 \cdot \epsilon - \epsilon > \epsilon.$$

Hierbei gilt $m_1, m_2 \geq n \geq N_x(\epsilon)$. Mit der Cauchy–Eigenschaft von (x_n) müßte für solche Indizes aber $|x_{m_2} - x_{m_1}| \leq \epsilon$ gelten. Widerspruch!

Damit ist gezeigt, dass *reelle* Folgen (x_n) genau dann konvergieren, wenn sie Cauchy–Folgen sind. Analog zu Satz 2.30 ist leicht gezeigt, dass eine komplexe Folge genau dann eine Cauchy–Folge ist, wenn die Folgen der Real- und Imaginärteile beide Cauchy–Folgen sind. Zusammen mit Satz 2.30 ergibt sich damit, dass auch komplexe Folgen genau dann konvergieren, wenn sie Cauchy–Folgen sind.

Q.E.D.

Auch wenn der Begriff „Cauchy–Folgen“ sehr technisch ist, ist er für Anwendungen sehr interessant. Er taucht (wenngleich nur im Beweis versteckt) beim für die Praxis sehr wichtigen Banachschen Fixpunktsatz für kontrahierende Abbildungen auf. In dieser Vorlesung gehen wir hierauf aber nicht weiter ein.

Noch einige in der Literatur oft vorkommende Begriffe (die in dieser Vorlesung aber nicht wirklich zum Einsatz kommen werden):

Definition 2.33: (Häufungspunkte von Mengen)

Ein Punkt $z^* \in \mathbb{C}$ heißt **„Häufungspunkt“** *einer Menge $A \subset \mathbb{C}$, wenn für jedes $\epsilon > 0$ die sogenannte* **„ϵ-Umgebung“** *von z^**

$$\bar{U}_\epsilon(z^*) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z^*| \leq \epsilon\}$$

mindestens einen Punkt in A enthält: $\bar{U}_\epsilon(z^*) \cap A \neq \emptyset$.

Geometrisch ist die ϵ-Umgebung eines Punktes z^* ein Kreisgebiet mit Mittelpunkt z^* und Radius ϵ, wobei in der obigen Definition der Kreisrand

$$\{z \in \mathbb{C}; |z - z^*| = \epsilon\}$$

mit zur Umgebung gerechnet wird.

Beispiel 2.34: Offensichtlich ist jeder Punkt in A ein Häufungspunkt von A (denn dieser Punkt liegt in jeder ϵ-Umgebung von sich selbst). Es kann aber auch Punkte außerhalb von A geben, die Häufungspunkte von A sind. In $\mathbb{R}$ sind z.B. die Endpunkte von Intervallen stets Häufungspunkte, selbst wenn das Intervall $A = (a, b) \subset \mathbb{R}$ offen ist. Z.B.: offensichtlich liegt für $\epsilon > 0$ der Punkt $x = \min((a + b)/2, a + \epsilon)$ sowohl in $A = (a, b)$ als auch in der ϵ Umgebung von a. Also ist a ein Häufungspunkt von A.

Wir definieren die Begriffsbildungen „abgeschlossene Menge“ und „offene Menge“:

Definition 2.35: (abgeschlossene Mengen)

Eine Menge $A \in \mathbb{C}$ heißt **„abgeschlossen“**, *wenn jeder ihrer Häufungspunkte in A liegt. Die Menge heißt* **„offen“**, *wenn ihr Komplement $\mathbb{C} \setminus A = \{z \in \mathbb{C}; z \notin A\}$ abgeschlossen ist.*

Beispiel 2.36: Abgeschlossene Intervalle $[a, b]$ in $\mathbb{R}$ sind abgeschlossene Mengen. Die hier definierten ϵ-Umgebungen

$$\bar{U}_\epsilon(z^*) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z^*| \leq \epsilon\}$$

sind abgeschlossene Mengen in $\mathbb{C}$.
Achtung: in der Literatur werden als ϵ-Umgebungen oft die Mengen

$$U_\epsilon(z^*) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z^*| < \epsilon\}$$

betrachtet, die den Kreisrand $\{z \in \mathbb{C}; |z - z^*| = \epsilon\}$ nicht enthalten. Diese Mengen sind **nicht abgeschlossen**, denn die Punkte des Kreisrands sind Häufungspunkte. Die U_ϵ sind offene Mengen.

2.2.4 Teilfolgen und Häufungspunkte von Folgen

Neben der Konvergenz gibt es den (schwächeren) Begriff von „Teilkonvergenz", der sich in sogenannten „Häufungspunkten von Folgen" (im Unterschied zum schon eingeführten Begriff „Häufungspunkte von Mengen") manifestiert.

Definition 2.37: (Häufungspunkte von Folgen)

Ein Punkt $z^* \in \mathbb{C}$ heißt **„Häufungspunkt"** *der Folge (z_n), wenn in jeder ϵ-Umgebung von z^* unendlich viele Folgenglieder liegen, also: zu jedem $\epsilon > 0$ existieren unendlich viele Folgenglieder z_n mit $|z_n - z^*| \leq \epsilon$.*

Beispiel 2.38: Die Folge $x_n = (-1)^n$, also $(x_n) = (-1, 1, -1, 1, \dots)$ hat die beiden Häufungspunkte $x_1^* = 1$ und $x_2^* = -1$.
Der Punkt $x_1^* = 1$ ist Häufungspunkt, denn für alle Folgenglieder mit geradem Index n (dies sind unendlich viele) gilt $|x_n - x_1^*| = 0 \leq \epsilon$ für jedes $\epsilon > 0$.
Der Punkt $x_2^* = -1$ ist Häufungspunkt, denn für alle Folgenglieder mit ungeradem Index n (dies sind unendlich viele) gilt $|x_n - x_2^*| = 0 \leq \epsilon$ für jedes $\epsilon > 0$.

Bemerkung 2.39: *Sei $n_1 < n_2 < \dots$ eine streng monoton steigende Folge von Indizes in $\mathbb{N}$. Die Folge $(z_{n_i}) = (z_{n_1}, z_{n_2}, \dots)$ heißt* **„Teilfolge"** *der Folge (z_n).*

z^* ist genau dann Häufungspunkt der Folge (z_n), wenn es eine gegen z^* konvergierende Teilfolge von (z_n) gibt.

Zu einem gegebenen Häufungspunkt z^* folgt eine explizite Konstruktion einer konvergenten Teilfolge. Zu $\epsilon = 1/k$ gibt es unendlich viele Folgenglieder z_n mit $|z_n - z^*| \leq 1/k$. Wähle n_i als den ersten Folgenindex, für den der Abstand zwischen z_n und dem Häufungspunkt den Wert $1/k$ unterschreitet:

$$n_k := \min\left\{n; n > n_{k-1}; |z_n - z^*| \leq \frac{1}{k}\right\} \quad (n_0 := 0).$$

Nach Konstruktion gilt $|z_{n_k} - z^*| \leq \frac{1}{k}$ für alle $k = 1, 2, \dots$ und damit auch $|z_{n_j} - z^*| \leq \frac{1}{j} \leq \frac{1}{k}$ für alle $n_j \geq n_k$. Damit konvergiert (z_{n_k}) gegen z^*.

Umgekehrt, gibt es eine gegen z^* konvergente Teilfolge von (z_n), so liegen in jeder ϵ-Umgebung von z^* alle bis auf endliche viele Glieder der Teilfolge. Also ist z^* ein Häufungspunkt von (z_n).

Beispiel 2.40: Für die Folge $(x_n) = (-1, 1, -1, 1, \dots)$ aus Beispiel 2.38 konvergiert die Teilfolge $(x_2, x_4, \dots) = (1, 1, 1, \dots)$ gegeben den Häufungspunkt 1 und die Teilfolge $(x_1, x_3, \dots) = (-1, -1, -1, \dots)$ gegeben den Häufungspunkt -1.

Satz 2.41:

Eine konvergente Folge besitzt genau einen Häufungspunkt: den Grenzwert.

Beweis: Für den Grenzwert z^* einer konvergierenden Folge (z_n) gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon)$, so dass alle Folgenglieder mit Indizes $\geq N(\epsilon)$ in der ϵ-Umgebung von z^* liegen. Damit ist der Grenzwert ein Häufungspunkt. Gäbe es einen weiteren davon verschiedenen Häufungspunkt z^{**}, gäbe es für $\epsilon = |z^{**} - z^*|/3 > 0$ mindestens einen Folgenpunkt z_n mit Index $n \geq N(\epsilon)$ in dieser ϵ-Umgebung von z^{**}, und es würde folgen:

$$3 \cdot \epsilon = |z^* - z^{**}| = |z^* - z_n + z_n - z^{**}| \leq |z^* - z_n| + |z_n - z^{**}| \leq 2 \cdot \epsilon.$$

Widerspruch!

Q.E.D.

$\boxed{\text{10.5.05}\downarrow}$ **Satz 2.42:** (Bolzano (1781–1848) und Weierstrass (1815–1897))

Eine Folge heißt **beschränkt**, *wenn die Menge aller Folgenpunkte beschränkt ist. Es gilt: Jede beschränkte Folge besitzt mindestens einen Häufungspunkt.*

Wir verzichten auf die strenge technische Durchführung des Beweises und geben nur die Idee an:

Beweisidee: Die Folge liege innerhalb eines Quadrates in der komplexen Ebene. Zerlege dieses Quadrat in 4 gleichgrosse Teilquadrate der halben Seitenlänge. Mindestens eines der Teilquadrate enthält unendliche viele der Folgenglieder. Wähle eines dieser Teilquadrate aus und zerlege es wiederum in 4 Teilquadrate usw. Die so konstruierte Folge von Quadraten schrumpft auf einen Punkt zusammen (dies ist der Häufungspunkt), in dessen Nähe nach Konstruktion unendlich viele der Folgenpunkte existieren.

Q.E.D.

Bemerkung 2.43: *Nach Bemerkung 2.39 heißt dies:*

$$\boxed{\textit{Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.}}$$

2.3 Unendliches, uneigentliche Konvergenz

In diesem Abschnitt geht es um eine oft nützliche Schreibweise, die in der hier vorgestellten Form nur bei reellen Folgen sinnvoll ist. Die „unendlichen Werte“ $\pm\infty$ sind keine reellen Zahlen, sondern dienen nur als nützliche Abkürzungen, um gewisse Situationen zu beschreiben. Wir lassen $\pm\infty$ als („uneigentliche“) Grenzwerte reeller Folgen zu:

Definition 2.44: ($\pm\infty$ als Grenzwert)

- *Eine reelle Folge* (x_n) **„konvergiert (uneigentlich) gegen ∞“**, *wenn die Folgenglieder jede beliebig vorgegebene Schranke $c > 0$ überschreiten: zu jedem reellen c existiert eine reelle Zahl $N(c)$, so dass $x_n \geq c$ gilt für alle Indizes $n \geq N(c)$. Schreibweise:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \ .$$

- *Eine reelle Folge* (x_n) **„konvergiert (uneigentlich) gegen $-\infty$“**, *wenn die Folgenglieder jede beliebig vorgegebene Schranke $c < 0$ unterschreiten: zu jedem reellen c existiert eine reelle Zahl $N(c)$, so dass $x_n \leq c$ gilt für alle Indizes $n \geq N(c)$. Schreibweise:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \ .$$

Beispiel 2.45: Die Folgen $x_n = n$, $x_n = n^2$, $x_n = \sqrt{n}$, $x_n = 2^n$ konvergieren gegen ∞. Die Folgen $x_n = -n$, $x_n = -n^2$, $x_n = -\sqrt{n}$, $x_n = -(2^n)$ konvergieren gegen $-\infty$.

Beispiel 2.46: Achtung: die Folgen $x_n = (-1)^n \cdot n$ (also $(-1, 2, -3, 4, -5, \dots)$) oder auch $x_n = (-2)^n$ (also $(-2, 4, -8, 16, -32, \dots)$) konvergieren **nicht** gegen ∞ oder $-\infty$, sie divergieren!

2.4 Wachstum von Folgen, Landau-Symbole

Algorithmen werden typischerweise auf Problemklassen angewendet, die einen „Größenparameter“ n haben: Invertierung von $n \times n$ Matrizen, Sortieren einer Liste mit n Elementen, Untersuchungen auf Graphen mit n Knoten usw. Die Laufzeit des Algorithmus wächst mit der durch n gegebenen Größe des Problems, und man möchte oft eine einfach zu lesende Kostenabschätzung in Abhängigkeit von n angeben. Hierzu dienen die sogenannten „Landau-Symbole“ O („Big-Oh“), o („Small-Oh“) etc.:

Notation 2.47:

Seien (f_n), (g_n) Folgen komplexer Zahlen.

- $f_n = O(g_n)$ *heißt, dass die Folge* $|f_n|/|g_n|$ *nach oben beschränkt ist.*
- $f_n = o(g_n)$ *heißt, dass die Folge* f_n/g_n *eine Nullfolge ist.*
- $f_n = \Omega(g_n)$ *heißt, dass die Folge* $|g_n|/|f_n|$ *nach oben beschränkt ist.*
- $f_n = \omega(g_n)$ *heißt, dass die Folge* g_n/f_n *eine Nullfolge ist.*
- $f_n = \Theta(g_n)$ *heißt, dass die Folgen* $|f_n/g_n|$ *und* $|g_n/f_n|$ *nach oben beschränkt sind: es existieren positive Konstanten* c *und* C*, so dass* $c \cdot |g_n| \leq |f_n| \leq C \cdot |g_n|$ *gilt für alle hinreichend großen* n.

Hierbei nimmt man implizit an, dass man sich für große Werte von n interessiert. Eigentlich sollte man genauer sagen: $f_n = O(g_n)$ „im Limes $n \to \infty$“ etc.

Beispiel 2.48: $n^2 + 1 = O(n^2)$, $n^2 + 1 = O(n^3)$, $n^2 + 1 = O(n^4)$, $n^2 + 1 = O(2^n)$,

$$\frac{1}{n+1} = O\Big(\frac{1}{n}\Big), \quad \frac{1}{n+1} = O\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big), \quad n^2 = o(n^3), \quad n^2 = o(2^n), \quad \frac{1}{n+1} = o\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big),$$

$$2 \cdot n + 1 = \Omega(n),\ 2 \cdot n^2 + 1 = \omega(n),\ \frac{n^3}{2} = \Omega(n^3),\ \frac{2^n}{7} = \omega(n^2),\ 2 \cdot n + 1 = \Theta(n),\ \frac{n^3}{2} = \Theta(n^3).$$

Beispiel 2.49: Man kann n lineare Gleichungen für n Unbekannte numerisch stets mit höchstens etwa $n^3/3$ Multiplikationen lösen. Also:

„Die Kosten der Lösung eines linearen $n \times n$ Systems ist $O(n^3)$.“

Ist die Koeffizientenmatrix eine obere oder untere Dreiecksmatrix, kommt man mit höchstens $n^2/2$ Multiplikationen aus. Die Kosten sind in diesem Fall $O(n^2)$.

Die Kosten, alle Eigenwerte und -vektoren einer $n \times n$-Matrix numerisch zu bestimmen, sind $O(n^3)$.

Das Sortieren einer Liste mit n Elementen kostet $O(n \cdot \log_2(n))$ Vergleichsoperationen. (Genauer: es existieren Sortieralgorithmen, die mit diesem Aufwand auskommen).

Kapitel 3

Reihen

Es geht nun um spezielle Folgen, deren Glieder durch Summation entstehen. Für diese „Reihen" gibt es spezielle Konvergenzkriterien.

3.1 Definitionen, Beispiele, Sätze

Definition 3.1: (Reihen)

Die einer komplexen Folge (z_n) *zugeordnete* **„Reihe"** *ist die Folge* (S_n) *der* **„Partialsummen"**

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k.$$

Existiert ein Grenzwert der Partialsummen, so nennt man ihn den Wert der **„unendlichen Reihe"** *und schreibt auch* $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} z_k$. *Eine Reihe heißt* **„absolut konvergent"**, *wenn der Grenzwert* $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ *existiert.*

Beispiel 3.2: Die sogenannte **„arithmetische Reihe“** besitzt eine explizite Darstellung:

$$\begin{aligned}
S_n = \sum_{k=1}^{n} k &= 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot \Big(1 + 2 + \cdots + (n-1) + n \\
&\qquad\quad n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 \Big) \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot \Big(\underbrace{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ Summanden}} \Big) \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1).
\end{aligned}$$

Halten wir fest:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.}$$

Die arithmetische Reihe konvergiert damit uneigentlich gegen ∞.

Beispiel 3.3: Sei $z \in \mathbb{C}$. Eine **„geometrische Reihe“** ist von der Form

$$S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \sum_{k=0}^{n} z^k \ .$$

Auch in diesem Fall kann man eine explizite Formel für S_n angeben:

$$\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} \ .}$$

Dies ist leicht nachzuvollziehen:

$$\begin{aligned}
(1-z) \cdot S_n &= (1-z) \cdot (1 + z + z^2 + \cdots + z^n) \\
&= 1 \cdot (1 + z + z^2 + \cdots + z^n) \\
&\quad - z \cdot (1 + z + z^2 + \cdots + z^n) \\
&= 1 + z + z^2 + \cdots + z^n \\
&\quad - z - z^2 - \cdots - z^n - z^{n+1} \\
&= 1 - z^{n+1}.
\end{aligned}$$

Mit der expliziten Summenformel ist die Konvergenz geometrischer Reihen leicht zu überprüfen. Für $|z| < 1$ konvergiert z^{n+1} gegen 0 (Beispiel 2.10):

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1 - z} \quad \text{für } |z| < 1 \ .}$$

Diese Reihe konvergiert absolut, denn mit denselben Argumenten konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} |z|^k = \frac{1}{1-|z|} \quad \text{für } |z| < 1 \ .$$

Beispiel 3.4: Einige Berechnungen mit MuPAD. Für die symbolische Berechnung von Summen ist die Funktion `sum` zuständig:

```
>> sum(k, k = 1..n)
                                 2
                            n   n
                            - + --
                            2   2
```

Durch Faktorisierung mittels `factor` ergibt sich oft eine einfachere Form:

```
>> factor(%)
                         1/2 n (n + 1)
```

Die geometrische Reihe:

```
>> sum(z^k, k = 0..n)
                               n
                           z z  - 1
                           --------
                            z - 1
>> assume(0 < z < 1):
>> sum(z^k, k = 0..infinity)
                                1
                            - -----
                              z - 1
```

Beispiel 3.5: Die periodische Dezimaldarstellung $0\,.\,\overline{d_1 d_2 d_3}$ mit Dezimalziffern $d_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ steht für $0\,.\,d_1 d_2 d_3\ d_1 d_2 d_3\ d_1 d_2 d_3 \ldots$. Solche zyklischen Dezimalentwicklungen sind rationale Zahlen. Sei $n = „d_1 d_2 d_3“ = d_1 \cdot 100 + d_2 \cdot 10 + d_3 \in \{0, \ldots, 999\}$: $\boxed{\downarrow 11.5.02}$

$$0\,.\,\underbrace{d_1 d_2 d_3}_{n}\ \underbrace{d_1 d_2 d_3}_{n}\ \underbrace{d_1 d_2 d_3}_{n} \cdots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \frac{d_1}{10^4} + \frac{d_2}{10^5} + \frac{d_3}{10^6} + \cdots$$

$$= \frac{d_1 \cdot 100 + d_2 \cdot 10 + d_3}{10^3} + \frac{d_1 \cdot 100 + d_2 \cdot 10 + d_3}{10^6} + \cdots$$

$$= \frac{n}{1000} + \frac{n}{1000^2} + \frac{n}{1000^3} + \cdots = n \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1000^k}$$

$$= n \cdot \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1000^k} \; - \; 1 \Big) = n \cdot \Big(\frac{1}{1 - \frac{1}{1000}} - 1 \Big) = n \cdot \Big(\frac{1000}{999} - 1 \Big) = \frac{n}{999}.$$

Bemerkung: statt der formalen Rechnung kann man die Beweisidee für die Summenformel der geometrischen Reihe explizit nachvollziehen, was in diesem Fall als "Rechentrick" sogar ganz einfach zu merken ist:

$$\begin{array}{rrcl} & 1000 \cdot x & = & d_1 d_2 d_3 \,.\, d_1 d_2 d_3 \; d_1 d_2 d_3 \; \ldots \\ - & x & = & 0 \,.\, d_1 d_2 d_3 \; d_1 d_2 d_3 \; \ldots \\ \hline & 999 \cdot x & = & \underbrace{d_1 d_2 d_3}_{n} \,.\, 000\;000 \; \ldots \qquad \Rightarrow \quad x = \dfrac{n}{999}. \end{array}$$

Das Cauchy-Kriterium (Definition 2.31 und Satz 2.32) liefert folgendes Konvergenzkriterium für Reihen:

Satz 3.6: (Das Cauchy-Kriterium für Reihen)

Die Reihe $\sum_k z_k$ *konvergiert genau dann, wenn es zu jedem* $\epsilon > 0$ *ein* $N(\epsilon)$ *gibt, so dass* $\Big| \sum_{k=n}^{m} z_k \Big| \leq \epsilon$ *gilt für alle* $m \geq n \geq N(\epsilon)$.

Beweis: Nach dem Cauchy-Kriterium konvergiert die Folge $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon)$ gibt, so dass

$$|S_m - S_n| \leq \epsilon \text{ für alle } m, n \geq N(\epsilon).$$

Hierbei ist $S_m - S_n = \sum_{k=n+1}^{m} z_k$ für $m > n$. Ersetzt man n durch $n - 1$ ergibt sich das angegebene Kriterium.

Q.E.D.

Als Folgerung ergibt sich, dass absolut konvergente Reihen konvergieren:

Satz 3.7: (Absolute Konvergenz impliziert Konvergenz)

Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ *konvergiert, dann auch* $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$.

Beweis: Die Dreiecksungleichung liefert $\Big| \sum_{k=n}^{m} z_k \Big| \leq \sum_{k=n}^{m} |z_k|$. Erfüllt $\sum_k |z_k|$ das Cauchy-Kriterium 3.6, so ist dieses Kriterium automatisch auch für $\sum_k z_k$ erfüllt.

Q.E.D.

Nur Reihen über Nullfolgen können konvergieren:

Satz 3.8:

Wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ *konvergiert, dann ist* (z_k) *eine Nullfolge.*

Beweis: Das Cauchy-Kriterium 3.6 mit $m = n$ besagt, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon)$ gibt, so dass

$$\Big| \sum_{k=n}^{n} z_k \Big| = |z_n| \leq \epsilon$$

für alle $n \geq N(\epsilon)$ gilt. Dies ist die Konvergenz $(z_n) \to 0$.

Q.E.D.

Dies ist kein Konvergenz- sondern ein Divergenzkriterium: bilden die Summanden keine Nullfolge, muß die Reihe divergieren!

Beispiel 3.9: Die Reihe $\sum_k \frac{k}{k+1}$ konvergiert nicht, da die Summanden $\frac{k}{k+1}$ nicht gegen 0 konvergieren (sie konvergieren gegen 1).

Die Umkehrung gilt nicht: bilden die Summanden eine Nullfolge, so kann man <u>nicht</u> darauf schließen, dass die Reihe konvergiert. Ein Gegenbeispiel:

Beispiel 3.10: Die sogenannte **„harmonische Reihe“** $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ ist unbeschränkt, d.h., sie divergiert.

Beweis: Betrachte die Teilfolge (S_{2^m}):

$$S_{2^m} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}}_{> \frac{2^2}{2^3} = \frac{1}{2}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2^{m-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^m}}_{> \frac{2^{m-1}}{2^m} = \frac{1}{2}}$$

$$\geq 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{m \text{ Terme}} = 1 + \frac{m}{2}.$$

Da (S_n) monoton wächst, konvergiert (S_n) uneigentlich gegen ∞.

Q.E.D.

Auf dieses Argument kommen wir später beim „Kondensationskriterium“ 3.20 zurück.

Der Satz 2.28 liefert für reelle Reihen folgendes Konvergenzkriterium:

Satz 3.11: (Reihenkonvergenz bei positiven Summanden)

Sei (x_n) *eine reelle Nullfolge mit* $x_n \geq 0$. *Die Reihe* $\sum_k x_k$ *konvergiert dann und genau dann, wenn die Partialsummen* $\sum_{k=1}^{n} x_k$ *nach oben beschränkt sind.*

Beweis: Wegen $x_k \geq 0$ ist die Partialsummenfolge $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ monoton steigend. Ist sie beschränkt, konvergiert sie nach Satz 2.28. Konvergiert sie, ist sie selbstverständlich beschränkt.

Q.E.D.

Wir erinnern an Beispiel 2.29:

Beispiel 3.12: Mit $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot k \geq 2^{k-1}$ sind die folgenden Partialsummen nach oben beschränkt:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \underbrace{\frac{1}{1!}}_{=\frac{1}{2^0}} + \underbrace{\frac{1}{2!}}_{=\frac{1}{2^1}} + \underbrace{\frac{1}{3!}}_{<\frac{1}{2^2}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{n!}}_{<\frac{1}{2^{n-1}}}$$

$$\leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \leq 3.$$

Damit konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ gegen einen Wert ≤ 3 (es ist die Eulersche Zahl 2.718...).

3.2 Rechenregeln und das Cauchy-Produkt

Die Rechenregeln 2.13 liefern sofort:

Satz 3.13: (Rechenregeln)

a) Wenn $\sum_k z_k$ konvergiert, dann auch $\sum_k c \cdot z_k$ für jedes $c \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot z_k = c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} z_k.$$

b) Wenn $\sum_k z_k$ und $\sum_k \tilde{z}_k$ konvergieren, dann auch $\sum_k (z_k \pm \tilde{z}_k)$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (z_k \pm \tilde{z}_k) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k \ \pm \ \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{z}_k.$$

Beweis: Satz 2.13 a) + b) angewendet auf die Partialsummen.

Q.E.D.

Es macht Sinn, Reihen miteinander zu multiplizieren. Da das Distributivgesetz aus dem Produkt zweier Partialsummen eine endliche Doppelsumme

$$(a_1 + \cdots + a_n) \cdot (b_1 + \cdots + b_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i \cdot b_j$$

ergibt, muss man die Summanden zunächst gezielt zusammenfassen, um zu einer Folge von Partialsummen für das Produkt zu kommen. Wir führen eine „Anordnung" ein, indem wir einen formalen Ordnungsparameter ζ einführen:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \zeta^k{}_{\mid \zeta = 1} \ .$$

Das Produkt ordnen wir dann nach Potenzen von ζ:

$$(a_1 \cdot \zeta + a_2 \cdot \zeta^2 + \cdots) \cdot (b_1 \cdot \zeta + b_2 \cdot \zeta^2 + \cdots)$$

$$= a_1 \cdot b_1 \cdot \zeta^2 + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) \cdot \zeta^3 + (a_1 \cdot b_3 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_1) \cdot \zeta^4 + \cdots .$$

Die einzelnen ζ-Potenzen liefern die Summanden der Partialsummen. Dies motiviert die folgende Definition:

Definition 3.14: (Das Cauchy-Produkt von Reihen)

Das **„Cauchy-Produkt"** *(die* **„Faltung"***) zweier Reihen* $\sum_k a_k$, $\sum_k b_k$ *ist die Reihe* $\sum_k c_k$ *mit*

$$c_k = \sum_{\substack{i,j \\ i+j=k}} a_i \cdot b_j .$$

Satz 3.15: (Konvergenz des Cauchy-Produkts) $\boxed{\downarrow 17.5.02}$

Sind die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *absolut konvergent, so auch das Cauchy-Produkt* $\sum_{k=2}^{\infty} c_k$. *Es gilt* $\quad \sum_{k=2}^{\infty} c_k = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \Big) \cdot \Big(\sum_{k=1}^{\infty} b_k \Big)$.

Beweis: (Für technisch Interessierte) Für die Partialsummen des Cauchy-Produkts gilt

$$\sum_{k=2}^{n} |c_k| = \sum_{k=2}^{n} \Big| \sum_{\substack{i,j \\ i+j=k}} a_i \cdot b_j \Big| \le \sum_{k=2}^{n} \sum_{\substack{i,j \\ i+j=k}} |a_i| \cdot |b_j|$$

$$\le \sum_{\substack{i,j \\ i \le n, j \le n}} |a_i| \cdot |b_j| = \Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i| \Big) \cdot \Big(\sum_{j=1}^{n} |b_j| \Big).$$

Da die rechte Seite für $n \to \infty$ konvergiert, ist die rechte Seite beschränkt. Nach Satz 3.11 liefert dies die Konvergenz von $\sum_k |c_k|$, also die absolute Konvergenz

des Cauchy-Produkts.
Das Cauchy-Produkt konvergiert gegen das Produkt der einzelnen Summen:

$$\Big| \underbrace{\Big(\sum_{i=1}^{2\,n} a_i \Big)}_{S_{2n}^{(a)}} \cdot \underbrace{\Big(\sum_{j=1}^{2\,n} b_j \Big)}_{S_{2n}^{(b)}} - \underbrace{\sum_{k=2}^{2\,n} c_k}_{S_{2n}^{(c)}} \Big| = \Big| \sum_{i=1}^{2\,n} \sum_{j=1}^{2\,n} a_i \cdot b_j - \sum_{k=2}^{2\,n} \sum_{\substack{i,j \\ i+j=k}} a_i \cdot b_j \Big|$$

$$= \Big| \sum_{\substack{i,j \\ i \leq 2n, j \leq 2n \\ i+j > 2n}} a_i \cdot b_j \Big| \leq \sum_{\substack{i,j \\ i \leq 2n, j \leq 2n \\ i+j > 2n}} |a_i| \cdot |b_j|$$

$$\leq \max(|a_n|, \ldots, |a_{2\,n}|) \cdot \sum_{j=n+1}^{2\,n} |b_j| \ + \ \max(|b_n|, \ldots, |b_{2\,n}|) \cdot \sum_{i=n+1}^{2\,n} |a_i|.$$

Da (a_n), (b_n) Nullfolgen sind, ist der letzte Ausdruck eine Nullfolge. Für die Partialsummen folgt

$$S_{2\,n}^{(c)} = S_{2\,n}^{(a)} \cdot S_{2\,n}^{(b)} + \mathrm{Nullfolge}_n,$$

was zur Behauptung $S_n^{(c)} \to (\sum_i a_i) \cdot (\sum_j b_j)$ führt.

Q.E.D.

3.3 Spezielle Konvergenzkriterien

Es gibt eine Anzahl spezieller Kriterien für die Konvergenz/Divergenz von Reihen:

Satz 3.16: (Majorantenkriterium)

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ eine konvergente Reihe mit reellen Summanden $x_k \geq 0$. Sei (z_n) eine komplexe Folge. Gilt für alle bis auf endlich viele Indizes $|z_k| \leq x_k$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ absolut.
Bezeichung: $\sum_k x_k$ heißt **„konvergente Majorante“** *für $\sum_k z_k$.*

Beweis: Die Partialsummen von $\sum_k |z_k|$ sind beschränkt (o.B.d.A. nehmen wir an, $|z_k| \leq x_k$ gilt für alle Indizes):

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k| \leq \sum_{k=1}^{n} x_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

Nach Satz 3.11 konvergiert $\sum_k |z_k|$, d.h., die Reihe $\sum_k z_k$ konvergiert absolut.

Q.E.D.

Satz 3.17: (Minorantenkriterium)

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ eine divergente Reihe mit reellen Summanden $x_k \geq 0$ Sei (y_n) eine reelle Folge. Gilt für alle bis auf endlich viele Indizes $x_k \leq y_k$, so divergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ (genauer: sie konvergiert uneigentlich gegen ∞).

Bezeichung: $\sum_k x_k$ heißt **„divergente Minorante“** *für $\sum_k y_k$.*

Beweis: Würde die Reihe $\sum_k y_k$ konvergieren, wäre sie eine konvergente Majorante für $\sum_k x_k$, und nach Satz 3.16 müßte $\sum_k x_k$ konvergieren.

Q.E.D.

Satz 3.18: (Quotientenkriterium)

Sei (z_n) eine komplexe Folge. Gilt für alle bis auf endlich viele Indizes $\frac{|z_{k+1}|}{|z_k|} \leq c$ mit einem Wert $c \in (0, 1)$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ absolut.

Beweis: Aus der Abschätzung folgt

$$|z_k| \leq c \cdot |z_{k-1}| \leq c^2 \cdot |z_{k-2}| \leq \cdots \leq c^{k-1} \cdot |z_1|.$$

Die geometrische Reihe $\sum_k |z_1| \cdot c^{k-1}$ konvergiert nach Beispiel 3.3 für $c \in (0, 1)$ und ist damit eine konvergente Majorante für $\sum_k z_k$.

Q.E.D.

Satz 3.19: (Wurzelkriterium)

Sei (z_n) eine komplexe Folge. Gilt für alle bis auf endlich viele Indizes $\sqrt[k]{|z_k|} \leq c$ mit einem Wert $c \in (0, 1)$, so konvergiert die komplexe Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ absolut.

Beweis: Aus der Abschätzung folgt $|z_k| \leq c^k$. Damit ist die geometrische Reihe $\sum_k c^k$ für $c \in (0, 1)$ eine konvergente Majorante für $\sum_k z_k$.

Q.E.D.

Satz 3.20: (Kondensationskriterium)

Ist (x_n) eine monoton fallende Folge positiver reeller Zahlen, so konvergiert $\sum_k x_k$ dann und genau dann, wenn die Reihe

$$\sum_m^{\infty} 2^m \cdot x_{2^m}$$

konvergiert.

Beweis: Nach Satz 3.11 ist zu entscheiden, ob die Partialsummen $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ beschränkt sind. Betrachte

$$\begin{aligned} S_{2^{n+1}-1} = \underbrace{x_1}_{=1\cdot x_1} + \underbrace{x_2 + x_3}_{\leq 2\cdot x_2} + \underbrace{x_4 + \cdots + x_7}_{\leq 4\cdot x_4} + \cdots + \underbrace{x_{2^n} + \cdots + x_{2^{n+1}-1}}_{\leq 2^n \cdot x_{2^n}} \\ \leq \sum_{m=0}^{n} 2^m \cdot x_{2^m}. \end{aligned}$$

Konvergiert $\sum_m 2^m \cdot x_{2^m}$, so sind alle Partialsummen S_n beschränkt und $\sum_k x_k$ konvergiert. Umgekehrt gilt:

$$\begin{aligned} S_{2^n} = x_1 + \underbrace{x_2}_{=1\cdot x_2} + \underbrace{x_3 + x_4}_{\geq 2\cdot x_4} + \underbrace{x_5 + \cdots + x_8}_{\geq 4\cdot x_8} + \cdots + \underbrace{x_{2^{n-1}+1} + \cdots + x_{2^n}}_{\geq 2^{n-1}\cdot x_{2^n}} \\ \geq x_1 + \sum_{m=1}^{n} 2^{m-1} \cdot x_{2^m} \geq \frac{1}{2} \cdot \sum_{m=1}^{n} 2^m \cdot x_{2^m}. \end{aligned}$$

Divergiert $\sum_m 2^m \cdot x_{2^m}$, so sind alle Partialsummen unbeschränkt und $\sum_k x_k$ divergiert.

Q.E.D.

Hier eine Reihe von Beispielen zu den diversen Kriterien:

Beispiel 3.21: Wir setzen das Majorantenkriterium 3.16 ein, um zu zeigen, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert. Dazu machen wir eine Anleihe beim kommenden Beispiel 3.31, wo die Konvergenz

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = 1$$

gezeigt wird. Dazu schätzen wir $x_k = \frac{1}{k^2}$ gegen $\tilde{y}_k = \frac{1}{k\cdot(k+1)}$ ab ($\sum_k \tilde{y}_k$ soll als konvergente Majorante für $\sum_k x_k$ dienen). Es gilt zwar nicht unmittelbar $|x_k| = x_k \leq \tilde{y}_k$, aber mit

$$k^2 \geq \frac{k \cdot (k+1)}{2}$$

($\Leftrightarrow\ 2 \cdot k^2 \geq k^2 + k\ \Leftrightarrow k^2 \geq k$; dies ist für alle $k \geq 1$ erfüllt) folgt

$$x_k = \frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{k \cdot (k+1)} = 2 \cdot \tilde{y}_k =: y_k.$$

Mit Beispiel 3.31 folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} y_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k \cdot (k+1)} = 2.$$

Das Majorantenkriterium garantiert hiermit die Konvergenz von $\sum_k \frac{1}{k^2}$. Welchen Wert diese Reihe hat, haben wir damit allerdings nicht herausbekommen.

Beispiel 3.22: Die in Beispiel 3.21 betrachtete Summe wird mit MuPAD berechnet:

```
>> sum(1/k^2, k = 1..infinity)
                                  2
                                PI
                                ---
                                 6
```

Hierbei ist `PI` $= \pi = 3.1415....$ Zur Kontrolle vergleichen wir diesen Wert mit einer langen, aber endlichen Summe:

```
>> float(%)
                            1.644934067

>> sum(1.0/k^2, k = 1..1000)

                            1.643934567
```

(Das passt einigermaßen.) Einige weitere Summen, z.B. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k \cdot (k+2) \cdot (k+5)}$:

```
>> sum((k + 1)/k/(k + 2)/(k + 5), k = 1..infinity)

                              323/900
```

Oder auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$:

```
>> sum(1/k^3, k = 1..infinity)

                              zeta(3)
```

Dieser Reihenwert hat keine elementare Darstellung. Stattdessen stellt MuPAD ihn mittels der (unter Mathematikern) berühmten speziellen Funktion `zeta` (die sogenannte Riemannsche Zeta-Funktion) dar. Das nützt uns hier relativ wenig, da wir mit dieser Funktion nicht näher vertraut sind. Zumindestens kann man hiermit aber bequem Gleitpunktnäherungen berechnen:

```
>> float(%)
                            1.202056903
```

Die Web-Seite `mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunction.html` liefert weitere Informationen zur Zeta-Funktion.

Beispiel 3.23: Die Reihe $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ konvergiert nicht für $n \to \infty$: zwar konvergieren die Summanden $x_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$ gegen 0, aber „nicht schnell genug“:

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{k}} = 18.5896... \, , \quad \sum_{k=1}^{1000} \frac{1}{\sqrt{k}} = 61.8010... \, , \quad \sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}} = 198.5446... \, .$$

Genauer gesagt: die Reihe „konvergiert uneigentlich gegen ∞“. Beweis: die nach Beispiel 3.10 divergierende harmonische Reihe ist eine divergente Minorante:

$$\frac{1}{k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

18.5.02↓ **Beispiel 3.24:** Betrachte die Reihe $\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$, wo z eine beliebige feste komplexe Zahl ist (beachte: $0! = 1$). Diese Reihe konvergiert nach dem Quotientenkriterium. Mit $z_k = \frac{z^k}{k!}$ ist der Quotient zweier aufeinander folgender Summanden

$$\frac{|z_{k+1}|}{|z_k|} = \frac{\frac{|z|^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{|z|^k}{k!}} = \frac{|z|^{k+1} \cdot k!}{|z|^k \cdot (k+1)!} = \frac{|z|^k \cdot |z| \cdot k!}{|z|^k \cdot (k+1) \cdot k!} = \frac{|z|}{k+1}.$$

Für hinreichend große k (nämlich $k \geq 2 \cdot |z|$) gilt

$$\frac{|z_{k+1}|}{|z_k|} \leq \frac{|z|}{2 \cdot |z| + 1} < \frac{|z|}{2 \cdot |z|} = \frac{1}{2} =: c < 1,$$

womit das Quotientenkriterium erfüllt ist.

Der Grenzwert heißt **„Exponentialfunktion“** e^z bzw. $\exp(z)$. In der Tat stimmt die Reihe mit der in Satz 2.20 benutzten Definition überein (was noch zu zeigen wäre):

$$\boxed{e^z = \exp(z) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots \, .}$$

Die Reihendarstellung der exp-Funktion bietet einige Vorteile. Für kleine Argumente z gilt z.B. die Näherung

$$\exp(z) = 1 + \underbrace{z}_{\text{klein}} + \underbrace{\frac{z^2}{2!}}_{\text{noch kleiner}} + \underbrace{\frac{z^3}{3!}}_{\text{noch viel kleiner}} + \cdots \quad \approx \quad 1 + z + \frac{z^2}{2} \, .$$

Wir ersparen uns hier den Beweis für

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

der einigen technischen Abschätzungsaufwand erfordert.

Beispiel 3.25: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ konvergiert genau dann, wenn $p > 1$ gilt.

Beweis: für festes $p > 0$ ist die Folge $x_k = 1/k^p$ monoton falled. Das Kondensationskriterium liefert die Konvergenz, wenn

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^m \cdot x_{2^m} = \sum_{m=1}^{\infty} 2^m \cdot \frac{1}{(2^m)^p} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2^m)^{p-1}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{p-1})^m}$$

konvergiert. Diese geometrische Reihe konvergiert, wenn $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$ gilt, d.h., für $p > 1$. Für $p \leq 1$ ist die harmonische Reihe $\sum_k \frac{1}{k}$ eine divergierende Minorante.

3.4 Bedingte Konvergenz, Umordnungen

Es gibt einen Spezialfall, wo die Tatsache, dass die Summanden eine Nullfolge bilden, für die Konvergenz der Reihe ausreicht: alternierende Reihen:

Satz 3.26: (Das Leibniz–Kriterium für alternierende Reihen)

Eine reelle Folge (x_n) heißt **“alternierend“**, *wenn für jeden Index x_n und x_{n+1} unterschiedliche Vorzeichen haben. Ist zusätzlich $|x_n|$ monoton fallend und (x_n) eine Nullfolge, so konvergiert die zugeordnete „alternierende Reihe“ $\sum_k x_k$.*

Beweis: Fixiere ein beliebiges n. Durch Induktion nach m ist leicht zu zeigen, dass

$$\Big| \sum_{k=n}^{m} x_k \Big| \leq |x_n|$$

für alle $m \geq n$ gilt. Da $|x_n|$ eine Nullfolge bildet, ist das Cauchy-Kriterium 3.6 erfüllt.

Q.E.D.

Beispiel 3.27: Die **„alternierende harmonische Reihe“**

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

erfüllt das Leibniz-Kriterium und konvergiert (der Grenzwert ist ln(2)).

Die alternierende harmonische Reihe konvergiert, aber sie konvergiert nicht absolut (die harmonische Reihe ist bekanntlich divergent). Für solche „bedingt“ (= nicht absolut) konvergente Reihen ist höchste Vorsicht geboten: die Reihenfolge der Summation ist wichtig!

Beobachtung 3.28:

Für die alternierende harmonische Reihe des letzten Beispiels gilt:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} S & = & 1 & - & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{3} & - & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{5} & - & \frac{1}{6} & + & \frac{1}{7} & - & \frac{1}{8} & + & \dots \\ \frac{S}{2} & = & & & \frac{1}{2} & & & - & \frac{1}{4} & & & + & \frac{1}{6} & & & - & \frac{1}{8} & + & \dots \\ \hline \frac{3\cdot S}{2} & = & 1 & & & + & \frac{1}{3} & - & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{5} & & & + & \frac{1}{7} & - & \frac{1}{4} & + & \dots \end{array}$$

Man kann sich leicht überlegen, dass in der letzten Reihe der Kehrwert jeder natürlichen Zahl genau einmal auftaucht. In der Tat erhält sie alle Summanden der alterniernenden Reihe S, nur dass die Summanden anders angeordnet sind:

> *„Nehme 2 positive Summanden von S, dann einen negativen, dann die beiden nächsten positiven, dann den nächsten negativen usw.“*

Diese Umordnung hat den Grenzwert verändert!

Erstaunlicherweise kann man durch eine geeignete Umsummation *jeden beliebigen* Grenzwert erreichen:

Satz 3.29: (Riemannscher Umordnungssatz für bedingt konvergente Reihen)

Sei $\sum_k x_k$ eine konvergierende reelle Reihe, die nicht absolut konvergiert: $\sum_k |x_k| = \infty$. Dann gibt es zu jedem $S \in \mathbb{R}$ eine bijektive Abbildung $P : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (eine **“Permutation“ von** $\mathbb{N}$*), so dass*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{P(k)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_{P(k)} = S$$

gilt.

Die **Beweisidee** ist sehr einfach, der Beweis ist konstruktiv. Sei

$$N^+ = \{n \in \mathbb{N}, x_n \geq 0\}, \quad N^- = \{n \in \mathbb{N}, x_n < 0\}.$$

Man überlegt sich, dass die Divergenz von $\sum_k |x_k|$ zusammen mit der Konvergenz von $\sum_k x_k$ bedeutet, dass $\sum_{k\in N^+} x_k$ gegen ∞ und $\sum_{k\in N^-} x_k$ gegen $-\infty$ konvergiert. Zu gegebenem S wähle solange Indizes in N^+, bis die Summe über die entsprechenden positiven x_k zum ersten Mal S überschreitet (wegen $\sum_{k\in N^+} x_k = \infty$ wird dies sicherlich irgendwann geschehen). Dann wähle solange Indizes in N^-, bis durch Hinzuaddieren der entsprechenden negativen x_k zum ersten Mal S unterschritten wird (wegen $\sum_{k\in N^-} x_k = -\infty$ wird dies sicherlich irgendwann geschehen). Dann wähle wieder Indizes auf N^+, bis S überschritten wird usw. Die Differenz zwischen S und der überschreitenden bzw. unterschreitenden Zwischensumme ist jeweils kleiner als das letzte Folgenelement, das addiert bzw. subtrahiert wurde. Die Folgenglieder sind aber eine Nullfolge, da $\sum_k x_k$ konvergiert. Damit konvergieren die konstruierten Zwischensummen gegen S. Details: siehe z.B. Chr. Blatter, Analysis 1, Springer.

Q.E.D.

$\boxed{\downarrow 24.5.02}$

Glücklicherweise ergibt sich dieses Umordnungsproblem bei absolut konvergierenden Reihen nicht. Jede Umordnung der Reihenglieder liefert die selbe Summe:

Satz 3.30: (Umordnungssatz für absolut konvergente Reihen)

Sei $\sum_k z_k$ eine (komplexe) absolut konvergierende Reihe. Dann konvergiert $\sum_k z_{P(k)}$ für jede Permutation P absolut gegen den selben Grenzwert.

Beweis: siehe z.B. Chr. Blatter, Analysis 1, Springer.

3.5 Summation per Partialbruchzerlegung

Es gibt einige Situationen, wo man (endliche) Reihen explizit berechnen kann. Der Reihenwert ergibt sich als Grenzwert des expliziten Ausdrucks:

Beispiel 3.31: Betrachte $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot (k+1)}$. Die entscheidende Beobachtung ist:

$$\frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

(man bringe $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ auf den Hauptnenner). Hiermit ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{n} \\ &\quad\; - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} - \cdots - \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1} \\ &= 1 - \tfrac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Man nennt so eine Summe auch „Teleskopsumme“: sie läßt sich zu einigen wenigen Termen „zusammenschieben“, da sich fast alle Summanden aufheben. Es folgt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \lim_{n \to \infty} \Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big) = 1.$$

Der im obigen Beispiel angewendete Trick läßt sich systematisch anwenden:

Rezept (Summation durch „Partialbruchzerlegung") 3.32:

Betrachte die Summe $\sum_k a_k$ *über einen „rationalen" Ausdruck in* k*:*

$$a_k = \frac{c_0 + c_1 \cdot k + \cdots + c_p \cdot k^p}{d_0 + d_1 \cdot k + \cdots + d_q \cdot k^q}$$

mit $p + 2 \leq q$ *(für* $p + 2 > q$ *divergiert die Reihe* $\sum_k a_k$*).*

- *Schritt 1: Bestimme die Nullstellen* $k_1, k_2, \ldots, k_q$ *des Nennerpolynoms* $P(k) = d_0 + d_1 \cdot k + \cdots + d_q \cdot k^q = d_q \cdot (k - k_1) \cdot \cdots \cdot (k - k_q)$*.*
- *Schritt 2: Sind alle Nullstellen einfach, so kann man den Ausdruck stets folgendermaßen additiv zerlegen: es gibt Werte* $e_1, e_2, \ldots, e_q$*, so dass*

$$a_k = \frac{c_0 + c_1 \cdot k + \cdots + c_p \cdot k^p}{d_0 + d_1 \cdot k + \cdots + d_q \cdot k^q} = \frac{e_1}{k - k_1} + \frac{e_2}{k - k_2} + \cdots + \frac{e_q}{k - k_q} \ .$$

  Finde diese Werte $e_1, \ldots, e_q$*! Man bringt dazu die rechte Seite dieses Ansatzes auf den Hauptnenner (das ergibt nach Konstruktion das Nennerpolynom* $P(k)$*). Das Zählerpolynom muss mit dem Zähler der linken Seite übereinstimmen. Vergleiche in den Zählern die Koeffizienten der* k*-Potenzen, die einzeln übereinstimmen müssen. Dies führt zu einem (stets lösbaren)* **linearen Gleichungssystem** *für* $e_1, \ldots, e_q$*.*
- *Schritt 3: Es gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{e_1}{k - k_1} + \frac{e_2}{k - k_2} + \cdots + \frac{e_q}{k - k_q} \Big)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{e_1}{k - k_1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{e_2}{k - k_2} + \cdots + \sum_{k=1}^{n} \frac{e_2}{k - k_q}.$$

  Unterscheiden sich die Nullstellen um ganze Zahlen, so läßt sich diese Summe von Summen als „Teleskopsumme" zu einem expliziten Ausdruck in n *vereinfachen.*

Beispiel 3.33: Betrachte $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{k}{k^3 - 2 \cdot k^2 - k + 2}$.

Schritt 1: Die Nullstellen des Nennerpolynoms sind $k_1 = 1$, $k_2 = -1$, $k_3 = 2$:

$$k^3 - 2 \cdot k^2 - k + 2 = (k - 1) \cdot (k + 1) \cdot (k - 2).$$

Schritt 2: Mache den Ansatz:

$$\frac{k}{k^3 - 2\cdot k^2 - k + 2} = \frac{e_1}{k-1} + \frac{e_2}{k+1} + \frac{e_3}{k-2}.$$

Bringe die rechte Seite auf den Hauptnenner und ordne den Zähler nach k-Potenzen:

$$\begin{aligned}
&\frac{e_1}{k-1} + \frac{e_2}{k+1} + \frac{e_3}{k-2}\\
&\quad = \frac{e_1\cdot(k+1)\cdot(k-2) + e_2\cdot(k-1)\cdot(k-2) + e_3\cdot(k-1)\cdot(k+1)}{(k-1)\cdot(k+1)\cdot(k-2)}\\
&\quad = \frac{e_1\cdot(k+1)\cdot(k-2) + e_2\cdot(k-1)\cdot(k-2) + e_3\cdot(k-1)\cdot(k+1)}{(k-1)\cdot(k+1)\cdot(k-2)}\\
&\quad = \frac{e_1\cdot k^2 - e_1\cdot k - 2\cdot e_1 + e_2\cdot k^2 - 3\cdot e_2\cdot k + 2\cdot e_2 + e_3\cdot k^2 - e_3}{(k-1)\cdot(k+1)\cdot(k-2)}\\
&\quad = \frac{(e_1+e_2+e_3)\cdot k^2 + (-e_1 - 3\cdot e_2)\cdot k + (-2\cdot e_1 + 2\cdot e_2 - e_3)}{(k-1)\cdot(k+1)\cdot(k-2)}.
\end{aligned}$$

Dies muß als Polynom in k mit dem Zähler der Summanden der Reihe übereinstimmen, also

$$k = 0\cdot k^2 + 1\cdot k + 0 = \underbrace{(e_1+e_2+e_3)}_{=0}\cdot k^2 + \underbrace{(-e_1 - 3\cdot e_2)}_{=1}\cdot k + \underbrace{(-2\cdot e_1 + 2\cdot e_2 - e_3)}_{=0}.$$

Durch Vergleich der k-Potenzen ergibt sich:

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad -e_1 - 3\cdot e_2 = 1, \quad -2\cdot e_1 + 2\cdot e_2 - e_3 = 0.$$

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems ist

$$e_1 = -\frac{1}{2}, \quad e_2 = -\frac{1}{6}, \quad e_3 = \frac{2}{3},$$

also

$$\frac{k}{k^3 - 2\cdot k^2 - k + 2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k-1} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{k+1} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{k-2}.$$

Schritt 3: Reduktion der Teleskopsumme. Beachte, dass eine der Gleichungen $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ war. Deshalb ist es kein Zufall, dass sich in der Tat eine Teleskopsumme ergibt:

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{k}{k^3 - 2\cdot k^2 - k + 2} = \sum_{k=3}^{n} \frac{(-1/2)}{k-1} + \sum_{k=3}^{n} \frac{(-1/6)}{k+1} + \sum_{k=3}^{n} \frac{(2/3)}{k-2}$$

$$\begin{aligned}
= \;& \tfrac{(-1/2)}{2} + \tfrac{(-1/2)}{3} + \tfrac{(-1/2)}{4} + \cdots + \tfrac{(-1/2)}{n-2} + \tfrac{(-1/2)}{n-1}\\
& \tfrac{(-1/6)}{4} + \cdots + \tfrac{(-1/6)}{n-2} + \tfrac{(-1/6)}{n-1} + \tfrac{(-1/6)}{n} + \tfrac{(-1/6)}{n+1}\\
& + \tfrac{(2/3)}{1} + \tfrac{(2/3)}{2} + \tfrac{(2/3)}{3} + \underbrace{\tfrac{(2/3)}{4}}_{0} + \underbrace{\cdots}_{0} + \underbrace{\tfrac{(2/3)}{n-2}}_{0}\\
= \;& \tfrac{(-1/2)}{2} + \tfrac{(-1/2)}{3} + \tfrac{(-1/2)}{n-1}\\
& + \tfrac{(-1/6)}{n-1} + \tfrac{(-1/6)}{n} + \tfrac{(-1/6)}{n+1}\\
& + \underbrace{\tfrac{(2/3)}{1} + \tfrac{(2/3)}{2} + \tfrac{(2/3)}{3}}\\
= \;& \tfrac{29}{36} + \tfrac{(-2/3)}{n-1} + \tfrac{(-1/6)}{n} + \tfrac{(-1/6)}{n+1}.
\end{aligned}$$

Der Grenzwert für $n \to \infty$ liefert

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{k}{k^3 - 2 \cdot k^2 - k + 2} = \frac{29}{36}.$$

Beispiel 3.34: In MuPAD ist die Funktion `partfrac` („partial fraction“) für die Partialbruchzerlegung zuständig:

```
>> partfrac(k/(k^3 - 2*k^2 - k + 2))

                    2           1           1
                --------- - --------- - ---------
                3 (k - 2)   6 (k + 1)   2 (k - 1)
```

Kapitel 4

Funktionen und Stetigkeit

$\boxed{\downarrow 25.5.05}$

4.1 Funktionen

Definition 4.1:

Eine Funktion $f : D \mapsto \mathbb{C}$ ist eine Zuordnung $f : z \mapsto f(z)$ einer Zahl $z \in D \subset \mathbb{C}$ zu einem **„Bildwert“** *$f(z) \in \mathbb{C}$. Der Punkt z heißt auch* **„Urbild“** *von $f(z)$. Die Menge $D \subset \mathbb{C}$ heißt* **„Definitionsbereich“**, *die Menge*

$$f(D) := \Big\{ f(z);\ z \in D \Big\}$$

heißt **„Bildbereich“** *oder auch* **„Wertebereich“** *der Funktion.*

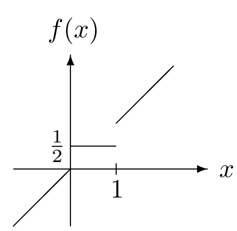
Eine <u>reelle</u> Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ heißt

- **monoton steigend**, *wenn $f(x) \leq f(y)$ gilt*
- **streng monoton steigend**, *wenn $f(x) < f(y)$gilt*
- **monoton fallend**, *wenn $f(x) \geq f(y)$ gilt*
- **streng monoton fallend**, *wenn $f(x) > f(y)$ gilt*

für alle $x, y \in D$ mit $x < y$.

Beispiel 4.2: a) Die (stückweise definierte) Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

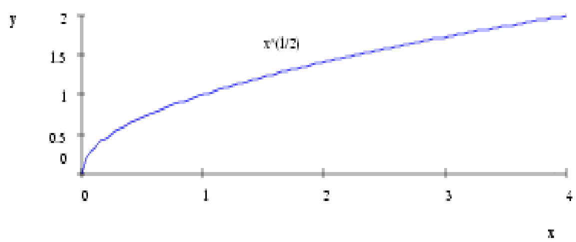
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \leq 0, \\ \frac{1}{2} & \text{für } 0 < x < 1, \\ x & \text{für } 1 \leq x \end{cases}$$



ist monoton steigend (aber nicht streng monoton steigend). Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$, der Bildbereich ist $f(\mathbb{R}) = (-\infty, 0] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup [1, \infty)$.
Die MuPAD-Graphik dazu (`piecewise` erzeugt stückweise definierte Funktionen):

```
>> f:= piecewise([x <= 0, x],
                 [0 < x and x < 1, 1/2],
                 [1 <= x, x])
>> plotfunc2d(f(x), x = -2..2)
```

b) Die Funktion $f : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$ ist streng monoton steigend. Die MuPAD-Graphik dazu (`sqrt` ist die Wurzelfunktion):



4.2 Stetigkeit

Definition 4.3: (Stetigkeit)

Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ heißt **stetig am Punkt** *$z^* \in D$, wenn für* **jede** *gegen z^* konvergierende Folge (z_n) mit $z_n \in D$ gilt:*

$$\lim_{n \to \infty} f(z_n) = f(z^*). \qquad (\#)$$

Für reelle Funktionen $f : D \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ wird zusätzlich definiert:

Die Funktion f heißt **rechtsseitig stetig am Punkt** *$x^* \in D$, wenn (#) gilt für alle gegen x^* konvergierenden Folgen (x_n) mit $x_n \geq x^*$.*

Die Funktion f heißt **linksseitig stetig am Punkt** *$x^* \in D$, wenn (#) gilt für alle gegen x^* konvergierenden Folgen (x_n) mit $x_n \leq x^*$.*

Die Funktion f heißt **stetig auf dem Bereich** *D, wenn sie an allen Punkten $x^* \in D$ stetig ist.*

Die formale Definition 4.3 der Stetigkeit sollte man sich so merken:

Merkregel 4.4:

Für beliebige konvergente Folgen z_n gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f\Big(\lim_{n\to\infty} z_n\Big),$$

wenn die Funktion f an der Stelle $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ stetig ist.

Ähnlich wie die ϵ–$N(\epsilon)$–Definition eines Grenzwertes für Folgen ist diese Definition von Stetigkeit technisch und nur in sehr einfachen Fällen praktisch handhabbar. Man verläßt sich in der Praxis wiederum auf Rechenregeln, mit denen Stetigkeit vererbt werden, siehe Satz 4.7. Zunächst einige einfache Beispiele mit der formalen Definition:

Beispiel 4.5: a) Betrachte die konstante Funktion $f : z \in \mathbb{C} \mapsto c$ (mit einer konstanten Zahl $c \in \mathbb{C}$). Sei (z_n) eine beliebige gegen z^* konvergierende Folge. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} c = c = f(z^*).$$

Damit ist f an jedem Punkt $z^* \in \mathbb{C}$ stetig.

b) Betrachte die Funktion $f(z) = z$. Sei (z_n) eine beliebige gegen z^* konvergierende Folge. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} z_n = z^* = f(z^*).$$

Damit ist f an jedem Punkt $z^* \in \mathbb{C}$ stetig.

c) Betrachte die Funktion $f(z) = z^2+1$. Sei (z_n) eine beliebige gegen z^* konvergierende Folge. Mit den Rechenregeln für Grenzwerte gilt

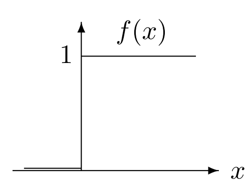
$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} (z_n^2 + 1) = (\lim_{n\to\infty} z_n)^2 + 1 = (z^*)^2 + 1 = f(z^*).$$

Damit ist f an jedem Punkt $z^* \in \mathbb{C}$ stetig.

Man sieht an diesen Beispielen bereits, dass die Rechenregeln für Grenzwerte sofort zu analogen Rechenregeln für die Vererbung von Stetigkeit führen. Vorher aber noch ein Beispiel zur Unstetigkeit und „einseitigen Stetigkeit“:

Beispiel 4.6: Betrachte die reelle Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{für } 0 \leq x. \end{cases}$$



Diese Funktion ist überall stetig, außer am Punkt $x = 0$. Dort ist sie aber immer noch rechtsseitig stetig: nähert man sich dem Punkt $x = 0$ von rechts, so sind die

Funktionswerte konstant 1. Der Grenzwert der Funktionswerte ist wiederum 1 und stimmt mit dem Funktionswert $f(0) = 1$ überein.
Die Funktion ist aber nicht linksseitig stetig: nähert man sich dem Punkt $x = 0$ von links, so sind die Funktionswerte konstant 0. Der Grenzwert der Funktionswerte ist wiederum 0 und stimmt **nicht** mit dem Funktionswert $f(0) = 1$ überein.
Eine stetige Funktion muß aber offensichtlich sowohl links- als auch rechtsseitig stetig sein, damit ist f am Punkt $x = 0$ unstetig.

Nun die Rechenregeln:

Satz 4.7: (Rechenregeln zur Stetigkeit)

Seien f und g Funktionen. Sei z^* ein Punkt aus dem Schnitt der Definitionsbereiche von f und g (d.h., sowohl $f(z^*)$ als auch $g(z^*)$ ist definiert). Seien f und g am Punkt z^* stetig. Sei c eine Konstante. Dann gilt:

- *Die Funktion $z \mapsto c \cdot f(z)$ ist am Punkt z^* stetig.*
- *Die Funktion $z \mapsto f(z) + g(z)$ ist am Punkt z^* stetig.*
- *Die Funktion $z \mapsto f(z) - g(z)$ ist am Punkt z^* stetig.*
- *Die Funktion $z \mapsto f(z) \cdot g(z)$ ist am Punkt z^* stetig.*
- *Die Funktion $z \mapsto \frac{f(z)}{g(z)}$ ist am Punkt z^* stetig,* **falls** $g(z^*) \neq 0$.
- *Die Funktion $z \mapsto \sqrt{f(z)}$ ist am Punkt z^* stetig.*

Weiterhin gilt: ist g am Punkt z^* stetig und f am Punkt $g(z^*)$, so ist $z \mapsto f(g(z))$ am Punkt z^* stetig.

Beweis: Betrachte eine beliebige Folge $(z_n) \to z^*$ und wende die Rechenregeln 2.13 an.

Q.E.D.

Beispiel 4.8: Die Funktion $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ ist überall auf $\mathbb{R}$ stetig: Da konstante Funktionen sowie $g(x) = x$ stetig sind, ist auch $h(x) = x + 1$ stetig. Analog ist $k(x) = x^2$ und damit auch $j(x) = x^2 + 1$ stetig. Außerdem gilt $j(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, womit der Quotient $f(x) = \frac{h(x)}{j(x)}$ ebenfalls überall stetig ist.
Betrachtet man die Funktion in der komplexen Ebene, so ist sie überall stetig bis auf die beiden Punkte $\pm i$, wo der Nenner verschwindet.

An diesem Beispiel merkt man, dass folgende „Pi mal Daumen-Regel“ gilt:

Merkregel 4.9:

Aus stetigen Funktionen „zusammengesetzte“ Funktionen sind wieder stetig. Lediglich an den Stellen, wo man durch 0 teilt, kann die Funktion unstetig sein.

Manchmal helfen die Rechenregeln nicht, und man muss technisch abschätzen:

Beispiel 4.10: Die in Definition 2.20/Beispiel 3.24 eingeführte Exponentialfunktion $z \mapsto \exp(z)$ ist stetig am Nullpunkt. Betrachte dazu eine beliebige Nullfolge h_n, für die o.B.d.A. $|h_n| \leq 1$ gelte. Wegen

$$|e^{h_n} - 1| = \Big|1 + h_n + \frac{h_n^2}{2!} + \frac{h_n^3}{3!} + \cdots \; - \; 1\Big| = |h_n| \cdot \Big|1 + \frac{h_n}{2!} + \frac{h_n^2}{3!} + \cdots\Big|$$

$$\leq |h_n| \cdot \Big(1 + \frac{|h_n|}{2!} + \frac{|h_n|^2}{3!} + \cdots\Big) \leq |h_n| \cdot \Big(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\Big) = |h_n| \cdot (e^1 - 1) \leq 2 \cdot |h_n|$$

ist $e^{h_n} - 1$ eine Nullfolge, also $\lim\limits_{n\to\infty} e^{h_n} = 1 = e^0$. Dies ist die Stetigkeit am Nullpunkt.

Satz 4.11: (Stetigkeit der Exponentialfunktion)

Die in Definition 2.20/Beispiel 3.24 eingeführte Exponentialfunktion $z \mapsto \exp(z)$ mit dem Definitionsbereich $\mathbb{C}$ ist an allen Punkten $z \in \mathbb{C}$ stetig.

Beweis: Sei (h_n) eine beliebige Nullfolge. Wegen der Funktionalgleichung 2.22 $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$ und der gerade gezeigten Stetigkeit im Nullpunkt folgt

$$\lim_{n\to\infty} e^{z+h_n} = \lim_{n\to\infty} e^z \cdot e^{h_n} = e^z \cdot \lim_{n\to\infty} e^{h_n} = e^z \cdot e^{\lim\limits_{n\to\infty} h_n} = e^z \cdot e^0 = e^z.$$

Q.E.D. $\boxed{\downarrow 31.5.05}$

Die Merkregel 4.9 besagt, dass es potentielle Unstetigkeiten gibt, wenn man durch 0 teilt. **Aber:** es kann auch passieren, dass an diesen Stellen Stetigkeit vorliegt (nämlich bei speziellen $\frac{0}{0}$ –Situation):

Beispiel 4.12: Die Funktion

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2-1}{z-1} & \text{für } z \neq 1, \\ 2 & \text{für } z = 1 \end{cases}$$

ist überall (auch an der Stelle $z = 1$) stetig. Dies ist leicht gezeigt: Wegen $z^2 - 1 = (z+1)\cdot(z-1)$ ist f nichts anderes als eine komplizierte Schreibweise für $f(z) = z + 1$.

Etwas komplizierter ist

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{e^z-1}{z} & \text{für } z \neq 0, \\ 1 & \text{für } z = 0. \end{cases}$$

Auch diese Funktion ist überall (auch an der Stelle $z = 0$) stetig, was durch folgende Betrachtung plausibel wird:

$$\frac{e^z - 1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \Big(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots \; - \; 1\Big) = \frac{1}{z} \cdot \Big(z + \frac{z^2}{2!} + \cdots\Big) = 1 + \frac{z}{2!} + \cdots .$$

Eine $\frac{0}{0}$–Situation läßt sich mit Hilfe der „l'Hospitalschen Regel" systematisch untersuchen, siehe Beispiel 6.36.

4.3 Grenzwerte

Betrachtet man $f(z) = (e^z - 1)/z$, so ist diese Funktion zunächst mal für $z = 0$ nicht definiert, sie hat dort eine **„Definitionslücke"**. In Beispiel 4.12 haben wir einen geeigneten Wert definiert, der die Funktion insgesamt stetig macht. Dieser Wert ergibt sich als „Grenzwert" der Funktion, wenn das Argument gegen den kritischen Wert strebt.

Definition 4.13: (Grenzwerte bei Funktionen)

Betrachte eine Funktion f auf dem Defintionsbereich $D = \mathbb{C} \setminus \{z^*\}$. Der Wert f^* heißt **„Grenzwert (Limes)"** *von f für $z \to z^*$, wenn für* **jede** *gegen z^* konvergierende Folge (z_n) mit $z_n \in D$ gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f^*.$$

Die Schreibweise ist dann: $\quad f^* = \lim\limits_{z\to z^*} f(z).$

Die Funktion

$$z \in D \cup \{z^*\} \mapsto \begin{cases} f(z) & \text{für } z \in D, \\ f^* & \text{für } z = z^* \end{cases}$$

nennt man die **„stetige Fortsetzung"** *von f auf den erweiterten Definitionsbereich $D \cup \{z^*\}$. Nach Konstruktion ist die Fortsetzung stetig am Punkt z^*.*

Definition 4.14: (Einseitige Grenzwerte bei Funktionen)

Für <u>reelle</u> Funktionen $f : D \setminus \{x^*\} \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ wird weiterhin definiert::

Der Wert f^* heißt **„rechtsseitiger Grenzwert"** *von f für $x \to x^*$, wenn $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f^*$ gilt für alle gegen x^* konvergierende Folgen (x_n) mit $x_n > x^*$. Schreibweise:*

$$f^* = \lim_{x\to x^*+0} f(x).$$

Der Wert f^* heißt **„linksseitiger Grenzwert"** *von f für $x \to x^*$, wenn $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f^*$ gilt für alle gegen x^* konvergierende Folgen (x_n) mit $x_n < x^*$. Schreibweise:*

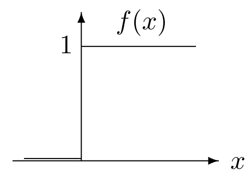
$$f^* = \lim_{x\to x^*-0} f(x).$$

Beispiel 4.15: Für eine am Punkt x^* definierte und dort stetige reelle Funktion gilt immer

$$\lim_{x \to x^* - 0} f(x) = \lim_{x \to x^* + 0} f(x) = \lim_{x \to x^*} f(x) = f(x^*).$$

Beispiel 4.16: Betrachte

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{für } 0 \le x. \end{cases}$$



Hier gilt für die Sprungstelle $x^* = 0$:

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 0+0} f(x) = 1, \quad \lim_{x \to 0} f(x) \text{ existiert nicht.}$$

Beispiel 4.17: Für die reelle Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ gilt

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0.$$

Formale Begründung: Sei (x_n) eine beliebige gegen ∞ konvergierende Folge:

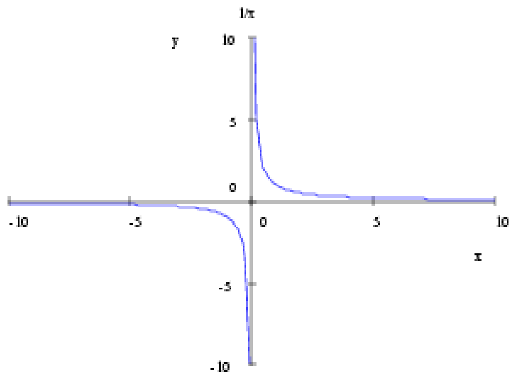
$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Am Punkt $x = 0$ ist f unstetig („singulär“): die Funktion hat eine sogenannte Polstelle. Wir lassen die Werte $\pm\infty$ wieder als Grenzwerte zu. Dann existieren einseitige Grenzwerte:

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to 0-0} f(x) = -\infty.$$

Das Argument `ViewingBox = [-10..10, -10..10]` im folgenden Befehl weist MuPAD an, alles außerhalb der angegebenen Bereiche zu ignorieren, wodurch sich eine gut skalierte Graphik ergibt:

```
>> plotfunc2d(1/x, x = -10..10,
              ViewingBox = [-10..10, -10..10])
```



Mit dem Grenzwertbegriff für Funktionen können wir die Stetigkeit an einem Punkt auch folgendermaßen charakterisieren:

Satz 4.18: (Stetigkeit)

Eine reelle Funktion f ist am Punkt x^* genau dann linksseitig stetig, wenn

$$\lim_{x \to x^* - 0} f(x) = f(x^*)$$

gilt. Sie ist genau dann rechtsseitig stetig, wenn

$$\lim_{x \to x^* + 0} f(x) = f(x^*)$$

gilt. Sie ist genau dann stetig, wenn der links- und rechtsseitige Grenzwert existiert und beide Grenzwerte mit dem Funktionswert übereinstimmen:

$$\lim_{x \to x^* - 0} f(x) = \lim_{x \to x^* - 0} f(x) = f(x^*).$$

Beweis: Das folgt unmittelbar aus den Definitionen. Für die letzte Aussage beachte, dass eine beliebige gegen x^* konvergierende Folge aufgespalten werden kann in die Teilfolge aller Elemente, die kleiner sind als x^* und die Teilfolge aller Elemente, die größer als x^* sind. Die Konvergenz der Teilfolgen gegen $f(x^*)$ ist die links- bzw. rechtsseitige Stetigkeit, die Konvergenz der Gesamtfolge gegen $f(x^*)$ ist die Stetigkeit.

Q.E.D.

4.4 Der Zwischenwertsatz, das Min/Max-Prinzip

Es folgen zwei sehr wichtige und fundamentale Sätze für reelle stetige Funktionen.

Satz 4.19: (Der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen)

Sei $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ auf dem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f auf dem Intervall alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an: zu jedem y zwischen den Werten $f(a)$ und $f(b)$ existiert mindestens ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$.

Beweis: (nicht nur für technisch Interessierte)
Wir benutzen einen expliziten Algorithmus (**„Intervallhalbierung“**), um die Lösung von $f(x) = y$ zu finden.
Sei $f(a) \neq f(b)$ (sonst gibt es nichts zu zeigen). O.B.d.A. gelte $f(a) < f(b)$ (sonst betrachte statt $-f$ statt f). Gegeben sei y mit $f(a) \leq y \leq f(b)$. Für $y = f(a)$ bzw. $y = f(b)$ ist die Behauptung sicher mit $x = a$ bzw.$x = b$ erfüllt. Es gelte also nun $f(a) < y < f(b)$.
Betrachte den Mittelpunkt $m = (a+b)/2$ des Intervalls. Gilt $f(m) = y$, sind wir fertig. Für $f(m) > y$ betrachten wir die linke Intervallhälfte $[a_1, b_1] := [a, m]$, für $f(m) < y$ betrachten wir die rechte Intervallhälfte $[a_1, b_1] := [m, b]$. Nach Konstruktion ist die Ausgangssituation

$$f(a_1) \leq y \leq f(b_1)$$

für das neue Intervall $[a1, b_1]$ wieder hergestellt. Das betrachtete Intervall $[a_1, b_1]$ wird nun erneut zu einem Intervall $[a_2, b_2]$ halbiert usw.
Es ergibt sich eine Folge von immer kleineren Intervallen $[a_n, b_n]$, deren linke Enden a_n eine monoton steigende und deren rechten Enden b_n eine monoton fallende Folge bildet. Nach Konstruktion gilt für alle Intervallenden

$$f(a_n) \leq y \leq f(b_n).$$

Nach Satz 2.28 konvergieren die monotonen beschränkten Folgen (a_n) und (b_n) gegen Grenzwerte a^* bzw b^*, die übereinstimmen müssen, da die Intervalllängen $b_n - a_n = (b - a)/2^n$ gegen Null konvergieren. Da f am Punkt $x := a^* = b^*$ stetig ist, folgt

$$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq y \leq \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(\lim_{n\to\infty} b_n) = f(x),$$

also $f(x) = y$.

Q.E.D.

Bemerkung 4.20: *Der im Beweis des Zwischenwertsatzes verwendete Algorithmus („**Intervallhalbierung**“, „**Bi-Sektion**“) ist ein auch in der Praxis anwendbarer Suchalgorithmus zum approximativen Lösen einer Gleichung $f(x) = y$. Er liefert eine Folge von Intervallschachtelungen $[a_n, b_n]$ für die Lösung. Die Genauigkeit ist die Länge des Intervalls, auf das die Lösung eingeschränkt werden konnte. Mit $2^{10} = 1024 \approx 10^3$ gilt die Faustregel:* ↓7.6.05

> *Durch je 10 Halbierungsschritte gewinnt man jeweils etwa 3 Dezimalstellen Genauigkeit hinzu.*

Bemerkung 4.21: *Der Beweis verwendet über Satz 2.28 das Supremumsaxiom für $\mathbb{R}$. In der Tat hat beispielsweise die stetige Funktion $f(x) = x^2 - 2$ auf dem Intervall $[0, 2] \cap \mathbb{Q}$ keine Nullstelle, obwohl $f(0) = -2 < 0 < f(2) = 2$ gilt, da die Nullstelle $x = \sqrt{2}$ nicht rational ist.*

Ein weiteres wichtiges Ergebnis für stetige reelle Funktionen ist, dass der Bildbereich eines beschränkten abgeschlossenen Intervalls wieder ein beschränktes abgeschlossenes Intervall ist. Mit anderen Worten: die Funktion nimmt auf einem abgeschlossenen Intervall immer (mindestens) ein globales Minimum und ein globales Maximum an:

Satz 4.22: (Das Min/Max–Prinzip für stetige Funktionen)

Sei $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ stetig auf dem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Dann existiert ein $x_{min} \in [a, b]$ und ein $x_{max} \in [a, b]$ mit

$$f(x_{min}) \le f(x) \le f(x_{max})$$

für alle $x \in [a, b]$.

Beweis: (für technisch Interessierte) Wir konstruieren x_{max}. Die Bildmenge $f([a, b]) := \{f(x); x \in [a, b]\}$ ist nach oben beschränkt. Sonst gäbe es nämlich eine uneigentlich nach ∞ konvergierende Folge (y_n) in $f([a, b])$ mit (nicht unbedingt eindeutig bestimmten) Urbildern $x_n \in [a, b]$. Nach Bolzano-Weierstrass 2.42/Bemerkung 2.43 gibt es eine gegen einen Grenzwert $x^* \in [a, b]$ konvergierende Teilfolge (x_{n_k}) in $[a, b]$, für die

$$\infty = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = f(x^*)$$

gelten müßte. Widerspruch!
Da $f([a, b])$ nach oben beschränkt ist, existiert gemäß des Supremumsaxioms 2.25 das Supremum $Y = \sup f([a, b])$ aller Bildpunkte. Es gilt zu zeigen, dass dieses Suprememum in der Menge $f([a, b])$ liegt, also ein Maximum ist:

Da $Y - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke von $f([a,b])$ sein kann (Y ist als Supremum die kleinste obere Schranke), gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [a,b]$ mit

$$Y - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq Y.$$

Wiederum existiert nach Bolzano-Weierstrass 2.42/Bemerkung 2.43 eine gegen einen Grenzwert $x^* \in [a,b]$ konvergente Teilfolge (x_{n_k}), für die

$$Y = \lim_{k\to\infty} \Big(Y - \frac{1}{n_k}\Big) \leq \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \leq Y$$

gilt. Mit der Stetigkeit von f folgt

$$Y = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = f(x*).$$

Also ist $f(x^*) = \max f([a,b])$, d.h., $x_{max} = x^*$ ist die gesuchte Maximumsstelle.

Die Minimumstelle x_{min} mit $f(x_{min}) = \min f([a,b])$ ergibt sich sofort als die Maximumsstelle von $-f$.

Q.E.D.

Bemerkung 4.23: *Die Abgeschlossenheit des Intervalls $[a,b]$ ist wesentlich für die Existenz von Minimum und Maximum. Beispielsweise hat für das offene Intervall $(0,1)$ die auf $(0,1)$ stetige Funktion $f(x) = 1/x$ offensichtlich weder ein Maximum noch ein Minimum!*

4.5 Umkehrfunktionen

Definition 4.24: (Invertierbarkeit von Funktionen)

Eine Funktion $f : D \mapsto W$ von einem Definitionsbereich D in den Wertebereich $W = f(D) = \{f(x); x \in D\}$ heißt **invertierbar**, *wenn zu jedem Wert $y \in W$* **genau ein** *Urbild $x \in D$ mit $f(x) = y$ existiert.*

Beispiel 4.25: Die Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Definitionsbereich $D = [0,\infty)$ mit dem Wertebereich $f(D) = [0,\infty)$ ist invertierbar: zu $y = f(x) = x^2$ gehört genau ein Urbild $x = \sqrt{y}$ im Definitionsbereich D.

Die Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Definitionsbereich $D = (-\infty, 0]$ mit dem Wertebereich $f(D) = [0,\infty)$ ist invertierbar: zu $y = f(x) = x^2$ gehört genau ein Urbild $x = -\sqrt{y}$ im Definitionsbereich D.

Die Funktion $f(x) = x^2$ ist nicht invertierbar, wenn man sie auf dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ betrachtet: Jetzt gibt es zu jedem $y = f(x) = x^2$ aus dem Wertebereich $f(D) = [0,\infty)$ **zwei Urbilder** $x = \sqrt{y}$ und $x = -\sqrt{y}$.

Definition 4.26: (Inverse einer Funktion)

Die Funktion $f : D \mapsto W$ von einem Definitionsbereich D in den Wertebereich $W = f(D) = \{f(x); x \in D\}$ sei invertierbar. Die **„Umkehrabbildung“ („Inverse“)** *von f ist die Funktion $f^{-1} : W \mapsto D$, die dem Punkt $y = f(x) \in W$ den (eindeutig bestimmten) Wert x zuordnet.*

Beispiel 4.27: Die Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Definitionsbereich $D = [0, \infty)$ mit dem Wertebereich $W = f(D) = [0, \infty)$ hat die durch $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ gegebene Inverse $f^{-1} : W \mapsto D$.

Die Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Definitionsbereich $D = (-\infty, 0]$ mit dem Wertebereich $f(D) = [0, \infty)$ hat die durch $f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ gegebene Inverse $f^{-1} : W \mapsto D$.

Die Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ hat keine Inverse.

Die Funktion $f(x) = 2-3\cdot x$ auf dem Wertebereich $D = \mathbb{R}$ hat die Inverse $f^{-1}(y) = \frac{2-y}{3}$. Um die Inverse zu bestimmen, muß man $y = f(x)$ nach x auflösen:

$$y = 2 - 3 \cdot x \quad \Longrightarrow \quad 3 \cdot x = 2 - y \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{2-y}{3}.$$

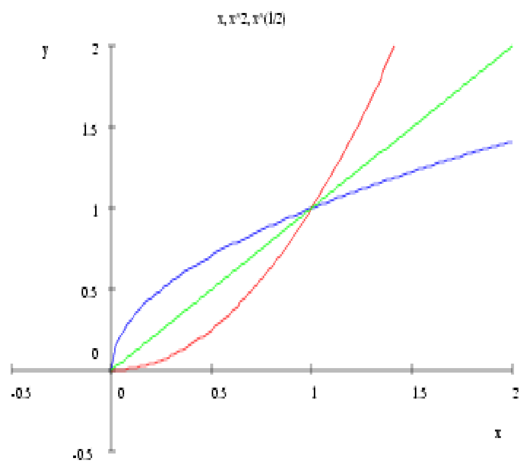
Graphische Darstellung der Inversen 4.28:

Hat man eine invertierbare Funktion f graphisch dargestellt, so hat man auch sofort den Graphen von f^{-1}. Der Graph von f ist eine Punktmenge (x, y) mit $y = f(x)$ in der x-y-Ebene. Der Graph von f^{-1} ist die Punktmenge (y, x) mit $y = f(x)$. Diese ergibt sich einfach durch Spiegelung an der „ersten Winkelhalbierenden“ (dies ist die durch $y = x$ gegebene Gerade).

Der Graph der Umkehrfunktion f^{-1} ist die Spiegelung des Graphen der Funktion f an der ersten Winkelhalbierenden.

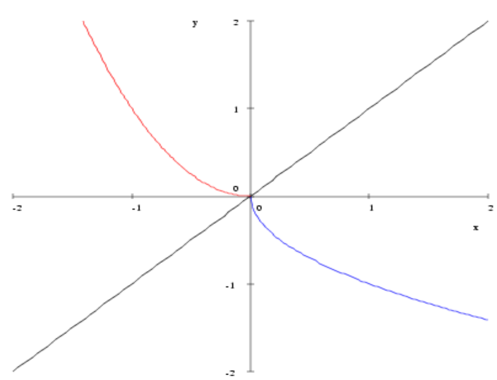
Beispiel 4.29: Zur Demonstration hierzu einige MuPAD Graphiken. Betrachte $f(x) = x^2$ auf $D = [0, \infty)$, $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Statt $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ wird $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ eingegeben (Goethe sagt dazu treffend: „Name ist Schall und Rauch“). Die Winkelhalbierende $y = x$ wird zusätzlich eingezeichnet:

```
>> plotfunc2d(x, x^2, sqrt(x), x = 0..2,
              ViewingBox = [-0.5..2, -0.5..2])
```



Das selbe noch einmal, diesmal wird $f(x) = x^2$ aber auf dem Definitionsbereich $D = (-\infty, 0]$ betrachtet. Da die Inverse $f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ auf einem anderen Definitionsbereich lebt ($y \geq 0$, $x \leq 0$), `plotfunc2d` aber alle Funktionen über einem gemeinsamen Bereich zeichnet, wird nun das folgende flexiblere plot-Konstrukt benutzt:

```
>> plot(// die Winkelhalbierende:
        plot::Function2d(x, x = -2..2, Color = RGB::Black),
        // f(x):
        plot::Function2d(x^2, x = -2..0, Color = RGB::Red),
        // die Inverse von f:
        plot::Function2d(-sqrt(y), y = 0..2, Color = RGB::Blue),
        ViewingBox = [-2..2, -2..2])
```



Bei streng monotonen Funktionen ist die Invertierbarkeit garantiert:

Satz 4.30: (Invertierbarkeit bei Monotonie)

Streng monotone reelle Funktionen $f : [a,b] \mapsto f([a,b])$ sind immer invertierbar. Ist f streng monoton steigend, dann auch f^{-1}. Ist f streng monoton fallend, dann auch f^{-1}. Ist f stetig, dann auch f^{-1}.

Beweis: (für technisch Interessierte) Die Eindeutigkeit der Urbilder folgt unmittelbar aus der Monotonie, denn aus $x_1 \neq x_2$ (also entweder $x_1 < x_2$ oder $x_1 > x_2$) folgt per strenger Monotonie $f(x_1) \neq f(x_2)$. Die Monotonie von f^{-1} ist offensichtlich.
Zur Stetigkeit von f^{-1}. Sei o.B.d.A. f streng monoton wachsend (sonst betrachte $-f$). Wähle einen beliebigen Punkt y aus dem Wertebereich $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$. Sei (y_n) eine beliebige gegen y konvergierende Folge, sei $x = f^{-1}(y)$. Wegen $(y_n) \to y$ gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein $N(\delta)$, so dass

$$y_n \in [y - \delta, y + \delta]$$

gilt für alle $n \geq N(\delta)$. Zu $\epsilon > 0$ setze

$$\delta(\epsilon) = \min(y - f(x - \epsilon), f(x + \epsilon) - y) > 0.$$

Für alle $n \geq N(\delta(\epsilon))$ folgt dann

$$y_n \in [y - \delta(\epsilon), y + \delta(\epsilon)] \subset [f(x - \epsilon), f(x + \epsilon)],$$

also

$$f^{-1}(y_n) \in f^{-1}([f(x-\epsilon), f(x+\epsilon)]) = [f^{-1}(f(x-\epsilon)), f^{-1}(f(x+\epsilon))]$$
$$= [x - \epsilon, x + \epsilon].$$

Also: zu $\epsilon > 0$ haben wir ein $N(\delta(\epsilon))$ konstruiert, so dass

$$|f^{-1}(y_n) - x| = |f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)| \leq \epsilon$$

gilt für alle $n \geq N(\delta(\epsilon))$. Also ist f^{-1} stetig: $\lim\limits_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(\lim\limits_{n\to\infty} y_n)$.

Q.E.D.

4.6 Wachstum von Funktionen, Landau-Symbole

Es gibt eine zur Symbolik für Folgen in Abschnitt 2.4 analoge Schreibweise, um das Wachstum von Funktionen an interessanten Stellen zu beschreiben (typischerweise sind dies Nullstellen oder Singularitäten).

Notation 4.31:

Seien f und g Funktionen, die in der Umgebung eines Punktes z_0 definiert seien (bei reellen Funktionen betrachtet man oft auch die Punkte $z_0 = \pm\infty$).

- *$f(z) = O(g(z))$ im Limes $z \to z_0$ bedeutet, dass die Funktion $|f(z)|/|g(z)|$ auf einer Umgebung von z_0 nach oben beschränkt ist.*
- *$f(z) = o(g(z))$ im Limes $z \to z_0$ bedeutet $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)/g(z) = 0$.*
- *$f(z) = \Omega(g(z))$ im Limes $z \to z_0$ bedeutet, dass die Funktion $|g(z)|/|f(z)|$ auf einer Umgebung von z_0 nach oben beschränkt ist.*
- *$f(z) = \omega(g(z))$ im Limes $z \to z_0$ bedeutet $\lim\limits_{z \to z_0} g(z)/f(z) = 0$.*
- *$f(z) = \Theta(g(z))$ im Limes $z \to z_0$ bedeutet, dass die Funktionen $|f(z)|/|g(z)|$ und $|g(z)|/|f(z)|$ auf einer Umgebung von z_0 nach oben beschränkt sind: es existieren positive Konstanten c und C, so dass $c \cdot |g(z)| \leq |f(z)| \leq C \cdot |g(z)|$ gilt auf einer Umgebung von z_0.*

Beispiel 4.32:

$$e^z = O(1) \text{ im Limes } z \to 0, \quad e^z = 1 + O(z) \text{ im Limes } z \to 0,$$

$$e^z = 1 + z + O(z^2) \text{ im Limes } z \to 0, \quad e^z = 1 + z + o(z) \text{ im Limes } z \to 0,$$

$$\frac{x}{x+1} = O(x) \text{ im Limes } x \to 0, \quad \frac{x}{x+1} = O(1) \text{ im Limes } x \to \infty,$$

$$\frac{x}{x+1} = \Theta(1) \text{ im Limes } x \to \infty, \quad \frac{1}{z} = o\Big(\frac{1}{z^2}\Big) \text{ im Limes } z \to 0.$$

Beispiel 4.33: Für alle positiven k gilt

$$e^x = \omega(x^k) \text{ im Limes } x \to \infty,$$

sowie

$$e^{-x} = o\Big(\frac{1}{x^k}\Big) \text{ im Limes } x \to \infty,$$

denn

$$\Big|\frac{e^{-x}}{1/x^k}\Big| = \Big|\frac{x^k}{e^x}\Big| = \Big|\frac{x^k}{1 + x + \cdots + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + \cdots}\Big| \leq \Big|\frac{(k+1)!}{x}\Big| \to 0 \quad \text{für } x \to \infty.$$

Anschaulich: die Funktion e^x wächst für gegen ∞ wachsendes x schneller als jede positive Potenz von x. Die Funktion e^{-x} fällt für gegen ∞ wachsendes x schneller ab als jede negative Potenz von x.

Kapitel 5

Einige spezielle Funktionen: exp, ln, sin, cos.

5.1 Exponentialfunktion und Logarithmus

$\boxed{\downarrow 8.6.05}$

Die überaus wichtige Exponentialfunktion soll nun etwas genauer diskutiert werden. Die ursprüngliche Definition 2.20 ist für die Diskussion zu unhandlich. Die in Beispiel 3.24 eingeführte Reihendarstellung ist wesentlich nützlicher. Wir haben sie bereits benutzt, um in Satz 4.11 die Stetigkeit über ganz $\mathbb{C}$ zu beweisen. Wir betrachten die Exponentialfunktion nun zunächst im Reellen genauer:

Satz 5.1: (Eigenschaften der reellen Exponentialfunktion)

> *Die Exponentialfunktion* $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots$ *ist für* $x \in \mathbb{R}$ *streng monoton steigend. Es gilt*
>
> $$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \to \infty} e^x = \infty.$$
>
> *Der Wertebereich ist* $(0, \infty)$.

Beweis: Für $0 \leq x < y$ ist $e^x < e^y$ offensichtlich, denn die Summanden der Partialsummen sind streng monoton wachsend:

$$e^y - e^x = \Big(1 + y + \frac{y^2}{2} + \cdots\Big) - \Big(1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots\Big) = \underbrace{y - x}_{>0} + \underbrace{\frac{y^2 - x^2}{2}}_{>0} + \cdots > 0.$$

Für $x < y < 0$ folgt die Monotonie aus der Funktionalgleichung 2.22: $e^x = 1/e^{-x} < 1/e^{-y} = e^y$. Nach Beispiel 4.33 wächst e^x (stärker als jede positive x-Potenz) gegen ∞ für $x \to \infty$. Wegen $e^x = 1/e^{-x}$ fällt e^x gegen 0 für $x \to -\infty$. Damit ist der Wertebereich $(0, \infty)$.

Q.E.D.

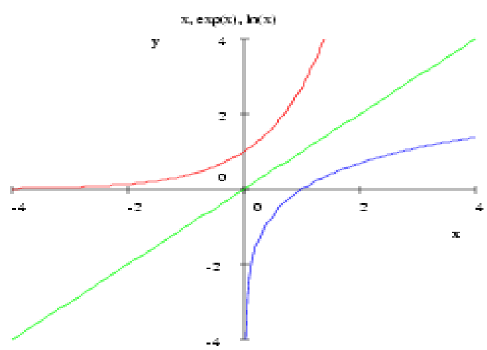
Definition 5.2: (Der **natürliche Logarithmus**)

Wegen der strengen Monotonie der reellen Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \mapsto (0, \infty)$ *gibt es eine Umkehrfunktion, die man den* **„natürlichen Logarithmus"** $\ln : (0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ *nennt:*

$$\ln(\exp(x)) = x \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \ , \quad \exp(\ln(y)) = y \text{ für alle } y \in (0, \infty).$$

Beispiel 5.3: Durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden ergibt sich sofort der Graph von ln aus dem Graphen von exp:

```
>> plotfunc2d(x, exp(x), ln(x), x = -4..4,
              ViewingBox = [-4..4, -4..4])
```



Da die Exponentialfunktion nach Satz 4.11 monoton und stetig ist, ist mit Satz 4.30 auch der Logarithmus monoton und stetig:

Merke 5.4:

- $\exp$ *und* $\ln$ *sind stetig und streng monoton wachsend.*
- *Es gilt* $e^x > 1$ *für alle* $x > 0$, *es gilt* $\ln(y) > 0$ *für alle* $y > 1$.
- *Es gilt* $e^0 = 1$ *und* $\ln(1) = 0$.
- *Es gilt* $e^x < 1$ *für alle* $x < 0$ *und* $\ln(y) < 0$ *für alle* y *mit* $0 < y < 1$.

Bemerkung 5.5: *Es ist klar, was mit* x^y *gemeint ist, wenn* $x \in \mathbb{R}$ *positiv und* y *eine ganze oder eine rationale Zahl ist (z.B.* $x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$*). Was aber ist* $x^{\sqrt{2}}$*? Betrachte eine rationale Potenz* $y = p/q$ *mit* $p, q \in \mathbb{N}$*, dann ist* $a = x^y = x^{p/q} > 0$ *als die (eindeutige) positive Lösung von* $a^q = x^p$ *definiert. Setzen wir* $x = e^{\ln(x)}$*, so folgt mit den Funktionalgleichungen 2.22:*

$$a^q = x^p = (e^{\ln(x)})^p = e^{p \cdot \ln(x)} = \left(e^{\frac{p}{q} \cdot \ln(x)}\right)^q.$$

Die einzige reelle positive Lösung a dieser Gleichung ist offensichtlich

$$x^{\frac{p}{q}} = a = e^{\frac{p}{q}\cdot \ln(x)}.$$

Also: für jedes rationale y gilt

$$\boxed{x^y = e^{y\cdot \ln(x)} \text{ für jedes } x > 0.}$$

Man benutzt die obige Formel, um Potenzen von $x > 0$ auch für nicht-rationale reelle Werte y zu **definieren**, *was nach obiger Überlegung mit der intuitiven „Wurzeldefinition“ für rationales y verträglich ist. Z. B.:*

```
>> float(2^PI) = float(exp(PI*ln(2)))

                8.824977827 = 8.824977827
```

Satz 5.6: (Rechenregeln für exp und ln)

Für beliebiges $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\boxed{e^{x+y} = e^x \cdot e^y, \quad (e^x)^y = e^{x\cdot y}, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}.}$$

Für beliebiges $x > 0, y > 0$ gilt:

$$\boxed{\ln(x\cdot y) = \ln(x) + \ln(y), \quad \ln(x^y) = y \cdot \ln(x), \quad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x).}$$

Beweis: Die Funktionalgleichungen $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ und $e^{-z} = 1/e^z$ waren schon in Satz 2.22 über $\mathbb{C}$ gezeigt worden. Sind $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, folgt durch Logarithmieren

$$z_1 + z_2 = \ln\left(e^{z_1} \cdot e^{z_2}\right).$$

Mit $x = e^{z_1}$, $y = e^{z_2}$, also $z_1 = \ln(x)$, $z_2 = \ln(y)$, folgt $\ln(x) + \ln(y) = \ln(x \cdot y)$. Für $y = 1/x$ ergibt sich $\ln(x) + \ln(1/x) = \ln(1) = 0$. Nach Definition beliebiger reeller Potenzen gemäß Bemerkung 5.5 ergibt sich

$$(e^x)^y = e^{y\cdot \ln(e^x)} = e^{y\cdot x}.$$

Durch Logarithmieren folgt für beliebiges reelles $z = e^x > 0$:

$$\ln(z)^y = y \cdot x = y \cdot \ln(z).$$

Q.E.D.

Beispiel 5.7: Die Regel $\ln(x^y) = y \cdot \ln(x)$ ist nützlich, um Gleichungen aufzulösen, wo die gesuchte Größe in einem Exponenten auftaucht. Z.B.:

$$2^x = 8 \quad \Rightarrow \quad \ln(2^x) = \ln(8) \quad \Rightarrow \quad x \cdot \ln(2) = \ln(8)$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\ln(8)}{\ln(2)} = \frac{\ln(2^3)}{\ln(2)} = \frac{3 \cdot \ln(2)}{\ln(2)} = 3.$$

Bemerkung 5.8: *Aus der Schulzeit mag man gewöhnt sein, statt mit dem natürlichen Logarithmus mit dem Zehner-Logarithmus* $\log_{10}$ *umzugehen. Bei Informatikern ist (aus naheliegenden Gründen) der Logarithmus* $\log_2$ *zur Basis 2 populär. Hier ist der Zusammenhang zwischen dem natürlichen Logarithmus und dem Logarithmus zu einer beliebigen (positiven) Basis* $b \neq 1$*:*

$$x = \log_b(y) \;\Leftrightarrow\; y = b^x \;\Leftrightarrow\; \ln(y) = \ln(b^x) = x \cdot \ln(b) \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\ln(y)}{\ln(b)},$$

also

$$\boxed{\log_b(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(b)} \quad \textit{für alle } y > 0,\ b > 0,\ b \neq 1.}$$

Beispiel 5.9: Neben dem natürlichen Logarithmus `ln` hat MuPAD Logarithmen `log(b, y)` zu beliebigen positiven Basen `b` $\neq 1$:

```
>> log(10, 25.0) = ln(25.0)/ln(10.0)

                    1.397940009 = 1.397940009

>> log(2, 25.0) = ln(25.0)/ln(2.0)

                     4.64385619 = 4.64385619
```

5.2 Die trigonometrischen Funktionen

In der Schule waren im Kontext „Geometrie“ die Winkelfunktionen sin und cos eingeführt worden. Hier unsere Versionen:

Satz und Definition 5.10:

Die folgenden Reihen konvergieren für jeden Wert $z \in \mathbb{C}$. Die Reihenwerte heißen $\sin(z)$ *bzw.* $\cos(z)$ *(die* **„trigonometrischen Funktionen"** *Sinus und Cosinus):*

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot z^{2\cdot k+1}}{(2\cdot k+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \pm \cdots ,$$

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot z^{2\cdot k}}{(2\cdot k)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} \pm \cdots .$$

Beweis: Es ist zu zeigen, dass die definierenden Reihen konvergieren. In der Tat konvergieren sie absolut, was analog zu Beispiel 3.24 aus dem Quotientenkriterium folgt. Für die sin-Reihe:

$$\left| \frac{(-1)^{k+1} \cdot z^{2\cdot k+3}/(2\cdot k+3)!}{(-1)^k \cdot z^{2\cdot k+1}/(2\cdot k+1)!} \right| = \frac{|z|^2 \cdot (2\cdot k+1)!}{(2\cdot k+3)!}$$

$$= \frac{|z|^2}{(2\cdot k+2)\cdot(2\cdot k+3)} \leq \frac{|z|^2}{4\cdot k^2} \leq \frac{1}{4}$$

für $k \geq |z|$. Die Konvergenz der cos-Reihe folgt analog.

Q.E.D.

Das folgende Zusammenhang ist eine der wichtigsten Formeln überhaupt für exp, sin und cos:

Satz 5.11: (Die Euler-Formel)

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt folgende Beziehung zwischen der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen:

$$\boxed{e^{i\cdot z} = \cos(z) + i \cdot \sin(z).}$$

Für $x \in \mathbb{R}$ folgt $\cos(x) = \Re(e^{i\cdot x})$, $\sin(x) = \Im(e^{i\cdot x})$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
&\cos(z) + i\cdot\sin(z) \\
&\quad = 1 \qquad - \frac{z^2}{2!} \qquad + \frac{z^4}{4!} \qquad \pm \cdots \\
&\qquad + i\cdot z \qquad - \frac{i\cdot z^3}{3!} \qquad + \frac{i\cdot z^5}{5!} \qquad \mp \cdots \\
&\quad = 1 + i\cdot z + \frac{(i\cdot z)^2}{2!} + \frac{(i\cdot z)^3}{3!} + \frac{(i\cdot z)^4}{4!} + \frac{(i\cdot z)^5}{5!} + \cdots = e^{i\cdot z}.
\end{aligned}$$

Q.E.D.

14.6.05↓ **Satz 5.12:**

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ *gilt* $\sin(z) = \dfrac{e^{i\cdot z} - e^{-i\cdot z}}{2\cdot i}$, $\cos(z) = \dfrac{e^{i\cdot z} + e^{-i\cdot z}}{2}$.

Beweis:

$$e^{i\cdot z} \pm e^{-i\cdot z} = \cos(z) + i\cdot\sin(z) \pm \cos(-z) \pm i\cdot\sin(-z)$$

$$= \cos(z) + i\cdot\sin(z) \pm \cos(z) \mp i\cdot\sin(z) = \begin{cases} 2\cdot\cos(z) & \text{für } +, \\ 2\cdot i\cdot\sin(z) & \text{für } -. \end{cases}$$

Q.E.D.

Satz 5.13: (Stetigkeit der trigonometrischen Funktion)

Die trigonometrischen Funktionen sin *und* cos *sind auf* $\mathbb{C}$ *stetig.*

Beweis: Da die Exponentialfunktion auf $\mathbb{C}$ stetig ist, folgt dies über die Rechenregeln 4.7 für Stetigkeit aus den Darstellungen in Satz 5.12.

Q.E.D.

Satz 5.14: (Die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen)

Für beliebiges $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *gilt:*

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1)\cdot\cos(z_2) + \cos(z_1)\cdot\sin(z_2),$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\cdot\cos(z_2) - \sin(z_1)\cdot\sin(z_2).$$

Beweis: Für $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ sind wegen $\cos(x) = \Re(e^{i\cdot x})$, $\sin(x) = \Im(e^{i\cdot x})$ die Additionstheoreme nichts Anderes als die Funktionalgleichung für exp:

$$\cos(z_1 + z_2) = \Re(e^{i\cdot(z_1+z_2)}) = \Re(e^{i\cdot z_1}\cdot e^{i\cdot z_2})$$

$$= \Re\Big((\cos(z_1) + i\cdot\sin(z_1))\cdot(\cos(z_2) + i\cdot\sin(z_2))\Big)$$

$$= \cos(z_1)\cdot\cos(z_2) - \sin(z_1)\cdot\sin(z_2).$$

Das Additiontheorem für den reellen Sinus folgt analog über $\sin(z_1 + z_2) = \Im(e^{i\cdot(z_1+z_2)})$.

Für beliebiges $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ nehme man die Darstellung aus Satz 5.12, um die Additionstheoreme auf $e^{i\cdot(z_1+z_2)} = e^{i\cdot z_1}\cdot e^{i\cdot z_2}$ zurückzuführen.

Q.E.D.

Satz 5.15: (Symmetrien der trigonometrischen Funktionen)

Für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ *gilt:* $\sin(-z) = -\sin(z)$, $\cos(-z) = \cos(z)$.

Beweis: Die Sinus-Reihe enthält nur ungerade Potenzen: $(-z)^{2\cdot k+1} = -z^{2\cdot k+1}$. Die Cosinus-Reihe enthält nur gerade Potenzen: $(-z)^{2\cdot k} = z^{2\cdot k}$.

Q.E.D.

Satz 5.16: (Der Satz des Pythagoras)

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt: $\boxed{\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1}$.

Beweis: Dies ist das Additionstheorem des Cosinus für $z_1 = z$, $z_2 = -z$ zusammen mit $\cos(0) = 1$:

$$1 = \cos(z - z) = \cos(z) \cdot \cos(-z) - \sin(z) \cdot \sin(-z) = \cos^2(z) + \sin^2(z).$$

Q.E.D.

Wir brauchen die Kreiszahl π. Da wir hier keine Geometrie treiben und π über das Verhältnis von Kreisumfang zu Kreisdurchmesser einführen können, müssen wir π anders definieren:

Satz und Definition 5.17:

Auf der positiven reellen Achse besitzt der Cosinus mindestens eine Nullstelle. Sei $x_1 = \inf\{x \in \mathbb{R};\ \cos(x) = 0;\ x > 0\}$ die kleinste positive Nullstelle des Cosinus. Definiere $\pi = 2 \cdot x_1 \approx 3.1415...$.

Beweis: Die Summanden der Cosinus-Reihe $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \mp \cdots$ haben wechselnde Vorzeichen. Für kleines $|x|$ sind die Summanden monoton fallend. Damit gilt $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + f(x)$, wobei speziell für $|x| \leq 2$ gilt:

$$0 \leq f(x) = \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \cdots \leq \frac{x^4}{4!}.$$

Es folgt

$$\cos(1) = 1 - \frac{1}{2!} + f(1), \quad 0 \leq f(1) \leq \frac{1}{24},$$
$$\cos(2) = 1 - \frac{4}{2!} + f(2), \quad 0 \leq f(2) \leq \frac{16}{24},$$

also

$$\cos(1) \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0, \quad \cos(2) \leq 1 - \frac{4}{2} + \frac{16}{24} = -\frac{1}{3} < 0.$$

Der Zwischenwertsatz 4.19 für stetige Funktionen garantiert (mindestens) eine Nullstelle im Intervall $(1, 2)$. Damit ist die Menge $\{x \in \mathbb{R};\ \cos(x) = 0;\ x > 0\}$ nicht leer und besitzt ein Infimum.

Q.E.D.

Über die Additionstheoreme und Pythagoras folgt nun eine Vielzahl von speziellen Resultaten, z.B.:

$$\sin(2\cdot x) = 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x) \quad\Rightarrow\quad \sin(\pi) = 2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\cos(2\cdot x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cdot\cos^2(x) - 1$$

$$\Rightarrow\quad \cos(\pi) = 2\cdot\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 = -1,$$

$$\sin(x+\pi) = \sin(x)\cdot\underbrace{\cos(\pi)}_{-1} + \cos(x)\cdot\underbrace{\sin(\pi)}_{0} = -\sin(x),$$

$$\cos(x+\pi) = \cos(x)\cdot\overbrace{\cos(\pi)} - \sin(x)\cdot\overbrace{\sin(\pi)} = -\cos(x)$$

etc. Hieraus folgt dann weiterhin die Periodizität

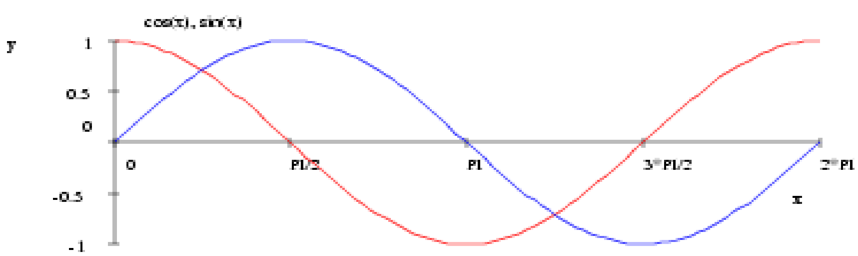
$$\sin(x+2\cdot\pi) = \sin(x), \quad \cos(x+2\cdot\pi) = \cos(x).$$

Die Einzelergebnisse aus Satz 5.11 bis Satz 5.16 werden zusammengefaßt:

Merke 5.18:

Graphisch:

```
>> plotfunc2d(cos(x), sin(x), x=0..2*PI,
              Ticks = [[0 = "0", PI/2 = "PI/2", PI = "PI",
                        3*PI/2 = "3*PI/2", 2*PI = "2*PI"],
```



Einige spezielle Werte:

$$\sin(0) = 0\ , \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad \sin(\pi) = 0, \quad \sin\left(\frac{3\cdot\pi}{2}\right) = -1,$$

$$\cos(0) = 1, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \cos(\pi) = -1, \quad \cos\left(\frac{3\cdot\pi}{2}\right) = 0\ .$$

Periodizität (man braucht die Funktionen nur auf $[0, 2\cdot\pi)$ *zu kennen):*

$$\sin(x+2\cdot\pi) = \sin(x), \quad \cos(x+2\cdot\pi) = \cos(x).$$

Additionstheoreme:

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cdot\cos(y) + \cos(x)\cdot\sin(y),$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cdot\cos(y) - \sin(x)\cdot\sin(y).$$

Symmetrieeigenschaften:

$$\sin(-x) = -\sin(x), \quad \cos(-x) = \cos(x).$$

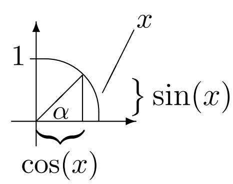
Pythagoras: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$

Euler-Formel: $e^{i\cdot x} = \cos(x) + i\cdot\sin(x).$

Bemerkung 5.19: *Vielleicht ist man aus der Schule noch gewohnt, die Argumente der trigonometrischen Funktion in Winkelgraden $\alpha = 0^0, \ldots, 360^o$ anzugeben. Mathematiker nehmen statt des Winkels α die zugehörige Bogenlänge x auf dem Einheitskreis (Einheit: „Radian"), der Zusammenhang ist*

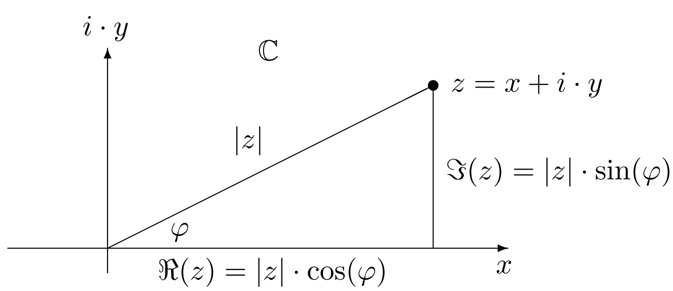
$$x = \frac{\pi}{180}\cdot\alpha,$$

d.h., $90^o \mathrel{\widehat{=}} \frac{\pi}{2}$, $180^o \mathrel{\widehat{=}} \pi$, $360^o \mathrel{\widehat{=}} 2\cdot\pi$:



5.3 Die komplexe Exponentialfunktion, Polardarstellungen

In der Geometrischen Interpretation 1.8 der komplexen Zahlen



war die **Polardarstellung**

$$z = |z|\cdot\Big(\cos(\varphi) + i\cdot\sin(\varphi)\Big), \quad \varphi\in[0, 2\cdot\pi)$$

komplexer Zahlen eingeführt worden. Mit der Euler-Formel 5.11 ergibt sich die kompakte Polardarstellung:

$$\boxed{z = |z| \cdot e^{i\cdot\varphi}, \quad \varphi \in [0, 2\cdot\pi).}$$

Man beachte, dass Polarwinkel nur bis auf ganzzahlige Vielfache von $2 \cdot \pi$ bestimmt ist (Periodizität von Sinus und Cosinus):

$$e^{i\cdot(\varphi+k\cdot 2\cdot\pi)} = e^{i\cdot\varphi} \cdot e^{i\cdot k\cdot 2\cdot\pi} = e^{i\cdot\varphi} \cdot (\underbrace{e^{i\cdot 2\cdot\pi}}_{1})^k = e^{i\cdot\varphi} \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

Wir vereinbaren, dass unsere Polarwinkel im Intervall $[0, 2\cdot\pi)$ liegen.

Geometrische Interpretation der komplexen Multiplikation 5.20:
Mit $z_1 = |z_1| \cdot e^{i\cdot\varphi_1}$, $z_2 = |z_2| \cdot e^{i\cdot\varphi_2}$, $\frac{1}{z_2} = \frac{1}{|z_2|} \cdot e^{-i\cdot\varphi_2}$ *gilt*

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i\cdot(\varphi_1+\varphi_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i\cdot(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Also: die Multiplikation mit einer Zahl mit dem Polarwinkel φ *dreht einen komplexen Vektor um den Winkel* φ *gegen den Uhrzeigersinn, die Division durch diese Zahl dreht den Vektor um den Winkel* φ *im Uhrzeigersinn. Multiplikation mit* i *bzw. Division durch* i *dreht speziell um* 90^o. *Das ist leicht zu merken:*

> *Ein Mathematiker ruft an und hört: „Die gewählte Nummer ist imaginär. Bitte drehen Sie ihren Apparat um* 90^o*!“*

Bemerkung 5.21: *Für Potenzen von* $z = |z| \cdot e^{i\cdot\varphi}$ *folgt*

$$z^n = |z|^n \cdot e^{i\cdot n\cdot\varphi}.$$

Damit sind wir nun in der Lage, komplexe Wurzeln zu berechnen. Die Aufgabe sei: finde alle Lösungen von $z^n = a$.

Schritt 1: *Stelle* a *in Polarkoordinaten dar:* $a = |a| \cdot e^{i\cdot\alpha}$ *mit* $\alpha \in [0, 2\cdot\pi)$.
Schritt 2: *Ansatz für die Wurzeln:* $z = r \cdot e^{i\cdot\varphi}$ *mit* $\varphi \in [0, 2\cdot\pi)$. *Vergleiche*

$$z^n = r^n \cdot e^{i\cdot n\cdot\varphi} = |a| \cdot e^{i\cdot\alpha}.$$

Vergleich der Beträge ergibt die reelle Gleichung $r^n = |a|$, *d.h.* $r = \sqrt[n]{|a|}$. *(Dies ist eine reelle Wurzel, deren Bedeutung klar ist.) Es verbleibt, den Polarwinkel* φ *der komplexen Wurzeln aus der verbleibenden Gleichung*

$$e^{i\cdot n\cdot\varphi} = e^{i\cdot\alpha}$$

zu bestimmen. Da Polarwinkel nur bis auf ganzzahlige Vielfache von $2\cdot\pi$ *bestimmt sind, folgt nicht* $n \cdot \varphi = \alpha$, *sondern (mit* φ_k *statt* φ*):*

$$n \cdot \varphi_k = \alpha + k \cdot 2 \cdot \pi, \ \ k \in \mathbb{Z},$$

also

$$\varphi_k = \frac{\alpha}{n} + \frac{k}{n} \cdot 2 \cdot \pi, \; k \in \mathbb{Z}.$$

Hierbei brauchen nur die n Werte $k = 0, 1, \ldots, n-1$ betrachtet zu werden, für die $\varphi_k \in [0, 2\cdot\pi)$ gilt (sofern $\alpha \in [0, 2\cdot\pi)$ gilt). Alle anderen Winkel φ_k liegen außerhalb von $[0, 2\cdot\pi)$ und stimmen bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von $2\cdot\pi$ mit einem dieser „Basiswinkel“ $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ überein.

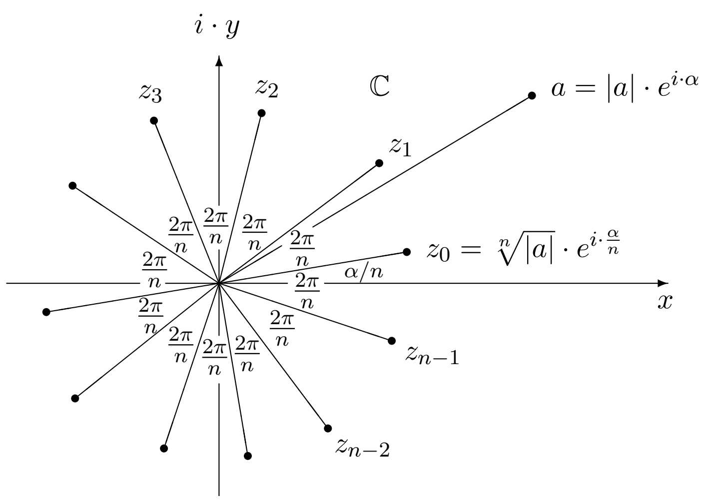
Schritt 3: *Ergebnis: die n verschiedenen Lösungen von $z^n = a = |a| \cdot e^{i\cdot\alpha}$ sind:*

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i\cdot\varphi_k} = \sqrt[n]{|a|} \cdot \Big(\cos(\varphi_k) + i \cdot \sin(\varphi_k)\Big)}$$

mit

$$\boxed{\varphi_k = \frac{\alpha + k \cdot 2 \cdot \pi}{n}, \; k = 0, 1, \ldots, n-1.}$$

Geometrisch: *die Wurzeln liegen alle gleichmäßig auf dem Kreis mit dem Radius $\sqrt[n]{|a|}$ verteilt:*



Beispiel 5.22: Die n-ten „Einheitswurzeln“ der Gleichung $z^n = 1 = 1 \cdot e^{i\cdot 0}$ sind

$$z_k = \cos\Big(\frac{k \cdot 2 \cdot \pi}{n}\Big) + i \cdot \sin\Big(\frac{k \cdot 2 \cdot \pi}{n}\Big), \; k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Z.B. für $n = 4$;

$$z_k = \cos\Big(\frac{k \cdot \pi}{2}\Big) + i \cdot \sin\Big(\frac{k \cdot \pi}{2}\Big) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0, \\ i & \text{für } k = 1, \\ -1 & \text{für } k = 2, \\ -i & \text{für } k = 3. \end{cases}$$

Für $n = 6$:

$$z_k = \cos\left(\frac{k\cdot\pi}{3}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{k\cdot\pi}{3}\right) = \begin{cases} 1 & \text{für } k=0, \\ \frac{1+i\cdot\sqrt{3}}{2} & \text{für } k=1, \\ \frac{-1+i\cdot\sqrt{3}}{2} & \text{für } k=2, \\ -1 & \text{für } k=3, \\ \frac{-1-i\cdot\sqrt{3}}{2} & \text{für } k=4, \\ \frac{1-i\cdot\sqrt{3}}{2} & \text{für } k=5. \end{cases}$$

Beispiel 5.23: In Beispiel 1.24 hatten wir für Potenzen von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

gefunden:

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot(1+i)^n + \frac{1}{2}\cdot(1-i)^n & \frac{i}{4}\cdot(1+i)^n - \frac{i}{4}\cdot(1-i)^n \\ -i\cdot(1+i)^n + i\cdot(1-i)^n & \frac{1}{2}\cdot(1+i)^n + \frac{1}{2}\cdot(1-i)^n \end{pmatrix}.$$

Es fehlt noch eine einfache Darstellung von $(1 \pm i)^n$, mit der (hoffentlich) ersichtlich wird, dass A^n eine reelle Matrix ist. Über die Polardarstellungen

$$1 \pm i = \sqrt{2}\cdot e^{\pm i\cdot\frac{\pi}{4}}$$

ergibt sich mit $|1 \pm i| = \sqrt{2}$ und den Polarwinkeln $\pm\frac{\pi}{4}$:

$$(1\pm i)^n = 2^{n/2}\cdot e^{\pm n\cdot i\cdot\frac{\pi}{4}} = 2^{n/2}\cdot\Big(\cos\Big(n\cdot\frac{\pi}{4}\Big) \pm i\cdot\sin\Big(n\cdot\frac{\pi}{4}\Big)\Big).$$

Damit folgt

$$\begin{array}{rcrcr} (A^n)_{11} & = & \frac{1}{2}\cdot(1+i)^n + \frac{1}{2}\cdot(1-i)^n & = & 2^{n/2}\cdot\cos(n\cdot\frac{\pi}{4}), \\ (A^n)_{12} & = & \frac{i}{4}\cdot(1+i)^n - \frac{i}{4}\cdot(1-i)^n & = & -2^{n/2-1}\cdot\sin(n\cdot\frac{\pi}{4}), \\ (A^n)_{21} & = & -i\cdot(1+i)^n + i\cdot(1-i)^n & = & 2^{n/2+1}\cdot\sin(n\cdot\frac{\pi}{4}), \\ (A^n)_{22} & = & \frac{1}{2}\cdot(1+i)^n + \frac{1}{2}\cdot(1-i)^n & = & 2^{n/2}\cdot\cos(n\cdot\frac{\pi}{4}). \end{array}$$

Insgesamt erhalten wir also in der Tat die in Beispiel 1.24 gefragte explizite (und nun recht einfache) reelle Darstellung beliebiger Potenzen von A:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^{\frac{n}{2}}\cdot\cos(n\cdot\frac{\pi}{4}) & -2^{\frac{n}{2}-1}\cdot\sin(n\cdot\frac{\pi}{4}) \\ 2^{\frac{n}{2}+1}\cdot\sin(n\cdot\frac{\pi}{4}) & 2^{\frac{n}{2}}\cdot\cos(n\cdot\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}.$$

Kapitel 6

Differentialrechnung

6.1 Definitionen und Sätze

$\boxed{\downarrow 15.6.05}$

Im Prinzip könnten die meisten der folgenden Überlegungen und Definitionen ohne große Änderungen für komplexe Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durchgeführt werden. Wir beschränken uns hier jedoch auf reelle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Zunächst die Definition einer Ableitung als Grenzwert von „Sekantensteigungen“:

Definition 6.1: (Die Ableitung einer Funktion)

Eine Funktion $f : D \mapsto \mathbb{R}$ heißt **„differenzierbar am Punkt x“**, *wenn der Grenzwert*

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert. Der Grenzwert $f'(x)$ heißt **„Ableitung von f am Punkt x“**.
Alternative Schreibweisen (mit $y = f(x)$):

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x).$$

Ist f an jedem Punkt x des Definitionsbereichs D differenzierbar, so heißt die Abbildung $f' : x \mapsto f'(x)$ **„Ableitungsfunktion“** *(kurz:* **„Ableitung von f“***).*

Bemerkung 6.2: *Ist eine Funktion an einem Punkt differenzierbar, so ist sie dort auch stetig:*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ existiert } \Rightarrow f(x+h) - f(x) = O(h)$$
$$\Rightarrow f(x+h) = f(x) + O(h) \Rightarrow \lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x).$$

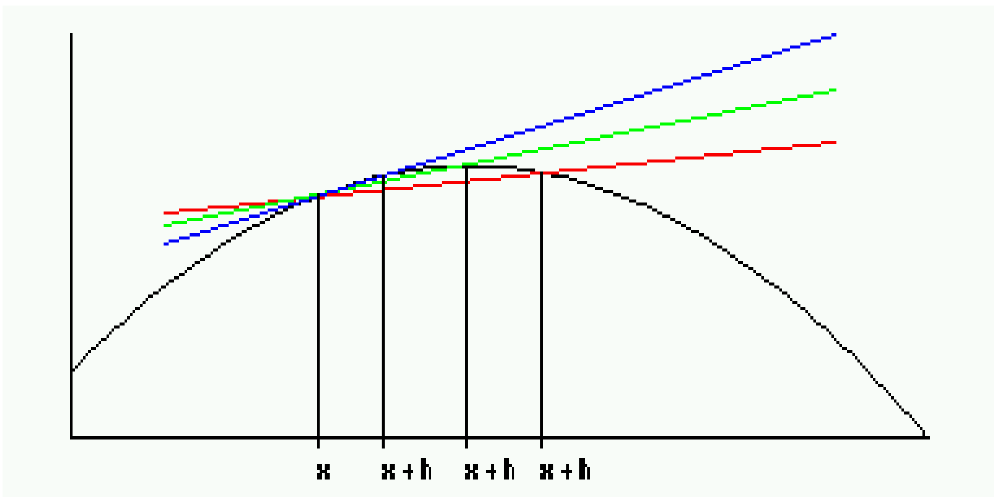
Damit kann eine Funktion nur an Stetigkeitspunkten differenzierbar sein.

Geometrische Interpretation der Ableitung 6.3:

Für kleines $\Delta x = h \neq 0$ ist der **„Differenzenquotient"**

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx f'(x)$$

die Sekantensteigung vom Punkt $(x, f(x))$ zum Punkt $(x+h, f(x+h))$ auf dem Graphen von x:



Die Ableitung $f'(x)$ selbst, d.h., der Grenzwert der Sekantensteigung für $\Delta x = h \to 0$, **ist die Steigung der Tangente an den Graphen von f am Punkt x.**

Zur Erinnerung an die Schule: die Tangente T durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ mit der Steigung $f'(x_0)$ ist der Graph der linearen Funktion

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Interpretation der Ableitung 6.4:

Die Ableitung gibt an, wie stark sich $f(x)$ ändert, wenn sich x um einen **kleinen** *Wert Δx ändert:*

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \approx f'(x),$$

d.h.

$$\boxed{f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x\ .}$$

Die Definition der Ableitung über den Grenzwert von Sekantensteigungen ist praktisch unnütz, da nur in den allereinfachsten Fällen handhabbar, z.B., bei:

Beispiel 6.5: Betrachte $f(x) = x^2$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2\cdot x\cdot h + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cdot x\cdot h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2\cdot x + h) = 2\cdot x.$$

Für das praktische Rechnen verläßt man sich wiederum auf Rechenregeln: ↓21.6.05

Satz 6.6: (Rechenregeln für's Ableiten)

Ableitungen einiger spezieller Funktionen (sei hierbei c eine konstante Zahl):

$$\frac{d}{dx}\; c = 0, \quad \frac{d}{dx}\; x^n = n\cdot x^{n-1}, \quad \frac{d}{dx}\; e^x = e^x, \quad \frac{d}{dx}\; \ln(x) = \frac{1}{x},$$

$$\frac{d}{dx}\; \sin(x) = \cos(x), \quad \frac{d}{dx}\; \cos(x) = -\sin(x).$$

Die Ableitung einer aus einfachen Funktionen zusammengesetzten Funktion ist über folgende Regeln zu berechnen. Seien f und g differenzierbare Funktionen. Die Ableitung der zusammengesetzten Funktion ($f + g$, $f\cdot g$ etc.) existiert jeweils, wenn f und g ableitbar sind:

- $\frac{d}{dx}\; c\cdot f(x) = c\cdot f'(x)$,
- $\frac{d}{dx}\; \Big(f(x) + g(x)\Big) = f'(x) + g'(x)$ (**„Summenregel“**),
- $\frac{d}{dx}\; f(x)\cdot g(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$ (**„Produktregel“**)
- $\frac{d}{dx}\; \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$ (**„Quotientenregel“**).

Bei der Quotientenregel wird $g(x) \neq 0$ vorausgesetzt (sonst teilt man durch 0).

Beweis: Die Ableitung von x^n, e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$ wird in Übungsaufgaben behandelt. Die Ableitung von $\ln(x)$ wird später in Beispiel 6.18 hergeleitet. Die Linearität $(c\cdot f)' = c\cdot f'$ und $(f+g)' = f' + g'$ folgt unmittelbar aus den Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen. Die Produktregel ergibt sich durch den Grenzwert von

$$\frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h}$$

$$= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

für $h \to 0$. Die Ableitung von $1/g(x)$ ergibt sich aus

$$\frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = -\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \cdot \frac{1}{g(x+h) \cdot g(x)}$$

zu

$$\Big(\frac{1}{g(x)}\Big)' = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}.$$

Zusammen mit der Produktregel liefert dies die Quotientenregel

$$\Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big)' = \Big(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\Big)' = \frac{f'(x)}{g(x)} - f(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)^2}.$$

Q.E.D.

Beispiel 6.7:

$$\frac{d}{dx}\ \sqrt[3]{x} = \frac{d}{dx}\ x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Beispiel 6.8: Summen- und Produktregel:

$$\frac{d}{dx}\ \Big(x + x^2 \cdot e^x\Big) = \Big(\frac{d}{dx}\ x\Big) + \frac{d}{dx}\Big(x^2 \cdot e^x\Big)$$

$$= \Big(\frac{d}{dx}\ x\Big) + \Big(\frac{d}{dx}\ x^2\Big) \cdot e^x + x^2 \cdot \Big(\frac{d}{dx}\ e^x\Big) = 1 + 2 \cdot x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x.$$

Beispiel 6.9: Quotientenregel:

$$\frac{d}{dx}\ \frac{e^x}{x} = \frac{\Big(\frac{d}{dx}\ e^x\Big) \cdot x - e^x \cdot \Big(\frac{d}{dx}\ x\Big)}{x^2} = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2}.$$

Beispiel 6.10:

$$\frac{d}{dx}\ \frac{\cos(x)\cdot e^x}{x} = \frac{\left(\frac{d}{dx}\ (\cos(x)\cdot e^x)\right)\cdot x - \cos(x)\cdot e^x\cdot\left(\frac{d}{dx}\ x\right)}{x^2}$$

$$= \frac{\left(\left(\frac{d}{dx}\ \cos(x)\right)\cdot e^x + \cos(x)\cdot\left(\frac{d}{dx}\ e^x\right)\right)\cdot x - \cos(x)\cdot e^x\cdot\left(\frac{d}{dx}\ x\right)}{x^2}$$

$$= \frac{\left(-\sin(x)\cdot e^x + \cos(x)\cdot e^x\right)\cdot x - \cos(x)\cdot e^x\cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{-\sin(x)\cdot e^x\cdot x + \cos(x)\cdot e^x\cdot x - \cos(x)\cdot e^x}{x^2}$$

$$= -\frac{\sin(x)\cdot e^x}{x} + \frac{\cos(x)\cdot e^x}{x} - \frac{\cos(x)\cdot e^x}{x^2}.$$

Beispiel 6.11: Bequemer geht's mit MuPAD. Die Funktion `diff` ist für's Differenzieren von Ausdrücken zuständig:

```
>> diff(cos(x)*exp(x)/x, x)

         cos(x) exp(x)   cos(x) exp(x)   sin(x) exp(x)
         ------------- - ------------- - -------------
               x               2               x
                              x
```

(Vergleiche mit Beispiel 6.10.) Alternativ können Funktionen (aber keine Ausdrücke) mittels $'$ differenziert werden:

```
>> f:= x -> cos(x)*exp(x)/x:
>> f'(x)

         cos(x) exp(x)   cos(x) exp(x)   sin(x) exp(x)
         ------------- - ------------- - -------------
               x               2               x
                              x
```

So setzt man konkrete Werte in die Ableitung ein:

```
>> f'(1), f'(2)

                        cos(2) exp(2)   sin(2) exp(2)
      -sin(1) exp(1), ------------- - -------------
                              4               2
```

```
>> f'(PI) = float(f'(PI))

         exp(PI)   exp(PI)
         ------- - ------- = -5.02126887
            2        PI
          PI
```

Wie steht's mit der Ableitung von „Hintereinanderschaltungen“ (**„Komposition“**) von Funktionen wie z.B. $\sin(\sqrt{x})$?

Satz 6.12: (Die Kettenregel)

Sei $g : D_g \mapsto D_f \subset \mathbb{R}$ differenzierbar am Punkt $x \in D_g$. Sei $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar am Punkt $g(x) \in D_f$. Dann ist die Funktion $h(x) = f(g(x))$ differenzierbar am Punkt x, und es gilt:

$$\frac{d}{dx}\, h(x) = \frac{d}{dx}\, f(g(x)) = \underbrace{f'(g(x))}_{\substack{\text{„äußere}\\ \text{Ableitung“}}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{„innere}\\ \text{Ableitung“}}} .$$

Als Merkregel für $y = g(x)$, $z = f(y) = f(g(x))$:

$$\frac{d}{dx}\, f(g(x)) = \boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}} = f'(y) \cdot g'(x).$$

Beweis: Es gilt

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

$$= \frac{f\Big(g(x) + h \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\Big) - f(g(x))}{h \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Für $h \to 0$ konvergiert $\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ gegen $g'(x)$ und $k := h \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ gegen 0:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f\Big(g(x) + h \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\Big) - f(g(x))}{h \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{f(g(x) + k) - f(g(x))}{k} = f'(g(x)).$$

Q.E.D.

Beispiel 6.13: Für $g(x) = \sqrt{x}$ gilt

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\, x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Zusammen mit $f(y) = \sin(y)$, $f'(y) = \cos(y)$ folgt:

$$\frac{d}{dx}\, \sin(\underbrace{\sqrt{x}}_{y}) = \Big(\frac{d}{dy}\, \sin(y)\Big) \cdot \Big(\frac{d}{dx}\, \sqrt{x}\Big) = \cos(y) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\cos(\sqrt{x}\,)}{2 \cdot \sqrt{x}}.$$

Definition 6.14: (Höhere Ableitungun)

Die Funktion f sei differenzierbar, sei f' die Ableitungsfunktion. Ist diese wiederum differenzierbar, so heißt $f'' = (f')'$ die **„zweite Ableitung von f“**. *Ist diese wiederum differenzierbar, so heißt $f''' = (f'')'$ die* **„dritte Ableitung von f“**. *Usw. Schreibweisen für die n-te Ableitung einer Funktion f:*

$$\frac{d^n}{dx^n}\, f(x) = f^{(n)}(x) = f^{\overbrace{\prime\prime\cdots\prime\prime}^{n}}(x).$$

Die „nullte“ Ableitung $f^{(0)}$ ist die Funktion f selbst. Ist die n-te Ableitung $f^{(n)}$ eine stetige Funktion in x, so heißt f **„n-fach stetig differenzierbar“**.

Beispiel 6.15: Offensichtlich gilt $\exp = \exp' = \exp'' = \exp'''$ etc. Die 4-te Ableitung der trigonometrischen Funktionen ist jeweils wieder die Ausgangsfunktion:

$$\frac{d}{dx}\, \sin(x) = \cos(x), \quad \frac{d^2}{dx^2}\, \sin(x) = -\sin(x),$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\, \sin(x) = -\cos(x), \quad \frac{d^4}{dx^4}\, \sin(x) = \sin(x),$$

$$\frac{d}{dx}\, \cos(x) = -\sin(x)\ , \quad \frac{d^2}{dx^2}\, \cos(x) = -\cos(x),$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\, \cos(x) = \sin(x), \quad \frac{d^4}{dx^4}\, \cos(x) = \cos(x).$$

Beispiel 6.16: Höhere Ableitungen in MuPAD: ↓22.6.05

```
>> diff(exp(x^2), x, x) // zweite Ableitung

                         2        2      2
                  2 exp(x ) + 4 x  exp(x )

>> n := 6:
>> diff(exp(x^2), x $ n) // n-te Ableitung

          2         2      2          4      2         6      2
 120 exp(x ) + 720 x  exp(x ) + 480 x  exp(x ) + 64 x  exp(x )
```

Mit der Funktion `subs` (engl.: substitute = ersetze; gemeint ist: ersetze x durch einen Wert) kann man konkrete Werte in Ausdrücke einsetzen. Berechne den Wert der 50-ten Ableitung von $\sin(x^2)\, e^x$ an der Stelle $x = 0$:

```
>> diff(sin(x^2)*exp(x), x $ 50):
>> subs(%, x = 0)

- 3281242764249252402878088425871788580475O cos(0) exp(0) -

   96811567017744384334797380010983921675 99 sin(0) exp(0)
```

Hier kommt eine Besonderheit von `subs` zutage: der ersetzte Ausdruck wird nicht sofort „ausgewertet“. D.h. in diesem Fall, dass die Vereinfachungen $\cos(0) = 1, \exp(0) = 1, \sin(0) = 0$ nicht automatisch geschehen. Die Funktion `eval` (engl.: evaluate = werte aus) erzwingt die Evaluation:

```
>> eval(%)

          -32812427642492524028780884258717885804750
```

Kennt man die Ableitung einer invertierbaren Funktion f, so kennt man auch die Ableitung der Umkehrabbildung f^{-1}. Es gilt

$$f^{-1}(f(y)) = y.$$

Leitet man beide Seiten der Gleichung nach y ab, so liefert die Kettenregel

$$f^{-1\prime}(f(y)) \cdot f'(y) = \frac{d}{dy}\, y = 1 \quad \Longrightarrow \quad f^{-1\prime}(f(y)) = \frac{1}{f'(y)}.$$

Satz 6.17: (Ableitung der Inversen)

Sei f differenzierbar und invertierbar, sei f^{-1} die Umkehrfunktion. Ist $f'(y) \neq 0$, so ist f^{-1} an der Stelle $x = f(y)$ differenzierbar, und es gilt

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Merkregel: mit $y = f^{-1}(x)$, $x = f(y)$: $\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{f'(y)}.}$

Beispiel 6.18: Für $f^{-1} = \ln$ als Umkehrfunktion der Funktion $f = \exp$ mit $f' = \exp$ folgt mit $x = \exp(y)$, $y = \ln(x)$:

$$\frac{d}{dx}\ \ln(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\exp(y)} = \frac{1}{\exp(\ln(x)} = \frac{1}{x}.$$

Hierbei ist $x > 0$ vorausgesetzt (damit $\ln(x)$ definiert ist). Für $x < 0$ gilt

$$\frac{d}{dx}\ \ln(-x) = \ln'(-x) \cdot \frac{d}{dx}\ (-x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

Für $x > 0$ ist $|x| = x$, für $x < 0$ ist $|x| = -x$. Zusammengefaßt gilt damit:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\ \ln(|x|) = \frac{1}{x} \quad \text{für alle } x \neq 0.}$$

An der Stelle $x = 0$ ist $\ln(|x|)$ unstetig und damit erst recht nicht differenzierbar.

6.2 Der Mittelwertsatz

Satz 6.19: (Der Satz von Rolle)

Sei $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar auf dem Intervall $[a, b]$. Es gelte $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis: O.b.d.A. sei f nicht konstant (sonst ist die Behauptung sicherlich richtig). Da f differenzierbar ist, ist f auch stetig. Nach Satz 4.22 gibt es ein Minimum oder ein Maximum ξ von f im Inneren des Intervalls (liegen sowohl das Minimum als auch das Maximum am Rand, müßte die Funktion konstant sein). Sei o.B.d.A. ξ ein Maximum (sonst betrachte $-f$). Mit $f(\xi + h) \leq f(\xi)$ für jedes h folgt für die einseitigen Grenzwerte

$$\lim_{h \to 0+0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \leq 0, \qquad \lim_{h \to 0-0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \geq 0.$$

Es folgt $f'(\xi) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} = 0.$

Q.E.D.

Satz 6.20: (Der Mittelwertsatz)

Sei $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar auf dem Intervall $[a, b]$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = f'(\xi).$$

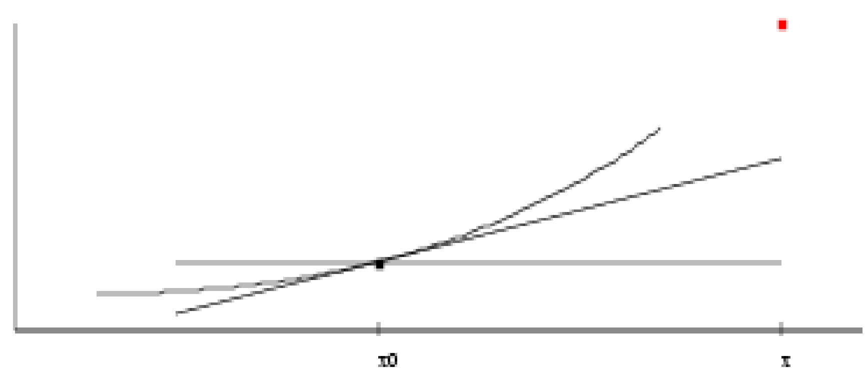
Beweis: Betrachte $g(x) = f(x) - (f(a) - f(b)) \cdot \frac{x-b}{a-b}$. Dies Funktion erfüllt $g(a) = g(b) = f(b)$. Nach Satz 6.19 existiert $\xi \in (a, b)$ mit

$$g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = 0.$$

Q.E.D.

6.3 Taylor–Reihen

Betrachte folgende Funktion, die nur in einer kleinen Umgebung eines Punktes x_0 bekannt ist (genauer: es sind $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$ etc. bekannt). Man interessiert sich für den Funktionswert an einem Punkt x in der Nähe von x_0:



In allereinfachster Näherung würde man (für x dicht bei x_0)

$$f(x) \approx f(x_0)$$

setzen. Die nächstbessere Approximation besteht darin, der Tangente am Punkt x_0 zu folgen:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Im obigen Fall ist deutlich, dass der Funktionswert oberhalb der Tangente zu suchen ist (die Funktion ist „gebogen“: es gilt $f''(x_0) > 0$). Es bietet sich an, einen quadratischen Term hinzuzufügen, um eine bessere Approximation zu erreichen:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + c \cdot (x - x_0)^2.$$

Wie sollte die Konstante c gewählt werden, wie geht es weiter?

Vorüberlegung zu Taylor-Polynomen 6.21:

Zu einer mehrfach differenzierbaren Funktion f finde ein Polynom

$$T_n(x) = c_0 + c_1 \cdot (x - x_0) + \cdots + c_n \cdot (x - x_0)^n,$$

dass sich an einem Punkt x_0 „möglichst eng an den Graphen von f anschmiegt“. D.h., es soll gelten:

$$f(x_0) = T_n(x_0), \quad f'(x_0) = T_n'(x_0), \quad \ldots \quad , f^{(n)}(x_0) = T_n^{(n)}(x_0).$$

Hierdurch ist das Polynom eindeutig bestimmt als

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n.$$

Begründung: Die k-te Ableitung von T_n an der Stelle x_0 ist

$$f^{(k)}(x_0) \overset{(!)}{=} T_n^{(k)}(x_0)$$

$$= c_k \cdot k! \cdot (x - x_0)^0 + c_{k+1} \cdot (k+1) \cdot k \cdot \cdots \cdot 2 \cdot (x - x_0)^1 \Big|_{x = x_0} + \cdots = c_k \cdot k!$$

$$\Rightarrow \quad c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Definition 6.22: (Taylor–Polynome und –Reihen)

Sei f mehrfach am Punkt x_0 differenzierbar. Das Polynom

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

heißt **„Taylor–Polynom“** *n-ten Grades von f am* **Entwicklungspunkt** *x_0. Die unendliche Reihe*

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

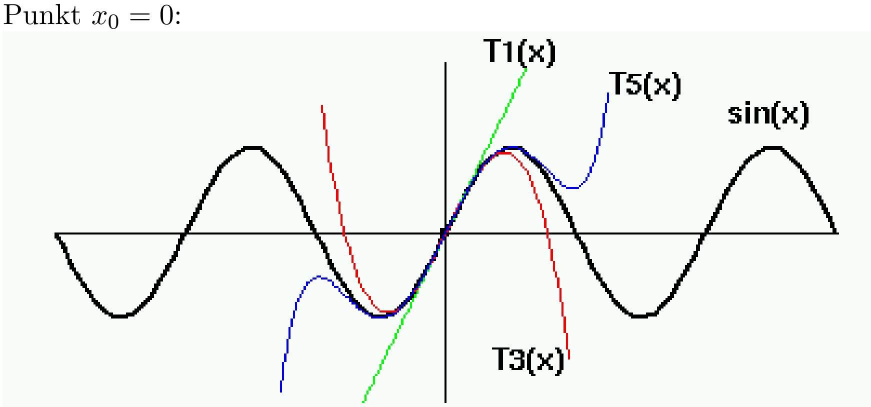
heißt **„Taylor–Reihe“** *von f am Entwicklungspunkt x_0.*

↓28.6.05

Wozu Taylor–Polynome? Taylor–Polynome dienen dazu, komplizierte Funktionen in unmittelbarer Umgebung eines Punktes x_0 durch einfache Funktionen, nämlich Polynome, zu approximieren. Dadurch kann man oft das Verhalten der Funktion in der Nähe spezieller Punkte einfach studieren.

Taylor–Polynome nähern die Funktion an für Werte x, die dicht beim Entwicklungspunkt x_0 liegen: $T_n(x) \approx f(x)$. Je höher n und je kleiner der Abstand $x - x_0$, um so besser ist die Approximation.

Hier eine Graphik einiger Taylor–Polynome der Funktion $f(x) = \sin(x)$ um den Punkt $x_0 = 0$:



Eine erste Taylor–Reihenberechnung:

Beispiel 6.23: Wir berechnen die Taylor–Reihe von $f(x) = e^x$ um $x_0 = 0$. Wegen $f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = e^{x_0} = e^0 = 1$ ist die Taylor–Reihe

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!} \cdot (x - 0) + \frac{1}{2!} \cdot (x - 0)^2 + \cdots = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots .$$

Die in Beispiel 3.24 vorgestellte Reihendarstellung der Exponentialfunktion ist also nichts anderes als die Taylor–Entwicklung um den Nullpunkt. Das selbe gilt für die Reihendarstellung der trigonometrischen Funktionen aus Definition 5.10: mit

$$f(x) = \sin(x),\ f'(x) = \cos(x),\ f''(x) = -\sin(x),\ f^{(3)}(x) = -\cos(x),\ f^{(4)}(x) = \sin(x)$$

folgt

$$\begin{array}{ccccccccc}
f^{(0)}(0) & = & f^{(4)}(0) & = & f^{(8)}(0) & = & \ldots & = & 0, \\
f^{(1)}(0) & = & f^{(5)}(0) & = & f^{(9)}(0) & = & \ldots & = & 1, \\
f^{(2)}(0) & = & f^{(6)}(0) & = & f^{(10)}(0) & = & \ldots & = & 0, \\
f^{(3)}(0) & = & f^{(7)}(0) & = & f^{(11)}(0) & = & \ldots & = & -1
\end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots .$$

Analog für $f(x) = \cos(x)$:

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \cdots \ .$$

Nun eine Anwendung der Taylor–Entwicklung:

Beispiel 6.24: (Vergleiche auch mit Beispiel 4.12) Betrachte die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} & \text{für } x \neq 0, \\[2ex] \dfrac{1}{2} & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Wir behaupten, dass f auch an der Stelle $x = 0$ stetig ist. Wir approximieren $\cos(x)$ durch die Taylor–Entwicklung um den Punkt $x_0 = 0$. Für $x \neq 0$ gilt

$$f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1 - \Big(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\Big)}{x^2} = \frac{\frac{x^2}{2} + O(x^4)}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{O(x^4)}{x^2} = \frac{1}{2} + O(x^2).$$

Hiermit ist nun klar: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \Big(\dfrac{1}{2} + O(x^2)\Big) = \dfrac{1}{2}$.

Beispiel 6.25: In MuPAD ist die Funktion `taylor` dafür zuständig, den Beginn einer Taylor–Entwicklung zu berechnen:

```
>> taylor(exp(x), x = 0)

                 2    3    4     5
                x    x    x     x         6
        1 + x + -- + -- + -- + --- + O(x )
                2    6    24   120
```

Die Taylor–Entwicklung von $f(x) = \frac{1}{1-x}$ um $x_0 = 0$ ist die geometrische Reihe aus Beispiel 3.3. Es werden 10 Terme berechnet:

```
>> taylor(1/(1 - x), x = 0, 10)

             2    3    4    5    6    7    8    9       10
    1 + x + x  + x  + x  + x  + x  + x  + x  + x  + O(x  )
```

Der folgende Befehl berechnet eine Taylor–Entwicklung um $x_0 = \pi$:

```
>> taylor(2 + sin(x)*cos(x), x = PI)

                                 3             5
                      2 (x - PI)    2 (x - PI)              6
    2 + (x - PI) - ----------- + ---------- + O((x - PI) )
                          3            15
```

Beispiel 6.26: Betrachte $f(x) = 1 - \sqrt{1-x} = 1 - (1-x)^{\frac{1}{2}}$. Wie kann man Werte $f(x)$ für kleines x ohne technische Hilfsmittel ausrechnen? Zunächst die Berechnung der ersten Taylor–Polynome. Als Entwicklungspunkt wählen wir $x_0 = 0$, da wir uns für **kleine** Werte von x interessieren. Man braucht Ableitungen von $f(x)$ am Entwicklungspunkt $x_0 = 0$:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 1 - (1-x)^{\frac{1}{2}}, \quad f(0) = 0, \\ f'(x) & = & \frac{1}{2} \cdot (1-x)^{-\frac{1}{2}}, \quad f'(0) = \frac{1}{2}, \\ f''(x) & = & \frac{1}{4} \cdot (1-x)^{-\frac{3}{2}}, \quad f''(0) = \frac{1}{4}, \\ & \ldots & \end{array}$$

Hiermit folgt die Entwicklung

$$f(x) = 1 - \sqrt{1-x} \approx f(0) + f'(0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \cdots$$

$$= 0 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \cdots \ .$$

Nun ja, die Terme der Entwicklung sind in der Tat so alle berechenbar, aber das ist ziemlich mühselig. Bequemer mit MuPAD:

```
>> taylor(1 - sqrt(1 - x), x)

            2    3       4       5
   x   x    x     5 x     7 x        6
   - + -- + -- + ---- + ---- + O(x )
   2   8    16   128     256
```

Aus diesen Taylor–Approximationen bekommt man z.B. für $x = 0.1$:

$$\begin{array}{rcl} f(0.1) & = & \frac{0.1}{2} + \frac{0.1^2}{8} + \frac{0.1^3}{16} + \cdots \\ & & \\ & = & 0.05 \\ & + & 0.00125 \\ & + & 0.0000625 \\ & + & \cdots \\ \hline & = & 0.05131... \end{array}$$

Man sieht der Entwicklung geradezu an, dass die noch nicht berücksichtigten Terme der Entwicklung die angegebenen Dezimalstellen nicht mehr beeinflussen, d.h., die ersten 3 bis 4 Ziffern sind korrekt. Probe mit MuPAD:

```
>> 1 - sqrt(0.9)
                          0.05131670195
```

Für Taylor–Polynome endlichen Grades ist es zumindestens intuitiv klar, dass sie eine Approximation der Funktion liefern, wenn nur x dicht genug beim Entwicklungspunkt x_0 liegt. Es verbleibt jedoch zu klären, ob die unendliche Reihe gegen $f(x)$ konvergiert (bzw., wie weit entfernt x von x_0 liegen darf, damit $f(x)$ durch die Taylor–Reihe dargestellt wird).

Satz 6.27: (Restgliedformel der Taylor–Approximation)

Sei $f(x)$ in einer Umgebung des Punktes x_0 $(n+1)$-fach stetig differenzierbar. Sei x aus dieser Umgebung. Dann existiert ein Punkt ξ im offenen Intervall zwischen x und x_0, so dass gilt:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k}_{\text{Taylor–Polynom vom Grad } n} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}}_{\textbf{„Restglied“}}.$$

Beweis: (für technisch Interessierte) Wir halten x fest und fassen das Taylor–Polynom als Funktion des Entwicklungspunkts x_0 auf:

$$T_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \cdot (x-t)^k.$$

Die Ableitung dieser Funktion ist eine Teleskopsumme:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\, T_n(t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} \cdot (x-t)^k - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \cdot k \cdot (x-t)^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} \cdot (x-t)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} \cdot (x-t)^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} \cdot (x-t)^k - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} \cdot (x-t)^k \\
&= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \cdot (x-t)^n.
\end{aligned}$$

Betrachte die Hilfsfunktion

$$g(t) = (x-x_0)^{n+1} \cdot T_n(t) + (x-t)^{n+1} \cdot (f(x) - T_n(x_0))$$

mit festem x und x_0, für die

$$\begin{aligned}
g(x_0) &= (x-x_0)^{n+1} \cdot T_n(x_0) + (x-x_0)^{n+1} \cdot (f(x) - T_n(x_0)) \\
&= (x-x_0)^{n+1} \cdot f(x), \\
g(x) &= (x-x_0)^{n+1} \cdot T_n(x) = (x-x_0)^{n+1} \cdot f(x)
\end{aligned}$$

gilt, also $g(x) = g(x_0)$. Nach dem Satz von Rolle 6.19 gibt es ein ξ im offenen Intervall zwischen x und x_0, wo die Ableitung

$$\frac{d}{dt}\, g(t) = (x - x_0)^{n+1} \cdot \frac{d}{dt}\, T_n(t) - (n+1) \cdot (x-t)^n \cdot (f(x) - T_n(x_0))$$

$$= (x - x_0)^{n+1} \cdot \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \cdot (x-t)^n - (n+1) \cdot (x-t)^n \cdot (f(x) - T_n(x_0))$$

$$= (x-t)^n \cdot \Big((x - x_0)^{n+1} \cdot \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} - (n+1) \cdot (f(x) - T_n(x_0)) \Big)$$

verschwindet:

$$0 = (x-\xi)^n \cdot \Big((x - x_0)^{n+1} \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} - (n+1) \cdot (f(x) - T_n(x_0)) \Big)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) - T_n(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}.$$

Q.E.D.

Interpretation 6.28:

Das Restglied

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1} = f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

ist die Differenz zwischen der Funktion $f(x)$ und dem n-ten Taylor–Polynom um x_0. Die Funktion wird genau dann durch die unendliche Taylor–Reihe dargestellt, wenn das Restglied bei festem x, x_0 für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Sind z.B. alle Ableitungen von f beschränkt, so ist dies für beliebiges x und x_0 der Fall, denn $n!$ wächst schneller gegeben ∞ als $|x - x_0|^n$ für jeden Wert von $|x - x_0|$. Dies erklärt z.B., dass die trigonometrischen Funktionen sin *und* cos*, deren Ableitungen nur Werte in $[-1, 1]$ annehmen, global durch ihre Taylor–Reihen dargestellt werden (wir haben sie in Definition 5.10 ja auch über diese Reihen eingeführt).*

Beispiel 6.29: Wir betrachten die Taylor–Entwicklung von $f(x) = \ln(1+x)$ um den Punkt $x_0 = 0$:

$$f(x) = \ln(1+x), \quad f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3},$$

$$\ldots, \quad f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} \cdot (k-1)!}{(1+x)^k}.$$

Mit $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)!$ folgt als Taylor–Reihe

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \mp \cdots ,$$

die die Funktion darstellt, solange die Restglieder

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} = \frac{(-1)^n \cdot x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1} \cdot (n+1)}$$

gegen 0 konvergieren. Dies ist für positives $x \leq 1$ mit $0 < \xi < x \leq 1$ offensichtlich der Fall:

$$\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1} \cdot (n+1)} \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Speziell für $x = 1$ ergibt sich der Wert der alternierenden harmonischen Reihe:

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots .$$

Für negatives $x \geq -\frac{1}{2}$ gilt $-\frac{1}{2} \leq x < \xi < 0$:

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1} \cdot (n+1)} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1} \cdot (n+1)} \leq \frac{(1/2)^{n+1}}{(1/2)^{n+1} \cdot (n+1)} = \frac{1}{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

d.h., auch hier konvergiert das Restglied gegen 0. Weiterhin konvergiert die Taylor–Reihe auch für $-1 < x < -\frac{1}{2}$ gegen $\ln(1+x)$, was wir aus unserer Restgliedformel allerdings nicht herausbekommen (es gibt alternative Restgliedformeln, die dieses Resultat liefern). Zusammengefaßt:

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \pm \cdots \quad \text{für } x \in (-1, 1].}$$

Für $|x| > 1$ sowie für $x = -1$ divergiert die Taylor–Reihe.

6.4 Monotonie, Extremwerte

↓29.6.05

Eine der wichtigsten Anwendungen der Differentiation ist das Auffinden von Extremwerten. Dazu stellen wir zunächst fest, dass Ableitungswerte (= Tangentensteigungen) auf ansteigendes oder abfallendes Verhalten der Funktion hinweisen:

Satz 6.30: (Ableitungen weisen auf Monotonie hin)

Sei f differenzierbar, die Ableitungsfunktion f' sei stetig. Gilt $f'(x_0) > 0$, so ist f auf einer Umgebung von x_0 streng monoton steigend. Gilt $f'(x_0) < 0$, so ist f auf einer Umgebung von x_0 streng monoton fallend.

Beweis: Da f' stetig ist, gilt für $f'(x_0) > 0$, dass f' auch noch auf einer Umgebung von x_0 positiv ist. Für x, y aus dieser Umgebung von x_0 mit $x < y$ liefert der Mittelwertsatz 6.20

$$f(y) - f(x) = f'(\xi) \cdot (y - x) > 0$$

mit einem Zwischenwert ξ zwischen x und y. Damit ist $f(x)$ monoton steigend auf einer Umgebung des Punktes x, auf der für den Zwischenwert $f'(\xi) > 0$ gilt. Analog folgt, dass $f(x)$ monoton fallend ist, wenn mit $f'(x_0) < 0$ die Ableitung auf einer Umgebung von x_0 negative Werte annimmt.

Q.E.D.

Intuitiv: mit der Interpretation der Ableitung 6.4 ist dies unmittelbar klar. Für kleines Δx gilt:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Extrema sind die Stellen, wo die Funktion „auf der einen Seite" steigend, „auf der anderen Seite" fallend ist:

Satz 6.31: (An Extremstellen verschwindet die Ableitung)

Sei f differenzierbar. Ist die Stelle x_0 ein (lokales) Maximum oder Minimum, so gilt $f'(x_0) = 0$.

Man findet also alle Kandidaten für Extremstellen einer Funktion f, indem man die Nullstellen von f' sucht.

Beweis: Genau wie im Beweis des Satzes von Rolle 6.19.

Q.E.D.

Beispiel 6.32: Betrachte $f(x) = 2 \cdot x - x^2$:

$$\frac{d}{dx}\, f(x) = \frac{d}{dx}\, (2 \cdot x - x^2) = 2 - 2 \cdot x \stackrel{(!)}{=} 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 1.$$

Damit ist $x_0 = 1$ der einzige Punkt, an dem (möglicherweise) ein Extremum vorliegen kann.

Es gibt allerdings Stellen x_0 mit $f'(x_0) = 0$, die keine Extremstellen (sondern sogenannte „Sattelpunkte") sind. Beispiel: die Funktion $f(x) = x^3$ ist streng monoton steigend. Am Punkt $x_0 = 0$ gilt $f'(x_0) = 3 \cdot x_0^2 = 0$, aber x_0 ist kein Extremum.

Satz 6.33: (Hinreichende Kriterien für Extrema)

Sei f mehrfach differenzierbar. Gilt an einer Stelle x_0

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) < 0,$$

so ist x_0 ein lokales Maximum. Gilt

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) > 0,$$

so ist x_0 ein lokales Minimum.

„Beweis“: Approximiere $f(x)$ in einer Umgebung von x_0 durch das Taylor–Polynom zweiten Grades:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2.$$

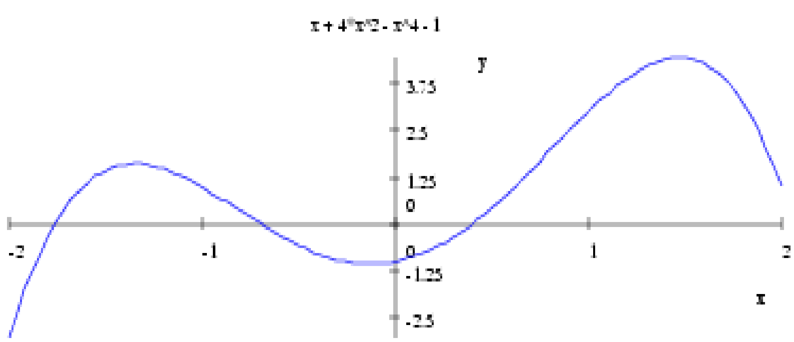
An einem Punkt x_0 mit $f'(x_0) = 0$ gilt näherungsweise:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2.$$

Da $(x - x_0)^2 > 0$ für $x \neq x_0$ ist, sind die Funktionswerte in der Umgebung größer als $f(x_0)$, wenn $f''(x_0) > 0$ gilt (Minimum). Für $f''(x_0) < 0$ sind die Funktionswerte in der Umgebung kleiner als $f(x_0)$ (Maximum).

Beispiel 6.34: Betrachte $f(x) = x + 4\,x^2 - x^4 - 1$:

```
>> f:= x -> x + 4*x^2 - x^4 - 1:
>> plotfunc2d(f(x), x = -2..2)
```



Um die Kandidaten für die Extrema zu finden, werden (numerische Approximationen der) Lösungen der Gleichung $f'(x) = 0$ berechnet. Für numerische Lösungen sind die MuPAD-Funktionen `numeric::solve` oder auch `numeric::fsolve` zuständig. Für polynomiale Gleichungen wird eine Menge aller Lösungen geliefert. Die einzelnen Lösungen lassen sich durch „indizierten Zugriff“ `Kandidaten[1]` etc. auswählen:

```
>> Kandidaten:= numeric::solve(f'(x) = 0, x)

         {-1.346997409, -0.1260001926, 1.472997601}
```

Diese Werte werden in die 2-te Ableitung von f eingesetzt:

```
>> f''(Kandidaten[1])
                               -13.77282422
>> f''(Kandidaten[2])
                                7.809487418
>> f''(Kandidaten[3])
                                -18.0366632
```

Nach Satz 6.33 ist der erste Kandidat ein Maximum, der zweite Kandidat ein Minimum, der dritte Kandidat ein Maximum. Die Graphik bestätigt dies.

6.5 Die de l'Hospitalsche Regel

In $\frac{0}{0}$–Situationen kann man durch Ableiten auch Grenzwerte bestimmen.

Satz 6.35: (de l'Hospitalsche Regel)

Seien f und g differenzierbar, es gelte $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der rechte Grenzwert existiert.

„Beweis:“ Intuitiv: Approximiere Zähler und Nenner durch das Taylor–Polynom ersten Grades:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}{g(x_0) + g'(x_0) \cdot (x - x_0)} = \frac{f'(x_0) \cdot (x - x_0)}{g'(x_0) \cdot (x - x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Für eine saubere Durchführung des Beweises benutze man den Mittelwertsatz 6.20 (unter der Zusatzannahme, dass f' und g' stetig seien. Die Regel gilt aber auch ohne diese Stetigkeit.)

Q.E.D.

Beispiel 6.36: Betrachte erneut die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

aus Beispiel 4.12. Für den Punkt $x_0 = 0$ liegt eine $\frac{0}{0}$–Situation vor. Mit de l'Hospital folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\,(e^x - 1)}{\frac{d}{dx}\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = \lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1,$$

wobei in jedem Schritt die Existenz des jeweils rechts stehenden Grenzwerts vorausgesetzt wird (was gerechtfertigt ist, sobald man ganz rechts angekommen ist).

Die de l'Hospitalsche Regel kann auch mehrfach hintereinander angewendet werden:

Beispiel 6.37: Betrachte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2\cdot x} - 1 - 2\cdot x}{x^2}$. Nach einer Anwendung von de l'Hospital trifft man beim Quotienten der Ableitungen wieder auf eine $\frac{0}{0}$–Situation und kann de l'Hospital erneut anwenden:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2\cdot x} - 1 - 2\cdot x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\,(e^{2\cdot x} - 1 - 2\cdot x)}{\frac{d}{dx}\,x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot e^{2\cdot x} - 2}{2\cdot x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{2\cdot x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\,(e^{2\cdot x} - 1)}{\frac{d}{dx}\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot e^{2\cdot x}}{1} = 2\cdot e^{2\cdot 0} = 2.$$

Bemerkung 6.38: *Die de l'Hospitalsche Regel*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

gilt auch für $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$.

Beispiel 6.39: Mit $f(x) = \ln(x+1)$, $g(x) = \ln(x)$, $f'(x) = \frac{1}{x+1}$, $g'(x) = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1} = 1,$$

wobei in $(*)$ de l'Hospital ein zweites Mal angewendet wurde.

Beispiel 6.40: Mit kleinen Tricks bekommt man eine de l'Hospital-Technik auch sofort für Situationen wie z.B. $0\cdot\infty$ oder auch 1^∞. $\boxed{\downarrow 5.7.05}$

Für $0\cdot\infty$ ist der Standardtrick, ∞ als $1/0$ (oder manchmal 0 als $1/\infty$) zu schreiben. Z.B.:

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot(e^{1/x} - 1) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}\,(e^{1/x} - 1)}{\frac{d}{dx}\,\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}\cdot e^{1/x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} e^{1/x} = 1.$$

Hierbei wurde die ursprüngliche $\infty \cdot 0$–Situation durch das Umschreiben $x = \frac{1}{1/x}$ in eine $\frac{0}{0}$–Situation verwandelt, auf die de l'Hospital anwendbar ist.

Für eine 1^∞–Situation ist der Standardtrick, die identische Abbildung in der Form $y = \exp(\ln(y))$ einzubringen, was die 1^∞–Situation in ein $0 \cdot \infty$–Problem verwandelt (welches dann wie oben zu behandeln ist). Beispiel:

$$\lim_{x\to 0+0} x^x = \lim_{x\to 0+0} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x\to 0+0} e^{x\cdot\ln(x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0+0}(x\cdot\ln(x))}.$$

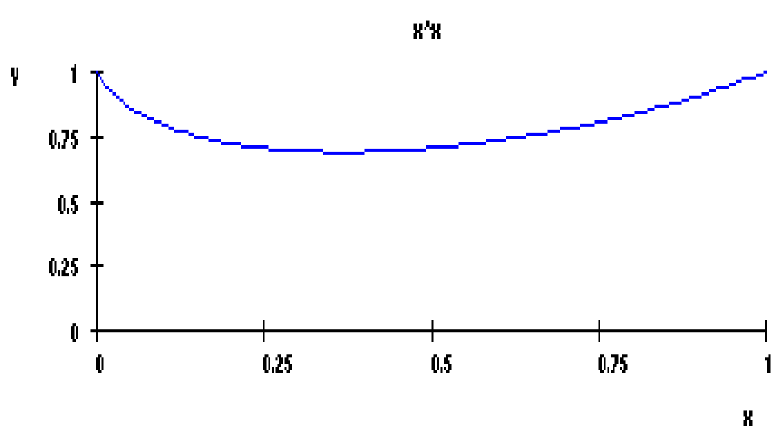
Hier ist das $0\cdot(-\infty)$–Problem $\lim\limits_{x\to 0+0} x\cdot\ln(x)$ entstanden, was wie oben per de l'Hospital gelöst wird, indem es in ein $\frac{\infty}{\infty}$–Problem (genauer: in ein $\frac{-\infty}{\infty}$–Problem) umgeschrieben wird:

$$\lim_{x\to 0+0} x\cdot\ln(x) = \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{d}{dx}\ln(x)}{\frac{d}{dx}\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+0}(-x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0+0} x^x = e^{\lim\limits_{x\to 0+0} x\cdot\ln(x)} = e^0 = 1.$$

Der Grenzwert wird durch die folgende MuPAD–Graphik bestätigt:

```
>> plotfunc2d(x^x, x = 0..1, ViewingBox = [0..1, 0..1])
```



Kapitel 7

Potenzreihen

Mit den Taylor-Reihen 6.22 hatten wir über

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

Reihen eingeführt, die von einem Parameter x abhängen und Kandidaten dafür sind, eine gegebene unendlich oft differenzierbare Funktion $f(x)$ darzustellen. Speziell stellte sich die in Beispiel 3.24 eingeführte Exponentialfunktion

$$e^z = \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots$$

als Taylor-Reihe (um den Entwicklungspunkt 0) heraus. Wir diskutieren hier nun (im Nachhinein) einige grundsätzliche Struktureigenschaften solcher Reihen, die Potenzen eines (nun komplexen) Parameters z enthalten und –bei Konvergenz– eine Funktion in z definieren. Wie es sich herausstellen wird, sind solche Funktion auf dem Konvergenzbereich der Reihen automatisch ihre eigenen Taylor-Reihen. Wir drehen also die Vorgehensweise bei den Taylor-Reihen um: Statt eine Funktion $f(z)$ vorzugeben und ihre Taylor-Reihe zu berechnen, geben wir die Taylor-Reihe vor und benutzen sie als Definition der Funktion. In der Tat hatten wir dies ja bei der Exponentialfunktion und analog bei sin und cos schon gemacht. Hier zunächst die allgemeine Form der Reihen, die wir betrachten wollen:

Definition 7.1: (Komplexe Potenzreihen)

Eine **„Potenzreihe um den Punkt** $z_0 \in \mathbb{C}$**“** *ist eine Reihe der Form*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k, \quad a_k, z, z_0 \in \mathbb{C}.$$

Dort, wo die Reihe konvergiert, definiert sie eine Funktion von z, deren Eigenschaften untersucht werden sollen.

7.1 Der Konvergenzradius

Satz 7.2: (Konvergenz von Potenzreihen)

Zur Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k$ *existiert ein* $r \geq 0$ *(der* **„Konvergenzradius"***), so dass*

a) die Reihe für alle z *mit* $|z - z_0| < r$ **absolut** *konvergiert,*

b) die Reihe für kein z *mit* $|z - z_0| > r$ *konvergiert.*

Beweis: Gibt es einen Punkt Z, in dem die Reihe $\sum_k a_k \cdot (Z - z_0)^k$ konvergiert, so bildet $a_k \cdot (Z - z_0)^k$ eine Nullfolge. Es gilt also $|a_k \cdot (Z - z_0)^k| \leq 1$ für hinreichend grosses $k \geq k_0$. Mit

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k \cdot (z - z_0)^k| = \sum_{k=k_0}^{\infty} \underbrace{|a_k \cdot (Z - z_0)^k|}_{\leq 1} \cdot \left| \frac{z - z_0}{Z - z_0} \right|^k$$

ist also für jedes z mit $|z - z_0| < |Z - z_0|$ die geometrische Reihe $\sum_k |\frac{z-z_0}{Z-z_0}|^k$ eine konvergente Majorante, d.h., $\sum_k a_k \cdot (z - z_0)^k$ konvergiert absolut. Damit ist

$$r = \sup \Big\{ |Z - z_0|; \ \ \textstyle\sum_k a_k \cdot (Z - z_0)^k \text{ konvergiert} \Big\},$$

falls die Menge der Konvergenzpunkte beschränkt ist. Konvergiert die Reihe für alle $Z \in \mathbb{C}$, setzt man formal $r = \infty$. Für jedes z mit $|z - z_0| > r$ muss die Reihe nach dieser Konstruktion von r divergieren.

Q.E.D.

Bemerkung 7.3: *Der Konvergenzbereich einer Potenzreihe besteht also prinzipiell aus einer Kreisscheibe um den Entwicklungspunkt* z_0*. Der Radius* r *kann allerdings 0 sein (d.h., die Potenzreihe konvergiert nur am Punkt* $z = z_0$*). Im Folgenden interessieren natürlich nur Potenzreihen mit einem Konvergenzradius* $r > 0$*. Über den Rand des Konvergenzkreises* $\{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| = r\}$ *kann man keine allgemeine Aussagen machen. In folgendem Beispiel konvergiert die Reihe für keinen der Randpunkte (denn für* $|z| = 1$ *ist* z^k *keine Nullfolge):*

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad (\textit{Konvergenz für } |z| < r = 1.)$$

In folgendem Beispiel konvergiert die Reihe für alle Randpunkte mit $|z| = 1$ außer für $z = 1$ ($z = 1$ führt auf die divergente harmonische Reihe):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k} \quad (\textit{Konvergenz für } |z| \leq r = 1, z \neq 1).$$

Im folgenden Beispiel konvergiert die Reihe für alle Randpunkte:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k^2} \quad (\textit{Konvergenz für } |z| \leq r = 1.)$$

Beispiel 7.4: Die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$$

hat den Konvergenzradius 1. Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot z^{2 \cdot k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-z^2)^k = \frac{1}{1-(-z^2)} = \frac{1}{1+z^2}$$

hat ebenfalls den Konvergenzradius 1.

Der Konvergenzradius eine Potenzreihe kann unmittelbar aus den Koeffizienten a_k der Reihe bestimmt werden:

Satz 7.5: (Cauchy-Hadamard-Formel für den Konvergenzradius)

Der Konvergenzradius der Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k$ *ist* $r = \dfrac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$, *wenn* $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ *existiert. Gilt* $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$, *so setze* $r = \infty$. *Gilt* $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \infty$, *so setze* $r = 0$.

Beweis: Der Grenzwert $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ existiere. Betrachte ein beliebiges z mit $|z - z_0| < r$. Dann gilt $c := \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \cdot |z - z_0| < 1$. Es folgt, dass für alle $k \geq N$ (mit geeignetem N)

$$\sqrt[k]{|a_k|} \cdot |z - z_0| \leq C < 1 \quad \text{mit } C := \tfrac{1+c}{2} \in [\tfrac{1}{2}, 1)$$

gelten muss. Damit kann die Reihe durch eine konvergente geometrische Reihe abgeschätzt werden:

$$\Big| a_k \cdot (z - z_0)^k \Big| = \Big(\sqrt[k]{|a_k|} \cdot |z - z_0| \Big)^k \leq C^k \qquad \forall k \geq N.$$

Nach Satz 3.16 konvergiert $\sum_k |a_k| \cdot |z - z_0|^k$, da $\sum_k C^k$ mit $C < 1$ eine konvergente Majorante ist. Dies ist die absolute Konvergenz von $\sum_k a_k \cdot (z - z_0)^k$. Das Argument greift auch für den Grenzfall $r = \infty$.

Betrachte nun ein beliebiges z mit $|z - z_0| > r$. Diesmal gilt

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \cdot |z - z_0| > 1,$$

also

$$\left|a_k \cdot (z - z_0)^k\right| = \left(\sqrt[k]{|a_k|} \cdot |z - z_0|\right)^k > 1$$

für große k, d.h., die Reihenglieder von $\sum_k a_k \cdot (z - z_0)^k$ bilden keine Nullfolge. Nach Satz 3.8 kann die Reihe $\sum_k a_k \cdot (z - z_0)^k$ nicht konvergieren. Das Argument greift auch für den Grenzfall $r = 0$.

Q.E.D.

Bemerkung 7.6: *Die allgemeine Form der Cauchy-Hadamard-Formel ist*

$$\textit{Konvergenzradius} = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}},$$

wo $\limsup$ *(**„Limes superior“**) der größte Häufungspunkt der Folge* $\sqrt[k]{|a_k|}$ *ist. Der Limes superior existiert für jede reelle Folge (bei unbeschränkten Folgen definiert man ihn formal als* ∞*).*

7.2 Eigenschaften von Potenzreihen

Auf dem Inneren des Konvergenzkreises sind durch Potenzreihen dargestellte Funktionen „beliebig harmlos und angenehm“. Sie sind automatisch unendlich oft diff'bar und werden durch ihre Taylor-Entwicklung dargestellt (Funktionen, die durch ihre Taylor-Reihen dargestellt werden, nennt man **analytisch**). Dies darf nicht verwundern, denn (gliedweise Differenzierbarkeit mal vorausgesetzt):

$$\frac{d^n}{dz^n}\Big|_{z=z_0} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k}_{f(z)} = \Big(n! \cdot a_n + (..) \cdot (z - z_0) + (..) \cdot (z - z_0)^2 + \dots\Big)_{z=z_0}$$

$$= n! \cdot a_n,$$

also $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$.

Damit ist die Potenzreihe ihre eigene Taylor-Reihe:

$$\boxed{f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \cdot (z - z_0)^k.}$$

Diese heuristische Überlegung gilt in der Tat:

Satz 7.7: (Potenzreihen stellen analytische Funktionen dar)

Auf dem Inneren des Konvergenzkreises $\{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| < r\}$ einer Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$ stellt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k$$

eine unendlich oft differenzierbare Funktion dar. Es gilt

$$\frac{d^n}{dz^n}\, f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-n+1) \cdot (z - z_0)^{k-n},$$

d.h., die Potenzreihe kann gliedweise differenziert werden. Der Konvergenzradius der abgeleiteten Reihen ist wiederum r. Speziell gilt $a_k = f^{(k)}(z_0)/k!$.

Beweis: Für die Potenzreihe ist der Differenzenquotient

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \frac{(z+h-z_0)^k - (z-z_0)^k}{h}.$$

Mit der Binomialentwicklung

$$\frac{(z+h-z_0)^k - (z-z_0)^k}{h} = \frac{1}{h} \cdot \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} \cdot h^j \cdot (z-z_0)^{k-j}$$

$$= k \cdot (z-z_0)^{k-1} + h \cdot \sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j} \cdot h^{j-2} \cdot (z-z_0)^{k-j}$$

folgt

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (z-z_0)^{k-1} + h \cdot \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=2}^{k} a_k \cdot \binom{k}{j} \cdot h^{j-2} \cdot (z-z_0)^{k-j}}_{g(h)}.$$

Die die Funktion $g(h)$ definierende Reihe ist dabei wohldefiniert, da die linke Seite der Gleichung für hinreichend kleines h definiert ist ($z+h$ muss im Konvergenzkreis von $f(z)$ liegen) und die Reihe $\sum_k a_k \cdot k \cdot (z-z_0)^{k-1}$ konvergiert (in den

Übungen wird gezeigt, dass $f(z) = \sum_k a_k (z-z_0)^k$ und $f(z) = \sum_k a_k \cdot k \cdot (z-z_0)^k$ den selben Konvergenzradius haben). Die Funktion $g(h)$ ist beschränkt in h, denn für $|h| \leq |h_0|$ (mit noch zu wählendem h_0) gilt:

$$|g(h)| = \Big|\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{k} a_k \cdot \binom{k}{j} \cdot h^{j-2} \cdot (z-z_0)^{k-j}\Big| \leq \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{k} |a_k| \cdot \binom{k}{j} \cdot |h_0|^{j-2} \cdot |z-z_0|^{k-j}$$

$$\leq \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| \sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j} \cdot |h_0|^{j-2} \cdot |z-z_0|^{k-j} \leq \frac{1}{|h_0|^2} \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \cdot |h_0|^{j} \cdot |z-z_0|^{k-j}$$

$$= \frac{1}{|h_0|^2} \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| (|z-z_0| + |h_0|)^k.$$

Ist $r > 0$ der Konvergenzradius von $\sum_k a_k \cdot (z-z_0)^k$ (und damit auch von $\sum_k |a_k| \cdot |z-z_0|^k$), so wähle $|h_0| = (r - |z-z_0|)/2$, womit $|z-z_0| + |h_0| < r$ gilt, d.h., die obige Reihe konvergiert und liefert eine Schranke für $|g(h)|$.
Damit folgt $h \cdot g(h) = O(h)$:

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (z-z_0)^{k-1} + \lim_{h \to 0} O(h)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (z-z_0)^{k-1}.$$

Damit ist gezeigt, dass die Potenzreihe einmal differenzierbar ist. Die Ableitung ist wieder als Potenzreihe dargestellt.
Die höheren Ableitungen folgen nun sofort per Induktion nach der Ableitungsordnung.

Q.E.D.

6.7.05↓ **Bemerkung 7.8:** *Die Formel*

$$\frac{d^n}{dz^n} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z-z_0)^k = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-n+1) \cdot (z-z_0)^{k-n}$$

ist leicht zu merken. Sie besagt lediglich, dass man Differentiation und Summation vertauschen darf:

$$\frac{d^n}{dz^n} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \frac{d^n}{dz^n} (z-z_0)^k$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-n+1) \cdot (z-z_0)^{k-n}.$$

Beispiel 7.9: Die in Beispiel 3.24 bzw. Definition 5.10 eingeführten Funktionen

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad \sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot z^{2\cdot k+1}}{(2\cdot k+1)!}, \quad \cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot z^{2\cdot k}}{(2\cdot k)!}$$

haben den Konvergenzradius $r = \infty$ und sind damit auf ganz $\mathbb{C}$ differenzierbar. Aus diesen Darstellungen erhält man sofort:

$$\frac{d}{dz}\, e^z = e^z, \quad \frac{d}{dz}\, \sin(z) = \cos(z), \quad \frac{d}{dz}\, \cos(z) = -\sin(z).$$

Bemerkung 7.10: *Die (reelle) Reihe*

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot x^{2\cdot k}$$

um $x_0 = 0$ hat offensichtlich den Konvergenzradius 1. Für $|x| < 1$ stellt sie nach Konstruktion die Funktion $1/(1+x^2)$ da, die längs der reellen Achse eine „harmlose“ Funktion darstellt (überall stetig, beliebig oft differenzierbar). Warum konvergiert die Reihe aber nur für Werte von x mit $|x| < 1$, wo doch $1/(1+x^2)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ wohldefiniert ist?

Im Komplexen ist die Theorie der Differentiation und Taylor-Entwickelbarkeit wesentlich weitreichender (und einfacher) als im Reellen. Man muss sich in der Tat $1/(1+x^2)$ im Komplexen vorstellen. Die Funktion $z \in \mathbb{C} \to 1/(1+z^2) \in \mathbb{C}$ hat Singularitäten (Polstellen) bei $z = \pm i$. In der Tat ist der Konvergenzradius 1 bei Entwicklung um den Nullpunkt der Abstand vom Entwicklungspunkt 0 zur nächsten Singularität! Im Komplexen ist der „kleine“ Konvergenzradius 1 der Reihe daher unmittelbar verständlich. Im Reellen sieht man die komplexen Singularitäten nicht und wundert sich, dass die nette Funktion $1/(1+x^2)$ nicht überall durch ihre Taylor-Reihe dargestellt wird.

Kapitel 8

Integration

8.1 Stammfunktionen: das unbestimmte Integral

Die Integration ist die Umkehrung der Differentiation: zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ sucht man eine Funktion $F(x)$, deren Ableitung $f(x)$ ist.

8.1.1 Definitionen, Grundintegrale

Definition 8.1: (Stammfunktion)

$F(x)$ heißt **„Stammfunktion"** *einer (hinreichend glatten) Funktion $f(x)$, wenn $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ gilt. Alternativ nennt man $F(x)$ auch das* **„unbestimmte Integral über** $f(x)$**"** *und benutzt auch die Notation $F(x) = \int f(x)\,dx$. Die Funktion $f(x)$ unter dem Integralzeichen wird als* **„Integrand"** *bezeichnet.*

Bemerkung 8.2: *Stammfunktionen sind nicht eindeutig bestimmt. Da die Ableitung einer konstanten Funktion überall 0 ist, kann man zu einer Stammfunktion eine beliebige Konstante hinzuaddieren, wobei man eine neue Stammfunktion erhält. Andererseits, hat $f(x)$ keine Singularitäten (Polstellen etc.), so sind Stammfunktionen stetig und die Differenz zweier stetiger Stammfunktionen ist immer eine Konstante.*

Beispiel 8.3: Zu $f(x) = x$ sind $F_1(x) = \frac{x^2}{2}$ und $F_2(x) = \frac{x^2}{2} + 17$ Stammfunktion. Die beliebige additive Konstante in Stammfunktionen (die **„Integrationskonstante"**) wird folgendermaßen ausgedrückt:

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c.$$

Damit ist gemeint: $\int f(x)\,dx$ stellt die Klasse **aller** Stammfunktionen dar (d.h., in der Schreibweise $\int f(x)\,dx$ steckt die additive Konstante sozusagen im $\int$-Symbol und braucht nicht explizit hingeschrieben zu werden). Sobald das Integralzeichen durch einen konkreten Repräsentanten dieser Klasse (hier $\frac{x^2}{2}$) ersetzt wird, schreiben wir die beliebige additive Konstante explizit dazu.

Bemerkung 8.4: *Mit dieser Konvention gilt trivialerweise für jede differenzierbare Funktion $F(x)$:*

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + c\ .$$

Grundintegrale 8.5:

Aus der in Satz 6.6 gegebenen (kleinen) Liste von Ableitungen erhält man eine (kleine) Liste von Stammfunktionen für die einfachen Grundfunktionen:

$$\begin{aligned}
\int x^n\,dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \qquad (n \neq -1)\\
\int \frac{1}{x}\,dx &= \ln(|x|) + c, \qquad \textit{(Beispiel 6.18)}\\
\int e^x\,dx &= e^x + c,\\
\int \sin(x)\,dx &= -\cos(x) + c,\\
\int \cos(x)\,dx &= \sin(x) + c.
\end{aligned}$$

Beispiel 8.6: In MuPAD ist die Funktion `int` (engl.: integrate) für die Integration zuständig. Für die Integrationskonstante wird dabei vom System automatisch ein „besonders einfacher“ Wert gewählt:

```
>> int(cos(x), x)
                              sin(x)

>> int(x*sin(x)*exp(x), x)

       cos(x) exp(x)   x cos(x) exp(x)   x sin(x) exp(x)
       ------------- - --------------- + ---------------
             2                2                 2
```

Für aus den einfachen Grundfunktionen aufgebaute Funktionen würde man gern per Rechenregeln die Integration komplizierter Funktionen auf die Integration einfacher Funktionen zurückführen. Leider ist das nicht so einfach. In der Tat entspricht jeder Rechenregel der Differentiation (Satz 6.6, Satz 6.12) eine Regel für's Integrieren. Die sich ergebenden Regeln sind aber nicht so, daß man damit automatisch alle Integrationen auf Grundintegrale zurückführen kann. Zunächst die einfachsten Regeln:

Satz 8.7: (Summenregel)

Für beliebige Konstanten a, b und Funktionen $f(x)$, $g(x)$ gilt

$$\int \Big(a \cdot f(x) + b \cdot g(x)\Big) dx = a \cdot \int f(x)\, dx \;+\; b \cdot \int g(x)\, dx.$$

Das ist durch Differenzieren beider Seiten dieser Gleichung unmittelbar klar.

Merke:

Konstante Faktoren können stets aus dem Integralzeichen herausgezogen werden. Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale.

Beispiel 8.8:

$$\int \Big(2 \cdot e^x + \frac{1}{\sqrt{2\,x}}\Big)\, dx = 2 \cdot \int e^x\, dx + \int \frac{1}{\sqrt{2}}\, x^{-\frac{1}{2}} dx = 2 \cdot e^x + c_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \int x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= 2 \cdot e^x + c_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c_2 = 2 \cdot e^x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \underbrace{c_1 + c_2}_{c}$$

$$= 2 \cdot e^x + \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x} + c = 2 \cdot e^x + \sqrt{2} \cdot \sqrt{x} + c.$$

Hierbei wurden die einzelnen Integrationskonstanten c_1, c_2 zu einer neuen beliebigen Konstanten $c = c_1 + c_2$ zusammengefaßt.

8.1.2 Partielle Integration

Aus der Produktregel

$$\frac{d}{dx}\Big(f(x) \cdot g(x)\Big) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

der Differentiation gewinnt man durch Integration

$$f(x) \cdot g(x) + c = \int f'(x) \cdot g(x)\, dx \;+\; \int f(x) \cdot g'(x)\, dx.$$

Diese Gleichung liefert eine Integrationsregel, die man **„partielle Integration“** nennt:

Satz 8.9: (Partielle Integration)

$$\boxed{\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) \ - \ \int f'(x) \cdot g(x)\, dx.}$$

$\boxed{12.7.05\downarrow}$ **Bemerkung 8.10:** *Diese Regel ist in folgender Situation anwendbar:*

- *Der Integrand muß das Produkt zweier Funktionen sein.*
- *Von einem Faktor ($g'(x)$) muß man die Stammfunktion $g(x)$ kennen.*

Ein Integral (über $f(x) \cdot g'(x)$) wird in ein anderes Integral (über $f'(x) \cdot g(x)$) überführt, es verbleibt also die Aufgabe, eine Stammfunktion zu finden. Allerdings ist manchmal das Produkt $f'(x) \cdot g(x)$ einfacher zu integrieren als das Ausgangsprodukt $f(x) \cdot g'(x)$:

- *Sinnvoll ist partielle Integration meist, wenn die Ableitung $f'(x)$ „einfacher" ist als $f(x)$ und $g(x)$ nicht wesentlich „komplizierter" als $g'(x)$.*

Beispiel 8.11: Im Integral $\int x \cdot \ln(x)\, dx$ ist $f(x) = \ln(x)$ eine „unangenehme" Funktion, während $f'(x) = \frac{1}{x}$ als rationale Funktion wesentlich angenehmer ist:

$$\int \underbrace{x}_{g'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{f(x)}\, dx = \underbrace{\ln(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{g(x)} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{g(x)}\, dx$$

$$= \ln(x) \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x}{2}\, dx = \ln(x) \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + c\ .$$

Probe:

$$\frac{d}{dx}\Big(\ln(x) \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + c\Big) = \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} + \ln(x) \cdot x - \frac{x}{2} = \ln(x) \cdot x.$$

Es gibt keine allgemeine Regel, was „einfach" und was „kompliziert" ist. Im obigen Fall war $f'(x) = \frac{1}{x}$ einfacher als $f(x) = \ln(x)$. Im folgenden Beispiel ist $f(x) = x$ „kompliziert", zumindestens „komplizierter" als $f'(x) = 1$:

Beispiel 8.12:

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{g'(x)}\, dx = \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{g(x)} - \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{g(x)}\, dx$$

$$= x \cdot e^x - \int e^x\, dx = x \cdot e^x - e^x + c = (x-1) \cdot e^x + c.$$

Manchmal braucht man einfach Erfahrung um zu sehen, daß partielle Integration hilfreich ist:

Beispiel 8.13:

$$\int \sin(x)^2\,dx = \int \underbrace{\sin(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g'(x)}\,dx = \underbrace{\sin(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{g(x)} - \int \underbrace{\cos(x)}_{f'(x)} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{g(x)}\,dx$$

$$= -\sin(x) \cdot \cos(x) + \int \cos(x)^2\,dx.$$

Das war bislang nicht sehr erfolgreich: $\int \sin(x)^2\,dx$ wurde durch $\int \cos(x)^2\,dx$ ausgedrückt. Allerdings gilt $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$, sodaß das verbleibende Integral wiederum durch das Ausgangsintegral ausgedrückt werden kann:

$$\int \cos(x)^2\,dx = \int 1\,dx - \int \sin(x)^2\,dx = x - \int \sin(x)^2\,dx.$$

Dies liefert eine Gleichung für $\int \sin(x)^2\,dx$:

$$\begin{array}{rrcl} & \int \sin(x)^2\,dx & = & -\sin(x) \cdot \cos(x) + \int \cos(x)^2\,dx \\ & & = & -\sin(x) \cdot \cos(x) + x - \int \sin(x)^2\,dx \\ \Rightarrow & 2 \cdot \int \sin(x)^2\,dx & = & x - \sin(x) \cdot \cos(x) + c \\ \Rightarrow & \int \sin(x)^2\,dx & = & \frac{1}{2} \cdot \Big(x - \sin(x) \cdot \cos(x)\Big) + \tilde{c} \end{array}$$

(mit einer neuen Integrationskonstante $\tilde{c} = c/2$).

8.1.3 Substitution

Aus der Kettenregel der Differentiation (mit $y = g(x)$)

$$\frac{d}{dx} F(g(x)) = \Big(\frac{d}{dy}\ F(y)\Big) \cdot \Big(\frac{d}{dx}\ g(x)\Big) = F'(g(x)) \cdot g'(x)$$

gewinnt man durch Integration

$$F(g(x)) + c = \int F'(g(x)) \cdot g'(x)\,dx.$$

Diese Gleichung liefert mit $f = F'$ eine Integrationsregel, die man **„Integration durch Substitution“** nennt:

Satz 8.14: (Substitution)

Sie $F(y)$ eine Stammfunktion von $f(y)$. Mit $y = g(x)$ gilt

$$\boxed{\int f(g(x)) \cdot \underbrace{g'(x)\,dx}_{dy} = \int f(y)\,dy = F(y) + c = F(g(x)) + c.}$$

Hierbei läuft die Substitution auf Folgendes hinaus. Aus $y = g(x)$ folgt $\frac{dy}{dx} = g'(x)$, also formal

$$dy = g'(x)\,dx.$$

Eine Substitution bietet sich auf jeden Fall an, wenn der Integrand einen Faktor $g'(x)$ enthält, der die Ableitung eines Teilausdrucks $g(x)$ im anderen Faktor ist:

Beispiel 8.15: In $\int \cos(x) \cdot e^{\sin(x)}\,dx$ bietet es sich an, $y = g(x) = \sin(x)$ zu substituieren, denn die Ableitung $g'(x) = \cos(x)$ taucht als Faktor im Integranden auf. Es ergibt sich

$$\int \cos(x) \cdot e^{\sin(x)}\,dx = \int e^{\overbrace{\sin(x)}^{y=g(x)}} \underbrace{\cos(x)\,dx}_{g'(x)\cdot dx = dy} = \int e^y\,dy = e^y + c = e^{\sin(x)} + c.$$

Beispiel 8.16: Wir kennen $\int \frac{1}{y}\,dy = \ln(|y|)$. Wie steht es mit $\int \frac{1}{a\cdot x+b}\,dx$? Dies ist ein Fall für die Substitution. Wir setzen $y = g(x) = a \cdot x + b$ (also $dy = a\ dx$) und erweitern mit a, sodaß $dx = \frac{1}{a} \cdot a\ dx = \frac{1}{a}\ dy$ auftaucht:

$$\int \frac{1}{a \cdot x + b}\,dx = \frac{1}{a} \cdot \int \frac{1}{a \cdot x + b} \cdot \overbrace{\underbrace{a}_{g'(x)}\ dx}^{dy} = \frac{1}{a} \int \frac{1}{y}\ dy$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \ln(|y|) + c = \frac{1}{a} \cdot \ln(|a \cdot x + b|) + c.$$

Beispiel 8.17: In $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx$ bietet sich die Substitution $y = g(x)$ an:

$$\boxed{\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \int \frac{1}{y}\,dy = \ln(|y|) + c = \ln(|g(x)|) + c.}$$

Bemerkung 8.18: *Es bietet sich allgemein an, eine Substitution $y = g(x)$ in einem Integral $\int h(x)\,dx$ technisch folgendermaßen durchzuführen:*

- *Setze $y = g(x)$ und berechne die Ableitung $\frac{dy}{dx} = g'(x)$. Formal gilt $dy = g'(x)\,dx$.*
- *Ersetze dx durch $\frac{dy}{g'(x)}$. Drücke im neuen Integranden $h(x)\,dx = \frac{h(x)}{g'(x)}\,dy$ jedes x durch y aus.*

- *Es entsteht ein Ausdruck*

$$\int h(x)\,dx = \int \underbrace{h(x(y)) \cdot \frac{1}{g'(x(y))}}_{f(y)}\,dy = \int f(y)\,dy.$$

Versuche, eine Stammfunktion $F(y) = \int f(y)\,dy$ zu finden.

- **„Rücksubstitution“**: *Setze $y = g(x)$ in $F(y)$ ein. Die gesuchte Stammfunktion des ursprünglichen Ausdrucks ist $F(g(x))$.*

Manchmal ist es nicht offensichtlich, was man substituieren sollte. Hier hilft nur Erfahrung oder ein guter Tip:

Beispiel 8.19: Substituiere $y = \sqrt{x}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$ ($\Rightarrow\ dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$) in

$$\int \sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}}\,dx = \int y \cdot e^y \cdot \underbrace{2 \cdot \sqrt{x}\ dy}_{dx} = 2 \cdot \int y^2 \cdot e^y\ dy.$$

Das verbleibende Integral in y kann durch zweifache partielle Integration gelöst werden:

$$2 \cdot \int \underbrace{y^2}_{f(y)} \cdot \underbrace{e^y}_{g'(y)}\ dy = 2 \cdot \underbrace{y^2}_{f(y)} \cdot \underbrace{e^y}_{g(y)} - 2 \cdot \int \underbrace{2 \cdot y}_{f'(y)} \cdot \underbrace{e^y}_{g(y)}\ dy$$

$$= 2 \cdot y^2 \cdot e^y - 4 \cdot \int \underbrace{y}_{F(y)} \cdot \underbrace{e^y}_{G'(y)}\ dy = 2 \cdot y^2 \cdot e^y - 4 \cdot \underbrace{y}_{F(y)} \cdot \underbrace{e^y}_{G(y)} + 4 \cdot \int \underbrace{1}_{F'(y)} \cdot \underbrace{e^y}_{G(y)}\ dy$$

$$= 2 \cdot y^2 \cdot e^y - 4 \cdot y \cdot e^y + 4 \cdot e^y + c.$$

Rücksubstitution $y = \sqrt{x}$ liefert letztlich:

$$\int \sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}}\,dx = 2 \cdot x \cdot e^{\sqrt{x}} - 4 \cdot \sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}} + 4 \cdot e^{\sqrt{x}} + c.$$

8.1.4 Rationale Integranden: Partialbruchzerlegung

$\boxed{\downarrow 13.7.05}$

Rationale Integranden lassen sich über die Technik der „Partialbruchzerlegung“ immer so umformulieren, daß man eine Stammfunktion bestimmen kann. Hier der Spezialfall, wenn das Nennerpolynom nur einfache Nullstellen hat:

Satz 8.20: (Partialbruchzerlegung)

Betrachte $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit Polynomen $p(x)$ und $q(x)$, wobei $grad(p(x)) < grad(q(x))$ gelte. Hat das Nennerpolynom $q(x)$ nur einfache Nullstellen $x_1, \ldots, x_n$, so gibt es Konstanten $c_1, \ldots, c_n$, sodaß

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{c_1}{x - x_1} + \cdots + \frac{c_n}{x - x_n}.$$

Damit folgt dann

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} \, dx = c_1 \cdot \ln(|x - x_1|) + \cdots + c_n \cdot \ln(|x - x_n|) + c.$$

Beispiel 8.21: Die technische Durchführung geschieht folgendermaßen:
1) Ansatz:

$$\frac{3 \cdot x + 4}{(x-1) \cdot (x+2)} = \frac{c_1}{x-1} + \frac{c_2}{x+2}.$$

2) Bringe die rechte Seite auf den Hauptnenner:

$$\frac{c_1}{x-1} + \frac{c_2}{x+2} = \frac{c_1 \cdot (x+2) + c_2 \cdot (x-1)}{(x-1) \cdot (x+2)}$$

3) Ordne den Zähler nach Potenzen von x:

$$\frac{c_1 \cdot (x+2) + c_2 \cdot (x-1)}{(x-1) \cdot (x+2)} = \frac{(c_1 + c_2) \cdot x + (2 \cdot c_1 - c_2)}{(x-1) \cdot (x+2)}.$$

4) Der Ansatz lautet nun:

$$\frac{3 \cdot x + 4}{(x-1) \cdot (x+2)} = \frac{(c_1 + c_2) \cdot x + (2 \cdot c_1 - c_2)}{(x-1) \cdot (x+2)}.$$

Die Nenner stimmen nach Konstruktion überein. Es verbleibt, die Konstanten c_1, c_2 so zu bestimmen, daß auch die Zähler <u>für alle x</u> übereinstimmen. Vergleiche dazu im Zähler die Koeffizienten vor jeder x-Potenz:

$$3 = c_1 + c_2, \quad 4 = 2 \cdot c_1 - c_2.$$

4) Löse das entstandene lineare Gleichungssystem für die unbekannten Koeffizienten:

$$c_1 = \frac{7}{3}\,, \quad c_2 = \frac{2}{3}.$$

Ergebnis:

$$\int \frac{3 \cdot x + 4}{(x-1) \cdot (x+2)} \, dx = \int \Big(\frac{\frac{7}{3}}{x-1} + \frac{\frac{2}{3}}{x+2} \Big) \, dx = \frac{7}{3} \, \ln(|x-1|) + \frac{2}{3} \, \ln(|x+2|) + c.$$

Beispiel 8.22: In MuPAD ist die Funktion `partfrac` (engl.: partial fraction) für die Partialbruchzerlegung zuständig:

```
>> partfrac((3*x + 4) / ((x - 1)*(x + 2)), x)

               7           2
           --------- + ---------
           3 (x - 1)   3 (x + 2)
```

Bemerkung 8.23: *Die Partialbruchzerlegung haben wir schon früher beim Summieren rationaler Ausdrücke kennengelernt: siehe Beispiel 3.31.*

Bemerkung 8.24: *Hat man einen rationalen Integranden $\frac{p(x)}{q(x)}$, bei dem der Grad des Zählerpolynoms nicht kleiner ist als der Grad des Nennerpolynoms (dies wird in Satz 8.20 vorausgesetzt), so ist dies auch kein Problem. Durch Polynomdivision kann man einen polynomialen Anteil abspalten, z.B.:*

$$\frac{2 \cdot x^3 + x^2 + 2}{x^2 - 1} = 2 \cdot x + 1 \; + \; \frac{2 \cdot x + 3}{x^2 - 1}.$$

Die Division wird dabei wie mit Zahlen durchgeführt (man zieht sukzessiv den „führenden Term“ durch ein geeignetes Vielfaches des Nenners ab):

$$\begin{array}{rl}
2 \cdot x^3 + x^2 + 2 \quad & : \quad x^2 - 1 \quad = \quad 2 \cdot x + 1 \\
2 \cdot x^3 - 2 \cdot x \quad & \\
\hline
x^2 + 2 \cdot x + 2 & \\
x^2 - 1 & \\
\hline
2 \cdot x + 3 & \quad (\text{der Rest})
\end{array}$$

Der verbleibende Rest kann durch Partialbruchzerlegung additiv zerlegt werden, das Ergebnis ist:

```
>> partfrac((2*x^3 + x^2 + 2)/(x^2 -1), x)

                  5           1
       2 x + --------- - --------- + 1
             2 (x - 1)   2 (x + 1)
```

Es folgt

$$\int \frac{2 \cdot x^3 + x^2 + 2}{(x^2 - 1)} \, dx = \int \left(2 \cdot x + 1 \; + \; \frac{\frac{5}{2}}{x - 1} - \frac{\frac{1}{2}}{x + 1} \right) dx$$

$$= x^2 + x + \frac{5}{2} \, \ln(|x - 1|) - \frac{1}{2} \, \ln(|x + 1|) + c.$$

Probe mit MuPAD:

```
>> int((2*x^3 + x^2 + 2)/(x^2 -1), x)

                 2   5 ln(x - 1)   ln(x + 1)
            x + x  + ----------- - ---------
                          2            2
```

(MuPAD verzichtet darauf, innerhalb des `ln` *Betragszeichen einzutragen, denn MuPAD kann mit komplexen Zahlen umgehen. Für positives x gilt $\ln(-x) = \sqrt{-1}\cdot\pi + \ln(x)$, d.h., $\ln(-x)$ und $\ln(x)$ stimmen bis auf eine additive (komplexe) Konstante überein. Diese kann in die Integrationskonstante absorbiert werden).*

Bemerkung 8.25: *Für die Partialbruchzerlegung braucht man die Faktorisierung $q(x) = (x - x_1) \cdot \cdots \cdot (x - x_n)$ des Nennerpolynoms, d.h., man muß die Nullstellen $x_1, \ldots, x_n$ von $q(x)$ finden.*

8.2 Das bestimmte Integral

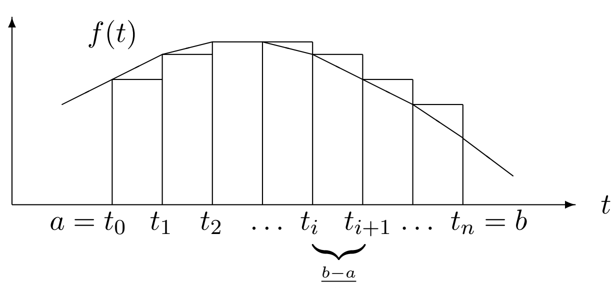
Die geometrische Interpretation eines bestimmten Integrals ist die Fläche unter einem Funktionsgraphen $f(t)$. Man zerlege ein Interval $[a, b]$ auf der t-Achse äquidistant in n Teilintervalle $[t_i, t_{i+1}]$ mit

$$t_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}\,, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Dann approximiere man den Flächeninhalt durch die Flächen der durch die Punkte

$$(t_i, 0), \quad (t_i, f(t_i)), \quad (t_{i+1}, f(t_i)), \quad (t_{i+1}, 0)$$

gegebenen Rechtecke (mit der Breite $\frac{b-a}{n}$):



Die Summe der n Rechteckflächen ist $\dfrac{b-a}{n} \cdot \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)$. Im Grenzwert $n \to \infty$ liefert dies die Fläche unter dem Graphen.

Definition 8.26: (Das bestimmte Integral)

Zu einer über dem Intervall $[a,b]$ definierten (hinreichend glatten, z.B. stetigen) Funktion $f(t)$ (dem **„Integranden“***) wird das* **„bestimmte Integral“** *über $[a,b]$ definiert als*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a + k\cdot\frac{b-a}{n}\Big)$$

(sofern dieser Grenzwert existiert).

Dies ist lediglich eine prinzipielle Definition, die zur Berechnung völlig ungeeignet ist. Die wirkliche Berechnung geschieht über Stammfunktionen von $f(t)$, sobald der Zusammenhang zwischen dem bestimmten Integral und dem unbestimmten Integral geklärt ist (nächster Abschnitt).

Bemerkung 8.27: *Das bestimmte Integral kann auch negative Werte annehmen (z.B., wenn überall $f(t) < 0$ gilt). Die Interpretation als „Fläche unter dem Graphen“ gilt nur für positive Funktionen.*

Bestimmte Integrale können additiv zerlegt werden. Man stelle sich dazu eine positive Funktion $f(t)$ vor, d.h., das Integral von a bis b ist die Fläche unter dem Graphen von $t = a$ bis $t = b$. Diese Fläche setzt sich zusammen aus der Fläche unter dem Graphen von $t = a$ bis $t = c$ und der Fläche von $t = c$ bis $t = b$, wobei der Zerlegungspunkt c beliebig gewählt werden kann:

Satz 8.28: (Zerlegung bestimmter Integrale)

Für beliebiges a, b, c gilt:

$$\int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Konvention 8.29:

Wir setzen

$$\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\ dt,$$

womit wir in $\int_a^b f(t)\ dt$ nun auch $b < a$ zulassen können. Speziell gilt

$$\int_a^a f(t)\,dt = -\int_a^a f(t)\ dt = 0.$$

Mit dieser Konvention gilt Satz 8.28 auch für Zerlegungspunkte c, die außerhalb des Intervalls $[a,b]$ liegen.

Bemerkung 8.30: *In MuPAD ist die Funktion* `int` *sowohl für bestimmte als auch für unbestimmte Integrale zuständig:*

```
>> int(exp(-2*x), x)
                              1
                      - ---------
                                2
                        2 exp(x)

>> int(exp(-2*t), t = 0..5)
                                 1
                    1/2 - ---------
                                   2
                          2 exp(5)

>> float(%)
                        0.4999773
```

Bemerkung 8.31: *Man beachte, daß das unbestimmte Integral $\int f(x)\,dx$ eine Funktion in x ist, während das bestimmte Integral $\int_a^b f(t)\,dt$ für konkrete Zahlenwerte a, b einen Zahlenwert darstellt. Diesen kann man numerisch approximieren, indem man z.B. die in der Definition 8.26 gegebene Summe für großes n ausrechnet. Alternativ zur „Riemann-Summe“*

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\Big)$$

ist es günstiger, stattdessen die „Trapez-Summe“

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\Big(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\Big) + \frac{f(b)}{2} \right)$$

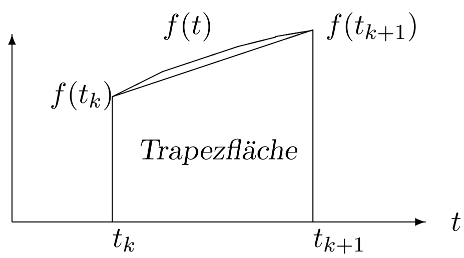
zu berechnen, die sich mit $t_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$ auch als

$$\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(t_k) + f(t_{k+1})}{2}$$

schreiben läßt. Hierbei ist $\frac{b-a}{n} \cdot \frac{f(t_k)+f(t_{k+1})}{2}$ die Fläche des durch die 4 Punkte

$$(t_k, 0), \quad (t_k, f(t_k)), \quad (t_{k+1}, f(t_{k+1})), \quad (t_{k+1}, 0)$$

definierten Trapezes (d.h., die Fläche unter dem Graphen von $f(t)$ wird nicht durch Rechtecke, sondern durch Trapeze angenähert).



Bemerkung 8.32: *In MuPAD ist die Funktion* `numeric::int` *für die numerische Berechnung von bestimmten Integralen zuständig. Sie arbeitet auch dann, wenn der symbolische Integrator kein Ergebnis liefert (weil er keine Stammfunktion findet):*

```
>> int(exp(sqrt(t))*sqrt(t), t = 0..10)

                   1/2       1/2
              int(t    exp(t   ), t = 0..10)

>> numeric::int(exp(sqrt(t))*sqrt(t), t = 0..10)

                         264.1573027
```

8.3 Der Hauptsatz: Zusammenhang zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral

Es verbleibt das Problem, wie man effektiv bestimmte Integrale $\int_a^b f(t)\,dt$ ohne den garstigen Grenzwert von Riemann–Summen berechnen kann. Hier kommt die wesentliche Beobachtung ins Spiel, daß man mit unbestimmten Integralen (Stammfunktionen) bestimmte Integrale ausrechnen kann.

Satz 8.33: (Der Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung, Version 1)
Betrachte

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\ dt.$$

Für stetiges f ist F_a differenzierbar, und es gilt

$$\frac{d}{dx} F_a(x) = f(x),$$

d.h., $F_a(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$.

„Beweisidee“: Es gilt

$$\Delta F_a = F_a(x+h) - F_a(x) = \int_a^{x+h} f(t)\ dt - \int_a^x f(t)\ dt \stackrel{(8.28)}{=} \int_x^{x+h} f(t)\ dt.$$

Nähern wir auf dem (kleinen) Interval $[x, x+h]$ die Funktion durch den konstanten Wert $f(t) \approx f(x)$ an, so gilt

$$\Delta F_a = \int_x^{x+h} f(t)\ dt \approx \int_x^{x+h} f(x)\ dt = \lim_{n\to\infty} \frac{h}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(x)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{h}{n} \cdot f(x) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{h}{n} \cdot f(x) \cdot n = \lim_{n\to\infty} h \cdot f(x) = h \cdot f(x).$$

Damit läßt sich die Ableitung von $F_a(x)$ berechnen:

$$\frac{d}{dx} F_a(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h \cdot f(x)}{h} = f(x).$$

$\square$

Bemerkung 8.34: *Stammfunktionen sind nur bis auf additive Konstanten bestimmt. Dies wird in der Darstellung einer Stammfunktion über $F_a(x) = \int_a^x f(t)\ dt$ dadurch deutlich, daß die untere Grenze a beliebig wählbar ist. Die Konstante ist hier durch die Bedingung $F_a(a) = \int_a^a f(t)\ dt = 0$ festgelegt. Bei unterschiedlicher Wahl der unteren Grenze ist die Differenz der entsprechenden Stammfunktionen in der Tat eine Konstante:*

$$F_{a_1}(x) - F_{a_2}(x) = \int_{a_1}^x f(t)\ dt - \int_{a_2}^x f(t)\ dt$$

$$\stackrel{(8.28)}{=} \left(\int_{a_1}^{a_2} f(t)\ dt + \int_{a_2}^x f(t)\ dt\right) - \int_{a_2}^x f(t)\ dt = \underbrace{\int_{a_1}^{a_2} f(t)\ dt.}_{\textit{unabhängig von } x}$$

Bestimmte Integrale sind also Stammfunktionen, wenn man sie als Funktion der oberen Grenze auffasst. Umgekehrt, kennt man ein Stammfunktion, so liefert sie ein bestimmtes Integral, denn alle Stammfunktionen $F(x)$ von $f(x)$ unterscheiden sich nur um eine additive Konstante, d.h., es muss gelten

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\ dt = F(x) + c.$$

Es verbleibt nur, die Integrationskonstante c zu identifizieren. Für $x = a$ folgt

$$0 = \int_a^a f(t)\ dt = F(a) + c \quad \Rightarrow \quad c = -F(a),$$

also
$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$
Dies liefert nun eine effektive Methode, bestimmte Integrale auszurechnen, indem man sich zunächst eine Stammfunktion des Integranden verschafft:

Satz 8.35: (Der Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung, Version 2)
Sei $F(x)$ eine beliebige stetige Stammfunktion von $f(x)$. Dann gilt
$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Die additive Konstante der Stammfunktion fällt dabei bei Differenzbildung heraus.

Beispiel 8.36: Zur Berechnung von $\int_1^2 \ln(t)\,dt$ berechnet man zunächst eine Stammfunktion von $\ln(x)$. Analog zu Beispiel 8.11 ergibt sich durch partielle Integration:
$$\int \ln(x)\,dx = \int \underbrace{\ln(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{1}_{g'(x)}\,dx = \underbrace{\ln(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'(x)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)}\,dx$$
$$= x \cdot \ln(x) - \int 1\,dx = x \cdot \ln(x) - x + c.$$
Mit der Stammfunktion $F(x) = x \cdot \ln(x) - x + c$ ergibt sich das bestimmte Integral
$$\int_1^2 \ln(t)\,dt = F(2) - F(1) = \Big(2 \cdot \ln(2) - 2 + c\Big) - \Big(1 \cdot \ln(1) - 1 + c\Big) = 2 \cdot \ln(2) - 1.$$

Bemerkung 8.37: *Aus dem Zusammenhang mit dem unbestimmten Integral folgt sofort, daß die Rechenregeln aus Abschnitt 8.1 auch für bestimmte Integrale gelten, z.B. (Satz 8.7):*
$$\boxed{\int_a^b \Big(c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t)\Big)dt = c_1 \cdot \int_a^b f_1(t)\,dt \;+\; c_2 \cdot \int_a^b f_2(t)\,dt.}$$
Partielle Integration gilt in der folgenden Form:
$$\boxed{\int_a^b f(t) \cdot g'(t)\,dt = \Big[f(t) \cdot g(t)\Big]_{t=a}^{t=b} \;-\; \int_a^b f'(t) \cdot g(t)\,dt,}$$
wobei $\Big[f(t) \cdot g(t)\Big]_{t=a}^{t=b}$ als Abkürzung für
$$\Big[f(t) \cdot g(t)\Big]_{t=a}^{t=b} = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a)$$
dient. Substitution gilt in der folgenden Form:

$$\boxed{\int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\, dy.}$$

Beispiel 8.38: Partielle Integration:

$$\int_0^1 \underbrace{t}_{f(t)} \cdot \underbrace{\cos(t)}_{g'(t)}\ dt = \Big[\underbrace{t}_{f(t)} \cdot \underbrace{\sin(t)}_{g(t)}\Big]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 \underbrace{1}_{f'(t)} \cdot \underbrace{\sin(t)}_{g(t)}\ dt$$

$$= \Big[t \cdot \sin(t)\Big]_{t=0}^{t=1} - \Big[-\cos(t)\Big]_{t=0}^{t=1}$$

$$= 1 \cdot \sin(1) - 0 \cdot \sin(0) + \cos(1) - \cos(0) = \sin(1) + \cos(1) - 1.$$

Beispiel 8.39: Substitution $y = t^2$, $dy = 2\, t\, dt$:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} t\ \cos(t^2)\ dt = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\sqrt{\pi}} \cos(t^2) \cdot \underbrace{2\, t\, dt}_{dy} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi} \cos(y)\ dy$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \Big[\sin(y)\Big]_{y=0}^{y=\pi} = \frac{1}{2} \cdot \Big(\sin(\pi) - \sin(0)\Big) = 0.$$

Man beachte hierbei, wie sich im Substitutionsschritt die Grenzen ändern: Für $t = 0$ folgt $y = t^2 = 0$, für $t = \sqrt{\pi}$ folgt $y = t^2 = \pi$.

8.4 Uneigentliche Integrale

Bestimmte Integrale $\int_a^b f(t)\ dt$ sind zunächst nur für endliche Intervalle $[a, b]$ definiert. Wir erweitern die Definition:

Definition 8.40: (Uneigentliche Integrale)

$$\int_a^{\infty} f(t)\ dt = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(t)\ dt,$$

$$\int_{-\infty}^b f(t)\ dt = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(t)\ dt,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ dt = \lim_{a \to -\infty} \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(t)\ dt$$

(falls die Grenzwerte existieren).

Beispiel 8.41:

$$\int_0^\infty e^{-t}\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-t}\,dt = \lim_{b\to\infty}\Big[-e^{-t}\Big]_{t=0}^{t=b} = \lim_{b\to\infty}(-e^{-b}+1) = 1 - \lim_{b\to\infty} e^{-b} = 1.$$

Beispiel 8.42: Substitution $y = -\sqrt{t}$, $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2\cdot\sqrt{t}} = \frac{1}{2\cdot y}$, $dt = 2\cdot y\cdot dy$:

$$\frac{1}{2}\cdot\int_0^\infty e^{-\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\int_0^{-\infty} e^y\cdot 2\cdot y\,dy \overset{(8.29)}{=} -\int_{-\infty}^0 e^y\cdot y\,dy.$$

Man achte hierbei auf die Transformation der Grenzen: $t=0$ entspricht $y=-\sqrt{t}=0$, $t=\infty$ entspricht $y=-\sqrt{t}=-\infty$. Das verbleibende Integral war bereits in Beispiel 8.12 gelöst worden:

$$-\int_{-\infty}^0 e^y\cdot y\,dy = -\lim_{a\to-\infty}\Big[(y-1)\cdot e^y\Big]_{y=a}^{y=0}$$
$$= -\lim_{a\to-\infty}\Big(-1-(a-1)\cdot e^a\Big) = 1 - \lim_{a\to-\infty}\Big((1-a)\cdot e^a\Big).$$

Der verbleibende Grenzwert ist 0:

$$\lim_{a\to-\infty}\Big((1-a)\cdot e^a\Big) \overset{(b=-a)}{=} \lim_{b\to\infty}\Big((1+b)\cdot e^{-b}\Big) = \lim_{b\to\infty}\Big(\frac{b+1}{e^b}\Big).$$

Da mit $e^b = 1+b+\frac{b^2}{2}+\cdots$ die Exponentialfunktion für $b\to\infty$ stärker steigt als jedes Polynom, ist der Grenzwert 0. Endergebnis:

$$\frac{1}{2}\cdot\int_0^\infty e^{-\sqrt{t}}\,dt = 1.$$

Man geht ähnlich vor, wenn der Integrand eine Singularität hat:

Definition 8.43: (Uneigentliche Integrale bei singulären Integranden)

Hat der Integrand $f(t)$ an der Stelle a oder b eine Singularität, so definiert man

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\epsilon\to0+0}\int_a^{b-\epsilon} f(t)\,dt,$$

bzw.

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\epsilon\to0+0}\int_{a+\epsilon}^b f(t)\,dt$$

(falls die Grenzwerte existieren).

Beispiel 8.44: Im folgenden Fall existiert das uneigentliche Integral:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \lim_{\epsilon\to 0+0} \int_\epsilon^1 t^{-\frac{1}{2}}\, dt = \lim_{\epsilon\to 0+0} \left[\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{t=\epsilon}^{t=1}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0+0} \left[2\cdot\sqrt{t}\right]_{t=\epsilon}^{t=1} = 2\cdot \lim_{\epsilon\to 0+0}\left(1-\sqrt{\epsilon}\right) = 2.$$

Beispiel 8.45: Im folgenden Fall existiert das uneigentliche Integral nicht (bzw. ist ∞):

$$\int_0^1 \frac{1}{t}\, dt = \lim_{\epsilon\to 0+0} \int_\epsilon^1 \frac{1}{t}\, dt = \lim_{\epsilon\to 0+0} \left[\ln(t)\right]_{t=\epsilon}^{t=1} = \lim_{\epsilon\to 0+0}\left(0-\ln(\epsilon)\right) = \infty.$$

8.5 Einige spezielle Anwendungen

Satz 8.46: (logarithmische Divergenz der harmonischen Reihe)

Die Folge $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ *konvergiert monoton falled gegen einen Grenzwert*

$C \approx 0.5772...$ *(die* **„Eulersche Konstante"***):* $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \approx \ln(n) + C.}$

Beweis: Sei $C_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$. Mit

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx = \ln(k+1) - \ln(k)$$

gilt

$$C_n > \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\, dx = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\right) dx = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) dx > 0,$$

denn für die monoton fallende Funktion $\frac{1}{x}$ gilt $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{x}$ auf dem Intervall $[k, k+1]$. Weiterhin gilt

$$C_n - C_{n+1} = \Big(\ln(n+1) - \ln(n)\Big) - \frac{1}{n+1} = \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{n+1}$$

$$= \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{n+1}\right) dx \geq 0,$$

denn es gilt $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{n+1}$ für $x \in [n, n+1]$. Damit ist die Folge (C_n) monoton fallend und nach unten beschränkt. Sie konvergiert also gegen einen Grenzwert C.

Q.E.D.

Als weitere „Anwendung" der Integration versuchen wir, realistische Abschätzungen von $n!$ für $n \gg 1$ zu ermitteln. Zunächst beobachtet man

$$\ln(n!) = \ln(1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot n) = \ln(1)+\ln(2)+\ln(3)+\cdots+\ln(n) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k).$$

Diese Summe läßt sich als Riemann–Summe interpretieren, die bei

$$\int_1^n \ln(x)\,dx = \Big[x \cdot (\ln(x) - 1)\Big]_{x=1}^{x=n} = n \cdot \ln(n) - n + 1$$

anfällt, wenn man das Integrationsintervall $[1, n]$ in die $n-1$ Teilintervalle $[1, 2]$, $[2, 3]$, ..., $[n-1, n]$ zerlegt. Wegen der Monotonie von $\ln(x)$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) \leq \int_1^n \ln(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \ln(x)\,dx \leq \sum_{k=2}^{n} \ln(k),$$

also

$$\ln((n-1)!) \leq n \cdot \ln(n) - n + 1 \leq \ln(n!),$$

also

$$(n-1)! \leq n^n \cdot e^{-n+1} \leq n!,$$

also (in der linken Ungleichung wird n durch $n+1$ ersetzt):

$$n^n \cdot e^{-n+1} \leq n! \leq (n+1)^{n+1} \cdot e^{-n},$$

also

$$\boxed{e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e \cdot \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.}$$

Hiermit ist das Wachstumsverhalten von $n!$ charakterisiert. Diese Abschätzung läßt sich jedoch noch wesentlich verfeinern:

Satz 8.47: (Die Stirling–Formel)

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt folgende Abschätzung von $n!$:

$$\sqrt{2 \cdot \pi \cdot n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{1}{4 \cdot n}}.$$

Für großes n gilt $e^{\frac{1}{4 \cdot n}} = 1 + \frac{1}{4 \cdot n} + \cdots \approx 1$, d.h., das Verhältnis der oberen Schranke zur unteren Schranke ist für großes n dicht bei 1 (d.h., die führenden Stellen der oberen und unteren Schranke sind gleich und stimmen mit den führenden Stellen von $n!$ überein).

Merke:

$$\boxed{n! \approx \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n.}$$

Diese **„Stirling-Approximation"** *für $n!$ ist schon ab $n = 4$ auf etwa 2 Prozent genau! Beispiel:*

n	$\sqrt{2 \cdot \pi \cdot n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$	$n!$	$\sqrt{2 \cdot \pi \cdot n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{1}{4 \cdot n}}$
2	1.9...	2	2.1...
5	118.0...	120	124.0...
10	3598695.6...	3628800	3689797.0...

Beweis: (für technisch Interessierte)
Es ist zu zeigen:

$$\sqrt{2 \cdot \pi} \leq \frac{n!}{\sqrt{n} \cdot (\frac{n}{e})^n} = \underbrace{\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n}}}_{a_n} \leq \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot e^{\frac{1}{4 \cdot n}}$$

Wir zeigen zunächst, dass die Folge

$$a_n = \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n}}$$

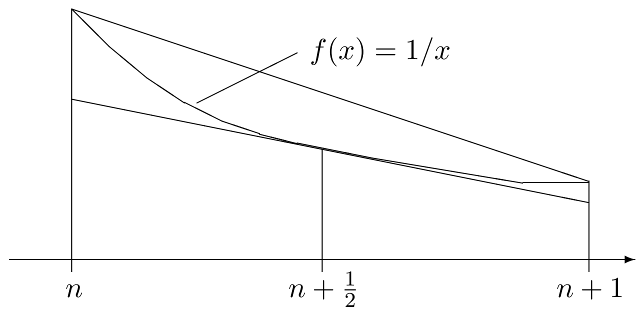
konvergiert. Für die Quotienten aufeinander folgender Elemente bekommt man

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{e} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

und damit

$$\ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1. \qquad (\#)$$

Betrachte die Integration der Funktion $f(x) = 1/x$ über dem Intervall $[n, n+1]$:



Das Integral wird nach oben abgeschätzt durch das Trapez durch die Punkte $(n, f(n))$ und $(n+1, f(n+1))$. Die Trapezfläche ist *Breite* $\times$ *mittlere Höhe* $= \frac{1}{2} \cdot (f(n) + f(n+1))$:

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, dx \ = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) \leq \frac{1}{2} \cdot \Big(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\Big).$$

Das Integral wird nach unten abgeschätzt durch das Trapez, dessen obere Kante die Tangente an $f(x)$ im Mittelpunkt ist. Die Trapezfläche ist *Breite* $\times$ *mittlere Höhe* $= f(n + \frac{1}{2})$:

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, dx \ = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) \geq \frac{1}{n + \frac{1}{2}}.$$

Diese Abschätzungen liefern die Ungleichungskette

$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}} \leq \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) \leq \frac{1}{2} \cdot \Big(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\Big),$$

also

$$1 \leq \Big(n + \frac{1}{2}\Big) \cdot \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) \leq \Big(n + \frac{1}{2}\Big) \cdot \frac{1}{2} \cdot \Big(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\Big),$$

also

$$0 \leq \Big(n + \frac{1}{2}\Big) \cdot \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) - 1 \leq \Big(n + \frac{1}{2}\Big) \cdot \frac{1}{2} \cdot \Big(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\Big) - 1$$

$$= \frac{1/4}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{4} \cdot \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big).$$

Eingesetzt in (#) erhält man:

$$0 \leq \ln\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}}\Big) \leq \frac{1}{4} \cdot \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big),$$

also

$$1 \leq \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq e^{\frac{1}{4 \cdot n}} \cdot e^{-\frac{1}{4 \cdot (n+1)}}.$$

Es folgt

$$1 \le \frac{a_n}{a_{n+k}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n+k-1}}{a_{n+k}}$$

$$\le e^{\frac{1}{4\cdot n}} \cdot e^{-\frac{1}{4\cdot(n+1)}} \cdot e^{\frac{1}{4\cdot(n+1)}} \cdot e^{-\frac{1}{4\cdot(n+2)}} \cdot \ldots \cdot e^{\frac{1}{4\cdot(n+k-1)}} \cdot e^{-\frac{1}{4\cdot(n+k)}}$$

$$= e^{\frac{1}{4\cdot n}} \cdot e^{-\frac{1}{4\cdot(n+k)}} \le e^{\frac{1}{4\cdot n}}$$

für alle $k \ge 1$. Für fixiertes n ist die Folge (a_{n+k}) (im Folgenindex k) damit monoton fallend und nach unten beschränkt, d.h., es existiert der Grenzwert $a^* = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n+k} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, für den gilt:

$$1 \le \frac{a_n}{a^*} \le e^{\frac{1}{4\cdot n}} \quad \Rightarrow \quad a^* \le a_n \le a^* \cdot e^{\frac{1}{4\cdot n}}.$$

Es verbleibt damit lediglich, $a^* = \sqrt{2\cdot\pi}$ zu zeigen. Das ist wesentlich aufwendiger, und wir verzichten hier darauf.

Q.E.D.