Kapitel 8

Integration

8.1 Stammfunktionen: das unbestimmte Integral

Die Integration ist die Umkehrung der Differentiation: zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ sucht man eine Funktion $F(x)$, deren Ableitung $f(x)$ ist.

8.1.1 Definitionen, Grundintegrale

Definition 8.1: (Stammfunktion)

$F(x)$ heißt **„Stammfunktion“** *einer (hinreichend glatten) Funktion $f(x)$, wenn $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ gilt. Alternativ nennt man $F(x)$ auch das* **„unbestimmte Integral über** *$f(x)$“ und benutzt auch die Notation $F(x) = \int f(x)\,dx$. Die Funktion $f(x)$ unter dem Integralzeichen wird als* **„Integrand“** *bezeichnet.*

Bemerkung 8.2: *Stammfunktionen sind nicht eindeutig bestimmt. Da die Ableitung einer konstanten Funktion überall 0 ist, kann man zu einer Stammfunktion eine beliebige Konstante hinzuaddieren, wobei man eine neue Stammfunktion erhält. Andererseits, hat $f(x)$ keine Singularitäten (Polstellen etc.), so sind Stammfunktionen stetig und die Differenz zweier stetiger Stammfunktionen ist immer eine Konstante.*

Beispiel 8.3: Zu $f(x) = x$ sind $F_1(x) = \frac{x^2}{2}$ und $F_2(x) = \frac{x^2}{2} + 17$ Stammfunktion. Die beliebige additive Konstante in Stammfunktionen (die **„Integrationskonstante“**) wird folgendermaßen ausgedrückt:

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c.$$

Damit ist gemeint: $\int f(x)\,dx$ stellt die Klasse **aller** Stammfunktionen dar (d.h., in der Schreibweise $\int f(x)\,dx$ steckt die additive Konstante sozusagen im $\int$-Symbol und

braucht nicht explizit hingeschrieben zu werden). Sobald das Integralzeichen durch einen konkreten Repräsentanten dieser Klasse (hier $\frac{x^2}{2}$) ersetzt wird, schreiben wir die beliebige additive Konstante explizit dazu.

Bemerkung 8.4: *Mit dieser Konvention gilt trivialerweise für jede differenzierbare Funktion $F(x)$:*

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + c\ .$$

Grundintegrale 8.5:

Aus der in Satz 6.6 gegebenen (kleinen) Liste von Ableitungen erhält man eine (kleine) Liste von Stammfunktionen für die einfachen Grundfunktionen:

$$\begin{aligned}
\int x^n\,dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \qquad (n \neq -1)\\
\int \frac{1}{x}\,dx &= \ln(|x|) + c, \qquad \textit{(Beispiel 6.18)}\\
\int e^x\,dx &= e^x + c,\\
\int \sin(x)\,dx &= -\cos(x) + c,\\
\int \cos(x)\,dx &= \sin(x) + c.
\end{aligned}$$

Beispiel 8.6: In MuPAD ist die Funktion `int` (engl.: integrate) für die Integration zuständig. Für die Integrationskonstante wird dabei vom System automatisch ein „besonders einfacher“ Wert gewählt:

```
>> int(cos(x), x)
                              sin(x)

>> int(x*sin(x)*exp(x), x)

       cos(x) exp(x)   x cos(x) exp(x)   x sin(x) exp(x)
       ------------- - --------------- + ---------------
             2                2                 2
```

Für aus den einfachen Grundfunktionen aufgebaute Funktionen würde man gern per Rechenregeln die Integration komplizierter Funktionen auf die Integration einfacher Funktionen zurückführen. Leider ist das nicht so einfach. In der Tat entspricht jeder Rechenregel der Differentiation (Satz 6.6, Satz 6.12) eine Regel für's Integrieren. Die sich ergebenden Regeln sind aber nicht so, daß man damit automatisch alle Integrationen auf Grundintegrale zurückführen kann. Zunächst die einfachsten Regeln:

Satz 8.7: (Summenregel)

Für beliebige Konstanten a, b und Funktionen $f(x)$, $g(x)$ gilt

$$\int \Big(a \cdot f(x) + b \cdot g(x)\Big) dx = a \cdot \int f(x)\, dx \;+\; b \cdot \int g(x)\, dx.$$

Das ist durch Differenzieren beider Seiten dieser Gleichung unmittelbar klar.
Merke:

Konstante Faktoren können stets aus dem Integralzeichen herausgezogen werden. Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale.

Beispiel 8.8:

$$\int \Big(2 \cdot e^x + \frac{1}{\sqrt{2}\,x}\Big)\, dx = 2 \cdot \int e^x\, dx + \int \frac{1}{\sqrt{2}}\; x^{-\frac{1}{2}} dx = 2 \cdot e^x + c_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \int x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= 2 \cdot e^x + c_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c_2 = 2 \cdot e^x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \underbrace{c_1 + c_2}_{c}$$

$$= 2 \cdot e^x + \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x} + c = 2 \cdot e^x + \sqrt{2} \cdot \sqrt{x} + c.$$

Hierbei wurden die einzelnen Integrationskonstanten c_1, c_2 zu einer neuen beliebigen Konstanten $c = c_1 + c_2$ zusammengefaßt.

8.1.2 Partielle Integration

Aus der Produktregel

$$\frac{d}{dx}\Big(f(x) \cdot g(x)\Big) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

der Differentiation gewinnt man durch Integration

$$f(x) \cdot g(x) + c = \int f'(x) \cdot g(x)\, dx \;+\; \int f(x) \cdot g'(x)\, dx.$$

Diese Gleichung liefert eine Integrationsregel, die man **„partielle Integration“** nennt:

Satz 8.9: (Partielle Integration)

$$\boxed{\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) \;-\; \int f'(x)\cdot g(x)\,dx.}$$

12.7.05↓ **Bemerkung 8.10:** *Diese Regel ist in folgender Situation anwendbar:*

- *Der Integrand muß das Produkt zweier Funktionen sein.*
- *Von einem Faktor ($g'(x)$) muß man die Stammfunktion $g(x)$ kennen.*

Ein Integral (über $f(x)\cdot g'(x)$) wird in ein anderes Integral (über $f'(x)\cdot g(x)$) überführt, es verbleibt also die Aufgabe, eine Stammfunktion zu finden. Allerdings ist manchmal das Produkt $f'(x)\cdot g(x)$ einfacher zu integrieren als das Ausgangsprodukt $f(x)\cdot g'(x)$:

- *Sinnvoll ist partielle Integration meist, wenn die Ableitung $f'(x)$ „einfacher“ ist als $f(x)$ und $g(x)$ nicht wesentlich „komplizierter“ als $g'(x)$.*

Beispiel 8.11: Im Integral $\int x\cdot\ln(x)\,dx$ ist $f(x)=\ln(x)$ eine „unangenehme“ Funktion, während $f'(x)=\frac{1}{x}$ als rationale Funktion wesentlich angenehmer ist:

$$\int \underbrace{x}_{g'(x)}\cdot\underbrace{\ln(x)}_{f(x)}\,dx = \underbrace{\ln(x)}_{f(x)}\cdot\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{g(x)} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'(x)}\cdot\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{g(x)}\,dx$$

$$= \ln(x)\cdot\frac{x^2}{2} - \int\frac{x}{2}\,dx = \ln(x)\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + c\ .$$

Probe:

$$\frac{d}{dx}\Big(\ln(x)\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + c\Big) = \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2} + \ln(x)\cdot x - \frac{x}{2} = \ln(x)\cdot x.$$

Es gibt keine allgemeine Regel, was „einfach“ und was „kompliziert“ ist. Im obigen Fall war $f'(x)=\frac{1}{x}$ einfacher als $f(x)=\ln(x)$. Im folgenden Beispiel ist $f(x)=x$ „kompliziert“, zumindestens „komplizierter“ als $f'(x)=1$:

Beispiel 8.12:

$$\int \underbrace{x}_{f(x)}\cdot\underbrace{e^x}_{g'(x)}\,dx = \underbrace{x}_{f(x)}\cdot\underbrace{e^x}_{g(x)} - \int \underbrace{1}_{f'(x)}\cdot\underbrace{e^x}_{g(x)}\,dx$$

$$= x\cdot e^x - \int e^x\,dx = x\cdot e^x - e^x + c = (x-1)\cdot e^x + c.$$

Manchmal braucht man einfach Erfahrung um zu sehen, daß partielle Integration hilfreich ist:

Beispiel 8.13:

$$\int \sin(x)^2\,dx = \int \underbrace{\sin(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g'(x)}\,dx = \underbrace{\sin(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{g(x)} - \int \underbrace{\cos(x)}_{f'(x)} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{g(x)}\,dx$$

$$= -\sin(x)\cdot\cos(x) + \int \cos(x)^2\,dx.$$

Das war bislang nicht sehr erfolgreich: $\int \sin(x)^2\,dx$ wurde durch $\int \cos(x)^2\,dx$ ausgedrückt. Allerdings gilt $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$, sodaß das verbleibende Integral wiederum durch das Ausgangsintegral ausgedrückt werden kann:

$$\int \cos(x)^2\,dx = \int 1\,dx - \int \sin(x)^2\,dx = x - \int \sin(x)^2\,dx.$$

Dies liefert eine Gleichung für $\int \sin(x)^2\,dx$:

$$\begin{aligned}
\int \sin(x)^2\,dx &= -\sin(x)\cdot\cos(x) + \int \cos(x)^2\,dx \\
&= -\sin(x)\cdot\cos(x) + x - \int \sin(x)^2\,dx \\
\Rightarrow\quad 2\cdot\int \sin(x)^2\,dx &= x - \sin(x)\cdot\cos(x) + c \\
\Rightarrow\quad \int \sin(x)^2\,dx &= \frac{1}{2}\cdot\Big(x - \sin(x)\cdot\cos(x)\Big) + \tilde{c}
\end{aligned}$$

(mit einer neuen Integrationskonstante $\tilde{c} = c/2$).

8.1.3 Substitution

Aus der Kettenregel der Differentiation (mit $y = g(x)$)

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = \Big(\frac{d}{dy}\,F(y)\Big)\cdot\Big(\frac{d}{dx}\,g(x)\Big) = F'(g(x))\cdot g'(x)$$

gewinnt man durch Integration

$$F(g(x)) + c = \int F'(g(x))\cdot g'(x)\,dx.$$

Diese Gleichung liefert mit $f = F'$ eine Integrationsregel, die man **„Integration durch Substitution“** nennt:

Satz 8.14: (Substitution)

Sie $F(y)$ eine Stammfunktion von $f(y)$. Mit $y = g(x)$ gilt

$$\boxed{\int f(g(x))\cdot \underbrace{g'(x)\,dx}_{dy} = \int f(y)\,dy = F(y) + c = F(g(x)) + c.}$$

Hierbei läuft die Substitution auf Folgendes hinaus. Aus $y = g(x)$ folgt $\frac{dy}{dx} = g'(x)$, also formal

$$dy = g'(x)\,dx.$$

Eine Substitution bietet sich auf jeden Fall an, wenn der Integrand einen Faktor $g'(x)$ enthält, der die Ableitung eines Teilausdrucks $g(x)$ im anderen Faktor ist:

Beispiel 8.15: In $\int \cos(x) \cdot e^{\sin(x)}\,dx$ bietet es sich an, $y = g(x) = \sin(x)$ zu substituieren, denn die Ableitung $g'(x) = \cos(x)$ taucht als Faktor im Integranden auf. Es ergibt sich

$$\int \cos(x) \cdot e^{\sin(x)}\,dx = \int e^{\overbrace{\sin(x)}^{y=g(x)}} \underbrace{\cos(x)\,dx}_{g'(x)\cdot dx = dy} = \int e^y\,dy = e^y + c = e^{\sin(x)} + c.$$

Beispiel 8.16: Wir kennen $\int \frac{1}{y}\,dy = \ln(|y|)$. Wie steht es mit $\int \frac{1}{a\cdot x+b}\,dx$? Dies ist ein Fall für die Substitution. Wir setzen $y = g(x) = a \cdot x + b$ (also $dy = a\,dx$) und erweitern mit a, sodaß $dx = \frac{1}{a} \cdot a\,dx = \frac{1}{a}\,dy$ auftaucht:

$$\int \frac{1}{a \cdot x + b}\,dx = \frac{1}{a} \cdot \int \frac{1}{a \cdot x + b} \cdot \overbrace{\underbrace{a}_{g'(x)}\,dx}^{dy} = \frac{1}{a} \int \frac{1}{y}\,dy$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \ln(|y|) + c = \frac{1}{a} \cdot \ln(|a \cdot x + b|) + c.$$

Beispiel 8.17: In $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx$ bietet sich die Substitution $y = g(x)$ an:

$$\boxed{\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \int \frac{1}{y}\,dy = \ln(|y|) + c = \ln(|g(x)|) + c.}$$

Bemerkung 8.18: *Es bietet sich allgemein an, eine Substitution $y = g(x)$ in einem Integral $\int h(x)\,dx$ technisch folgendermaßen durchzuführen:*

- *Setze $y = g(x)$ und berechne die Ableitung $\frac{dy}{dx} = g'(x)$. Formal gilt $dy = g'(x)\,dx$.*
- *Ersetze dx durch $\frac{dy}{g'(x)}$. Drücke im neuen Integranden $h(x)\,dx = \frac{h(x)}{g'(x)}\,dy$ jedes x durch y aus.*

- *Es entsteht ein Ausdruck*

$$\int h(x)\,dx = \int \underbrace{h(x(y)) \cdot \frac{1}{g'(x(y))}}_{f(y)}\,dy = \int f(y)\,dy.$$

  Versuche, eine Stammfunktion $F(y) = \int f(y)\,dy$ zu finden.

- **„Rücksubstitution“**: *Setze $y = g(x)$ in $F(y)$ ein. Die gesuchte Stammfunktion des ursprünglichen Ausdrucks ist $F(g(x))$.*

Manchmal ist es nicht offensichtlich, was man substituieren sollte. Hier hilft nur Erfahrung oder ein guter Tip:

Beispiel 8.19: Substituiere $y = \sqrt{x}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$ ($\Rightarrow\ dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$) in

$$\int \sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}}\,dx = \int y \cdot e^y \cdot \underbrace{2 \cdot \sqrt{x}\,dy}_{dx} = 2 \cdot \int y^2 \cdot e^y\,dy.$$

Das verbleibende Integral in y kann durch zweifache partielle Integration gelöst werden:

$$2 \cdot \int \underbrace{y^2}_{f(y)} \cdot \underbrace{e^y}_{g'(y)}\,dy = 2 \cdot \underbrace{y^2}_{f(y)} \cdot \underbrace{e^y}_{g(y)} - 2 \cdot \int \underbrace{2 \cdot y}_{f'(y)} \cdot \underbrace{e^y}_{g(y)}\,dy$$

$$= 2 \cdot y^2 \cdot e^y - 4 \cdot \int \underbrace{y}_{F(y)} \cdot \underbrace{e^y}_{G'(y)}\,dy = 2 \cdot y^2 \cdot e^y - 4 \cdot \underbrace{y}_{F(y)} \cdot \underbrace{e^y}_{G(y)} + 4 \cdot \int \underbrace{1}_{F'(y)} \cdot \underbrace{e^y}_{G(y)}\,dy$$

$$= 2 \cdot y^2 \cdot e^y - 4 \cdot y \cdot e^y + 4 \cdot e^y + c.$$

Rücksubstitution $y = \sqrt{x}$ liefert letztlich:

$$\int \sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}}\,dx = 2 \cdot x \cdot e^{\sqrt{x}} - 4 \cdot \sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}} + 4 \cdot e^{\sqrt{x}} + c.$$

8.1.4 Rationale Integranden: Partialbruchzerlegung

↓13.7.05

Rationale Integranden lassen sich über die Technik der „Partialbruchzerlegung“ immer so umformulieren, daß man eine Stammfunktion bestimmen kann. Hier der Spezialfall, wenn das Nennerpolynom nur einfache Nullstellen hat:

Satz 8.20: (Partialbruchzerlegung)

Betrachte $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ *mit Polynomen* $p(x)$ *und* $q(x)$*, wobei* $grad(p(x)) < grad(q(x))$ *gelte. Hat das Nennerpolynom* $q(x)$ *nur einfache Nullstellen* $x_1, \ldots, x_n$*, so gibt es Konstanten* $c_1, \ldots, c_n$*, sodaß*

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{c_1}{x - x_1} + \cdots + \frac{c_n}{x - x_n}.$$

Damit folgt dann

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\, dx = c_1 \cdot \ln(|x - x_1|) + \cdots + c_n \cdot \ln(|x - x_n|) + c.$$

Beispiel 8.21: Die technische Durchführung geschieht folgendermaßen:
1) Ansatz:

$$\frac{3 \cdot x + 4}{(x-1) \cdot (x+2)} = \frac{c_1}{x-1} + \frac{c_2}{x+2}.$$

2) Bringe die rechte Seite auf den Hauptnenner:

$$\frac{c_1}{x-1} + \frac{c_2}{x+2} = \frac{c_1 \cdot (x+2) + c_2 \cdot (x-1)}{(x-1) \cdot (x+2)}$$

3) Ordne den Zähler nach Potenzen von x:

$$\frac{c_1 \cdot (x+2) + c_2 \cdot (x-1)}{(x-1) \cdot (x+2)} = \frac{(c_1 + c_2) \cdot x + (2 \cdot c_1 - c_2)}{(x-1) \cdot (x+2)}.$$

4) Der Ansatz lautet nun:

$$\frac{3 \cdot x + 4}{(x-1) \cdot (x+2)} = \frac{(c_1 + c_2) \cdot x + (2 \cdot c_1 - c_2)}{(x-1) \cdot (x+2)}.$$

Die Nenner stimmen nach Konstruktion überein. Es verbleibt, die Konstanten c_1, c_2 so zu bestimmen, daß auch die Zähler <u>für alle x</u> übereinstimmen. Vergleiche dazu im Zähler die Koeffizienten vor jeder x-Potenz:

$$3 = c_1 + c_2, \quad 4 = 2 \cdot c_1 - c_2.$$

4) Löse das entstandene lineare Gleichungssystem für die unbekannten Koeffizienten:

$$c_1 = \frac{7}{3}\ , \quad c_2 = \frac{2}{3}.$$

Ergebnis:

$$\int \frac{3 \cdot x + 4}{(x-1) \cdot (x+2)}\, dx = \int \left(\frac{\frac{7}{3}}{x-1} + \frac{\frac{2}{3}}{x+2} \right) dx = \frac{7}{3}\ \ln(|x-1|) + \frac{2}{3}\ \ln(|x+2|) + c.$$

Beispiel 8.22: In MuPAD ist die Funktion `partfrac` (engl.: partial fraction) für die Partialbruchzerlegung zuständig:

```
>> partfrac((3*x + 4) / ((x - 1)*(x + 2)), x)

                    7          2
                --------- + ---------
                3 (x - 1)   3 (x + 2)
```

Bemerkung 8.23: *Die Partialbruchzerlegung haben wir schon früher beim Summieren rationaler Ausdrücke kennengelernt: siehe Beispiel 3.31.*

Bemerkung 8.24: *Hat man einen rationalen Integranden $\frac{p(x)}{q(x)}$, bei dem der Grad des Zählerpolynoms nicht kleiner ist als der Grad des Nennerpolynoms (dies wird in Satz 8.20 vorausgesetzt), so ist dies auch kein Problem. Durch Polynomdivision kann man einen polynomialen Anteil abspalten, z.B.:*

$$\frac{2 \cdot x^3 + x^2 + 2}{x^2 - 1} = 2 \cdot x + 1 \; + \; \frac{2 \cdot x + 3}{x^2 - 1}.$$

Die Division wird dabei wie mit Zahlen durchgeführt (man zieht sukzessiv den „führenden Term“ durch ein geeignetes Vielfaches des Nenners ab):

$$\begin{array}{lcl}
2 \cdot x^3 + x^2 + 2 & : \; x^2 - 1 & = \; 2 \cdot x + 1 \\
2 \cdot x^3 - 2 \cdot x & & \\
\hline
\quad x^2 + 2 \cdot x + 2 & & \\
\quad x^2 - 1 & & \\
\hline
\qquad 2 \cdot x + 3 & \text{(der Rest)} &
\end{array}$$

Der verbleibende Rest kann durch Partialbruchzerlegung additiv zerlegt werden, das Ergebnis ist:

```
>> partfrac((2*x^3 + x^2 + 2)/(x^2 -1), x)

                      5            1
          2 x + --------- - --------- + 1
                2 (x - 1)   2 (x + 1)
```

Es folgt

$$\int \frac{2 \cdot x^3 + x^2 + 2}{(x^2 - 1)} \, dx = \int \left(2 \cdot x + 1 \; + \; \frac{\frac{5}{2}}{x - 1} - \frac{\frac{1}{2}}{x + 1} \right) dx$$

$$= x^2 + x + \frac{5}{2} \; \ln(|x - 1|) - \frac{1}{2} \; \ln(|x + 1|) + c.$$

Probe mit MuPAD:

```
>> int((2*x^3 + x^2 + 2)/(x^2 -1), x)

                    2   5 ln(x - 1)   ln(x + 1)
                x + x  + ----------- - ---------
                                2           2
```

(MuPAD verzichtet darauf, innerhalb des `ln` *Betragszeichen einzutragen, denn MuPAD kann mit komplexen Zahlen umgehen. Für positives x gilt $\ln(-x) = \sqrt{-1}\cdot\pi + \ln(x)$, d.h., $\ln(-x)$ und $\ln(x)$ stimmen bis auf eine additive (komplexe) Konstante überein. Diese kann in die Integrationskonstante absorbiert werden).*

Bemerkung 8.25: *Für die Partialbruchzerlegung braucht man die Faktorisierung $q(x) = (x - x_1) \cdot \cdots \cdot (x - x_n)$ des Nennerpolynoms, d.h., man muß die Nullstellen $x_1, \ldots, x_n$ von $q(x)$ finden.*

8.2 Das bestimmte Integral

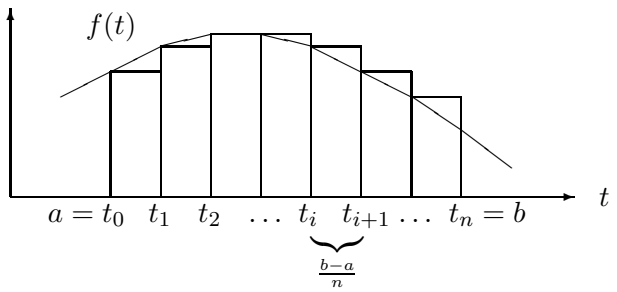
Die geometrische Interpretation eines bestimmten Integrals ist die Fläche unter einem Funktionsgraphen $f(t)$. Man zerlege ein Interval $[a, b]$ auf der t-Achse äquidistant in n Teilintervalle $[t_i, t_{i+1}]$ mit

$$t_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}\ , \quad i = 0, \ldots, n.$$

Dann approximiere man den Flächeninhalt durch die Flächen der durch die Punkte

$$(t_i, 0), \quad (t_i, f(t_i)), \quad (t_{i+1}, f(t_i)), \quad (t_{i+1}, 0)$$

gegebenen Rechtecke (mit der Breite $\frac{b-a}{n}$):



Die Summe der n Rechteckflächen ist $\dfrac{b-a}{n} \cdot \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)$. Im Grenzwert $n \to \infty$ liefert dies die Fläche unter dem Graphen.

Definition 8.26: (Das bestimmte Integral)

Zu einer über dem Intervall $[a, b]$ definierten (hinreichend glatten, z.B. stetigen) Funktion $f(t)$ (dem **„Integranden“***) wird das* **„bestimmte Integral“** *über $[a, b]$ definiert als*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\Big)$$

(sofern dieser Grenzwert existiert).

Dies ist lediglich eine prinzipielle Definition, die zur Berechnung völlig ungeeignet ist. Die wirkliche Berechnung geschieht über Stammfunktionen von $f(t)$, sobald der Zusammenhang zwischen dem bestimmten Integral und dem unbestimmten Integral geklärt ist (nächster Abschnitt).

Bemerkung 8.27: *Das bestimmte Integral kann auch negative Werte annehmen (z.B., wenn überall $f(t) < 0$ gilt). Die Interpretation als „Fläche unter dem Graphen“ gilt nur für positive Funktionen.*

Bestimmte Integrale können additiv zerlegt werden. Man stelle sich dazu eine positive Funktion $f(t)$ vor, d.h., das Integral von a bis b ist die Fläche unter dem Graphen von $t = a$ bis $t = b$. Diese Fläche setzt sich zusammen aus der Fläche unter dem Graphen von $t = a$ bis $t = c$ und der Fläche von $t = c$ bis $t = b$, wobei der Zerlegungspunkt c beliebig gewählt werden kann:

Satz 8.28: (Zerlegung bestimmter Integrale)

Für beliebiges a, b, c gilt:

$$\int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Konvention 8.29:

Wir setzen

$$\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\;dt,$$

womit wir in $\int_a^b f(t)\;dt$ nun auch $b < a$ zulassen können. Speziell gilt

$$\int_a^a f(t)\,dt = -\int_a^a f(t)\;dt = 0.$$

Mit dieser Konvention gilt Satz 8.28 auch für Zerlegungspunkte c, die außerhalb des Intervalls $[a, b]$ liegen.

Bemerkung 8.30: *In MuPAD ist die Funktion* `int` *sowohl für bestimmte als auch für unbestimmte Integrale zuständig:*

```
>> int(exp(-2*x), x)
                                  1
                             - ---------
                                       2
                               2 exp(x)

>> int(exp(-2*t), t = 0..5)
                                    1
                          1/2 - ---------
                                         2
                                 2 exp(5)

>> float(%)
                              0.4999773
```

Bemerkung 8.31: *Man beachte, daß das unbestimmte Integral* $\int f(x)\,dx$ *eine Funktion in* x *ist, während das bestimmte Integral* $\int_a^b f(t)\,dt$ *für konkrete Zahlenwerte* a, b *einen Zahlenwert darstellt. Diesen kann man numerisch approximieren, indem man z.B. die in der Definition 8.26 gegebene Summe für großes* n *ausrechnet. Alternativ zur „Riemann-Summe“*

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\Big)$$

ist es günstiger, stattdessen die „Trapez-Summe“

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\Big(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\Big) + \frac{f(b)}{2} \right)$$

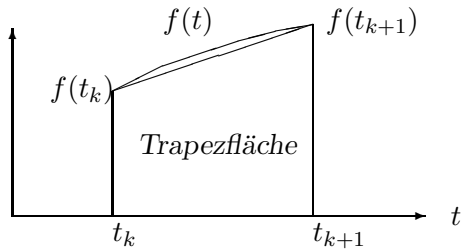
zu berechnen, die sich mit $t_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$ *auch als*

$$\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(t_k) + f(t_{k+1})}{2}$$

schreiben läßt. Hierbei ist $\frac{b-a}{n} \cdot \frac{f(t_k)+f(t_{k+1})}{2}$ *die Fläche des durch die 4 Punkte*

$$(t_k, 0), \quad (t_k, f(t_k)), \quad (t_{k+1}, f(t_{k+1})), \quad (t_{k+1}, 0)$$

definierten Trapezes (d.h., die Fläche unter dem Graphen von $f(t)$ *wird nicht durch Rechtecke, sondern durch Trapeze angenähert).*



Bemerkung 8.32: *In MuPAD ist die Funktion* `numeric::int` *für die numerische Berechnung von bestimmten Integralen zuständig. Sie arbeitet auch dann, wenn der symbolische Integrator kein Ergebnis liefert (weil er keine Stammfunktion findet):*

```
>> int(exp(sqrt(t))*sqrt(t), t = 0..10)

                    1/2      1/2
              int(t    exp(t   ), t = 0..10)

>> numeric::int(exp(sqrt(t))*sqrt(t), t = 0..10)

                          264.1573027
```

8.3 Der Hauptsatz: Zusammenhang zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral

Es verbleibt das Problem, wie man effektiv bestimmte Integrale $\int_a^b f(t)\,dt$ ohne den garstigen Grenzwert von Riemann–Summen berechnen kann. Hier kommt die wesentliche Beobachtung ins Spiel, daß man mit unbestimmten Integralen (Stammfunktionen) bestimmte Integrale ausrechnen kann.

Satz 8.33: (Der Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung, Version 1)

Betrachte

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Für stetiges f ist F_a differenzierbar, und es gilt

$$\frac{d}{dx}F_a(x) = f(x),$$

d.h., $F_a(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$.

„Beweisidee“: Es gilt

$$\Delta F_a = F_a(x+h) - F_a(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \overset{(8.28)}{=} \int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Nähern wir auf dem (kleinen) Interval $[x, x+h]$ die Funktion durch den konstanten Wert $f(t) \approx f(x)$ an, so gilt

$$\Delta F_a = \int_x^{x+h} f(t)\,dt \approx \int_x^{x+h} f(x)\,dt = \lim_{n\to\infty} \frac{h}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(x)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{h}{n} \cdot f(x) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{h}{n} \cdot f(x) \cdot n = \lim_{n\to\infty} h \cdot f(x) = h \cdot f(x).$$

Damit läßt sich die Ableitung von $F_a(x)$ berechnen:

$$\frac{d}{dx} F_a(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h \cdot f(x)}{h} = f(x).$$

□

Bemerkung 8.34: *Stammfunktionen sind nur bis auf additive Konstanten bestimmt. Dies wird in der Darstellung einer Stammfunktion über $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ dadurch deutlich, daß die untere Grenze a beliebig wählbar ist. Die Konstante ist hier durch die Bedingung $F_a(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$ festgelegt. Bei unterschiedlicher Wahl der unteren Grenze ist die Differenz der entsprechenden Stammfunktionen in der Tat eine Konstante:*

$$F_{a_1}(x) - F_{a_2}(x) = \int_{a_1}^x f(t)\,dt - \int_{a_2}^x f(t)\,dt$$

$$\overset{(8.28)}{=} \left(\int_{a_1}^{a_2} f(t)\,dt + \int_{a_2}^x f(t)\,dt \right) - \int_{a_2}^x f(t)\,dt = \underbrace{\int_{a_1}^{a_2} f(t)\,dt}_{\text{unabhängig von } x}.$$

Bestimmte Integrale sind also Stammfunktionen, wenn man sie als Funktion der oberen Grenze auffasst. Umgekehrt, kennt man ein Stammfunktion, so liefert sie ein bestimmtes Integral, denn alle Stammfunktionen $F(x)$ von $f(x)$ unterscheiden sich nur um eine additive Konstante, d.h., es muss gelten

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) + c.$$

Es verbleibt nur, die Integrationskonstante c zu identifizieren. Für $x = a$ folgt

$$0 = \int_a^a f(t)\,dt = F(a) + c \quad \Rightarrow \quad c = -F(a),$$

also

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Dies liefert nun eine effektive Methode, bestimmte Integrale auszurechnen, indem man sich zunächst eine Stammfunktion des Integranden verschafft:

Satz 8.35: (Der Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung, Version 2)
Sei $F(x)$ eine beliebige stetige Stammfunktion von $f(x)$. Dann gilt

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Die additive Konstante der Stammfunktion fällt dabei bei Differenzbildung heraus.

Beispiel 8.36: Zur Berechnung von $\int_1^2 \ln(t)\,dt$ berechnet man zunächst eine Stammfunktion von $\ln(x)$. Analog zu Beispiel 8.11 ergibt sich durch partielle Integration:

$$\int \ln(x)\,dx = \int \underbrace{\ln(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{1}_{g'(x)}\,dx = \underbrace{\ln(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'(x)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)}\,dx$$

$$= x \cdot \ln(x) - \int 1\,dx = x \cdot \ln(x) - x + c.$$

Mit der Stammfunktion $F(x) = x \cdot \ln(x) - x + c$ ergibt sich das bestimmte Integral

$$\int_1^2 \ln(t)\,dt = F(2) - F(1) = \Big(2 \cdot \ln(2) - 2 + c\Big) - \Big(1 \cdot \ln(1) - 1 + c\Big) = 2 \cdot \ln(2) - 1.$$

Bemerkung 8.37: *Aus dem Zusammenhang mit dem unbestimmten Integral folgt sofort, daß die Rechenregeln aus Abschnitt 8.1 auch für bestimmte Integrale gelten, z.B. (Satz 8.7):*

$$\boxed{\int_a^b \Big(c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t)\Big)dt = c_1 \cdot \int_a^b f_1(t)\,dt \;+\; c_2 \cdot \int_a^b f_2(t)\,dt.}$$

Partielle Integration gilt in der folgenden Form:

$$\boxed{\int_a^b f(t) \cdot g'(t)\,dt = \Big[f(t) \cdot g(t)\Big]_{t=a}^{t=b} \;-\; \int_a^b f'(t) \cdot g(t)\,dt,}$$

wobei $\Big[f(t) \cdot g(t)\Big]_{t=a}^{t=b}$ *als Abkürzung für*

$$\Big[f(t) \cdot g(t)\Big]_{t=a}^{t=b} = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a)$$

dient. Substitution gilt in der folgenden Form:

$$\boxed{\int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\, dy.}$$

Beispiel 8.38: Partielle Integration:

$$\int_0^1 \underbrace{t}_{f(t)} \cdot \underbrace{\cos(t)}_{g'(t)}\, dt = \Big[\underbrace{t}_{f(t)} \cdot \underbrace{\sin(t)}_{g(t)}\Big]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 \underbrace{1}_{f'(t)} \cdot \underbrace{\sin(t)}_{g(t)}\, dt$$

$$= \Big[t \cdot \sin(t)\Big]_{t=0}^{t=1} - \Big[-\cos(t)\Big]_{t=0}^{t=1}$$

$$= 1 \cdot \sin(1) - 0 \cdot \sin(0) + \cos(1) - \cos(0) = \sin(1) + \cos(1) - 1.$$

Beispiel 8.39: Substitution $y = t^2$, $dy = 2\,t\,dt$:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} t\, \cos(t^2)\, dt = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\sqrt{\pi}} \cos(t^2) \cdot \underbrace{2\,t\,dt}_{dy} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi} \cos(y)\, dy$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \Big[\sin(y)\Big]_{y=0}^{y=\pi} = \frac{1}{2} \cdot \Big(\sin(\pi) - \sin(0)\Big) = 0.$$

Man beachte hierbei, wie sich im Substitutionsschritt die Grenzen ändern: Für $t = 0$ folgt $y = t^2 = 0$, für $t = \sqrt{\pi}$ folgt $y = t^2 = \pi$.

8.4 Uneigentliche Integrale

Bestimmte Integrale $\int_a^b f(t)\, dt$ sind zunächst nur für endliche Intervalle $[a, b]$ definiert. Wir erweitern die Definition:

Definition 8.40: (Uneigentliche Integrale)

$$\int_a^{\infty} f(t)\, dt = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(t)\, dt,$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(t)\, dt = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(t)\, dt,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = \lim_{a \to -\infty} \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(t)\, dt$$

(falls die Grenzwerte existieren).

Beispiel 8.41:

$$\int_0^\infty e^{-t}\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-t}\,dt = \lim_{b\to\infty}\Big[-e^{-t}\Big]_{t=0}^{t=b} = \lim_{b\to\infty}(-e^{-b}+1) = 1-\lim_{b\to\infty}e^{-b} = 1.$$

Beispiel 8.42: Substitution $y=-\sqrt{t}$, $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2\cdot\sqrt{t}} = \frac{1}{2\cdot y}$, $dt = 2\cdot y\cdot dy$:

$$\frac{1}{2}\cdot\int_0^\infty e^{-\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\int_0^{-\infty} e^y\cdot 2\cdot y\;dy \overset{(8.29)}{=} -\int_{-\infty}^0 e^y\cdot y\;dy.$$

Man achte hierbei auf die Transformation der Grenzen: $t=0$ entspricht $y=-\sqrt{t}=0$, $t=\infty$ entspricht $y=-\sqrt{t}=-\infty$. Das verbleibende Integral war bereits in Beispiel 8.12 gelöst worden:

$$-\int_{-\infty}^0 e^y\cdot y\;dy = -\lim_{a\to-\infty}\Big[(y-1)\cdot e^y\Big]_{y=a}^{y=0}$$

$$= -\lim_{a\to-\infty}\Big(-1-(a-1)\cdot e^a\Big) = 1-\lim_{a\to-\infty}\Big((1-a)\cdot e^a\Big).$$

Der verbleibende Grenzwert ist 0:

$$\lim_{a\to-\infty}\Big((1-a)\cdot e^a\Big) \overset{(b=-a)}{=} \lim_{b\to\infty}\Big((1+b)\cdot e^{-b}\Big) = \lim_{b\to\infty}\Big(\frac{b+1}{e^b}\Big).$$

Da mit $e^b = 1+b+\frac{b^2}{2}+\cdots$ die Exponentialfunktion für $b\to\infty$ stärker steigt als jedes Polynom, ist der Grenzwert 0. Endergebnis:

$$\frac{1}{2}\cdot\int_0^\infty e^{-\sqrt{t}}\,dt = 1.$$

Man geht ähnlich vor, wenn der Integrand eine Singularität hat:

Definition 8.43: (Uneigentliche Integrale bei singulären Integranden)

Hat der Integrand $f(t)$ an der Stelle a oder b eine Singularität, so definiert man

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\epsilon\to 0+0}\int_a^{b-\epsilon} f(t)\,dt,$$

bzw.

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\epsilon\to 0+0}\int_{a+\epsilon}^{b} f(t)\,dt$$

(falls die Grenzwerte existieren).

Beispiel 8.44: Im folgenden Fall existiert das uneigentliche Integral:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \lim_{\epsilon\to 0+0}\int_\epsilon^1 t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \lim_{\epsilon\to 0+0}\left[\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{t=\epsilon}^{t=1}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0+0}\left[2\cdot\sqrt{t}\right]_{t=\epsilon}^{t=1} = 2\cdot\lim_{\epsilon\to 0+0}\left(1-\sqrt{\epsilon}\right) = 2.$$

Beispiel 8.45: Im folgenden Fall existiert das uneigentliche Integral nicht (bzw. ist ∞):

$$\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt = \lim_{\epsilon\to 0+0}\int_\epsilon^1 \frac{1}{t}\,dt = \lim_{\epsilon\to 0+0}\Big[\ln(t)\Big]_{t=\epsilon}^{t=1} = \lim_{\epsilon\to 0+0}\Big(0-\ln(\epsilon)\Big) = \infty.$$

8.5 Einige spezielle Anwendungen

Satz 8.46: (logarithmische Divergenz der harmonischen Reihe)

Die Folge $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)$ *konvergiert monoton falled gegen einen Grenzwert* $C \approx 0.5772...$ *(die* **„Eulersche Konstante“***):* $\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \approx \ln(n) + C.}$

Beweis: Sei $C_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)$. Mit

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx = \ln(k+1) - \ln(k)$$

gilt

$$C_n > \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n+1) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1}\frac{1}{x}\right)dx = \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{x}\right)dx > 0,$$

denn für die monoton fallende Funktion $\frac{1}{x}$ gilt $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{x}$ auf dem Intervall $[k, k+1]$. Weiterhin gilt

$$C_n - C_{n+1} = \Big(\ln(n+1) - \ln(n)\Big) - \frac{1}{n+1} = \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, dx - \frac{1}{n+1}$$

$$= \int_n^{n+1} \Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{n+1}\Big)\, dx \geq 0,$$

denn es gilt $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{n+1}$ für $x \in [n, n+1]$. Damit ist die Folge (C_n) monoton fallend und nach unten beschränkt. Sie konvergiert also gegen einen Grenzwert C.

Q.E.D.

Als weitere „Anwendung“ der Integration versuchen wir, realistische Abschätzungen von $n!$ für $n \gg 1$ zu ermitteln. Zunächst beobachtet man

$$\ln(n!) = \ln(1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}\cdots{\cdot}n) = \ln(1){+}\ln(2){+}\ln(3){+}\cdots{+}\ln(n) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k).$$

Diese Summe läßt sich als Riemann–Summe interpretieren, die bei

$$\int_1^n \ln(x)\, dx = \Big[x \cdot (\ln(x) - 1)\Big]_{x=1}^{x=n} = n \cdot \ln(n) - n + 1$$

anfällt, wenn man das Integrationsintervall $[1, n]$ in die $n-1$ Teilintervalle $[1, 2]$, $[2, 3]$, $\ldots$, $[n-1, n]$ zerlegt. Wegen der Monotonie von $\ln(x)$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) \leq \int_1^n \ln(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \ln(x)\, dx \leq \sum_{k=2}^{n} \ln(k),$$

also

$$\ln((n-1)!) \leq n \cdot \ln(n) - n + 1 \leq \ln(n!),$$

also

$$(n-1)! \leq n^n \cdot e^{-n+1} \leq n!,$$

also (in der linken Ungleichung wird n durch $n+1$ ersetzt):

$$n^n \cdot e^{-n+1} \leq n! \leq (n+1)^{n+1} \cdot e^{-n},$$

also

$$\boxed{e \cdot \Big(\frac{n}{e}\Big)^n \leq n! \leq e \cdot \Big(\frac{n+1}{e}\Big)^{n+1}.}$$

Hiermit ist das Wachstumsverhalten von $n!$ charakterisiert. Diese Abschätzung läßt sich jedoch noch wesentlich verfeinern:

Satz 8.47: (Die Stirling–Formel)

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt folgende Abschätzung von $n!$:

$$\sqrt{2 \cdot \pi \cdot n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{1}{4 \cdot n}}.$$

Für großes n gilt $e^{\frac{1}{4 \cdot n}} = 1 + \frac{1}{4 \cdot n} + \cdots \approx 1$, d.h., das Verhältnis der oberen Schranke zur unteren Schranke ist für großes n dicht bei 1 (d.h., die führenden Stellen der oberen und unteren Schranke sind gleich und stimmen mit den führenden Stellen von $n!$ überein).

Merke:

$$\boxed{n! \approx \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n.}$$

Diese **„Stirling-Approximation“** *für $n!$ ist schon ab $n = 4$ auf etwa 2 Prozent genau! Beispiel:*

n	$\sqrt{2 \cdot \pi \cdot n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$	$n!$	$\sqrt{2 \cdot \pi \cdot n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{1}{4 \cdot n}}$
2	1.9...	2	2.1...
5	118.0...	120	124.0...
10	3598695.6...	3628800	3689797.0...

Beweis: (für technisch Interessierte)
Es ist zu zeigen:

$$\sqrt{2 \cdot \pi} \leq \frac{n!}{\sqrt{n} \cdot (\frac{n}{e})^n} = \underbrace{\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n}}}_{a_n} \leq \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot e^{\frac{1}{4 \cdot n}}$$

Wir zeigen zunächst, dass die Folge

$$a_n = \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n}}$$

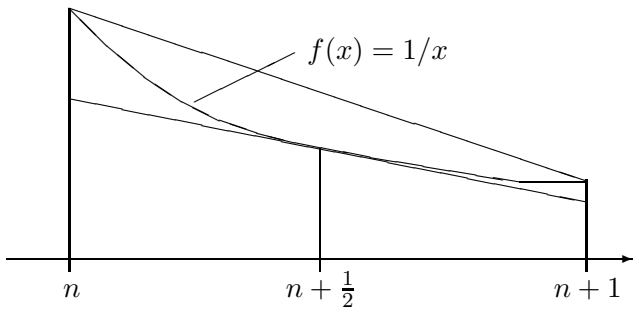
konvergiert. Für die Quotienten aufeinander folgender Elemente bekommt man

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{e} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

und damit

$$\ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1. \qquad (\#)$$

Betrachte die Integration der Funktion $f(x) = 1/x$ über dem Intervall $[n, n+1]$:



Das Integral wird nach oben abgeschätzt durch das Trapez durch die Punkte $(n, f(n))$ und $(n+1, f(n+1))$. Die Trapezfläche ist *Breite* $\times$ *mittlere Höhe* $= \frac{1}{2} \cdot (f(n) + f(n+1))$:

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, dx \;= \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) \le \frac{1}{2} \cdot \Big(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\Big).$$

Das Integral wird nach unten abgeschätzt durch das Trapez, dessen obere Kante die Tangente an $f(x)$ im Mittelpunkt ist. Die Trapezfläche ist *Breite* $\times$ *mittlere Höhe* $= f(n + \frac{1}{2})$:

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, dx \;= \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) \ge \frac{1}{n + \frac{1}{2}}.$$

Diese Abschätzungen liefern die Ungleichungskette

$$\frac{1}{n + \frac{1}{2}} \le \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) \le \frac{1}{2} \cdot \Big(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\Big),$$

also

$$1 \le \Big(n + \frac{1}{2}\Big) \cdot \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) \le \Big(n + \frac{1}{2}\Big) \cdot \frac{1}{2} \cdot \Big(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\Big),$$

also

$$0 \le \Big(n + \frac{1}{2}\Big) \cdot \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) - 1 \le \Big(n + \frac{1}{2}\Big) \cdot \frac{1}{2} \cdot \Big(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\Big) - 1$$
$$= \frac{1/4}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{4} \cdot \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big).$$

Eingesetzt in (#) erhält man:

$$0 \le \ln\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}}\Big) \le \frac{1}{4} \cdot \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big),$$

also

$$1 \le \frac{a_n}{a_{n+1}} \le e^{\frac{1}{4 \cdot n}} \cdot e^{-\frac{1}{4 \cdot (n+1)}}.$$

Es folgt

$$1 \leq \frac{a_n}{a_{n+k}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n+k-1}}{a_{n+k}}$$

$$\leq e^{\frac{1}{4\cdot n}} \cdot e^{-\frac{1}{4\cdot(n+1)}} \cdot e^{\frac{1}{4\cdot(n+1)}} \cdot e^{-\frac{1}{4\cdot(n+2)}} \cdot \ldots \cdot e^{\frac{1}{4\cdot(n+k-1)}} \cdot e^{-\frac{1}{4\cdot(n+k)}}$$

$$= e^{\frac{1}{4\cdot n}} \cdot e^{-\frac{1}{4\cdot(n+k)}} \leq e^{\frac{1}{4\cdot n}}$$

für alle $k \geq 1$. Für fixiertes n ist die Folge (a_{n+k}) (im Folgenindex k) damit monoton fallend und nach unten beschränkt, d.h., es existiert der Grenzwert $a^* = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n+k} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, für den gilt:

$$1 \leq \frac{a_n}{a^*} \leq e^{\frac{1}{4\cdot n}} \quad \Rightarrow \quad a^* \leq a_n \leq a^* \cdot e^{\frac{1}{4\cdot n}}.$$

Es verbleibt damit lediglich, $a^* = \sqrt{2\cdot\pi}$ zu zeigen. Das ist wesentlich aufwendiger, und wir verzichten hier darauf.

Q.E.D.