Kapitel 7

Potenzreihen

Mit den Taylor-Reihen 6.22 hatten wir über

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

Reihen eingeführt, die von einem Parameter x abhängen und Kandidaten dafür sind, eine gegebene unendlich oft differenzierbare Funktion $f(x)$ darzustellen. Speziell stellte sich die in Beispiel 3.24 eingeführte Exponentialfunktion

$$e^z = \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots$$

als Taylor-Reihe (um den Entwicklungspunkt 0) heraus. Wir diskutieren hier nun (im Nachhinein) einige grundsätzliche Struktureigenschaften solcher Reihen, die Potenzen eines (nun komplexen) Parameters z enthalten und –bei Konvergenz– eine Funktion in z definieren. Wie es sich herausstellen wird, sind solche Funktion auf dem Konvergenzbereich der Reihen automatisch ihre eigenen Taylor-Reihen. Wir drehen also die Vorgehensweise bei den Taylor-Reihen um: Statt eine Funktion $f(z)$ vorzugeben und ihre Taylor-Reihe zu berechnen, geben wir die Taylor-Reihe vor und benutzen sie als Definition der Funktion. In der Tat hatten wir dies ja bei der Exponentialfunktion und analog bei sin und cos schon gemacht. Hier zunächst die allgemeine Form der Reihen, die wir betrachten wollen:

Definition 7.1: (Komplexe Potenzreihen)

Eine **„Potenzreihe um den Punkt** $z_0 \in \mathbb{C}$**“** *ist eine Reihe der Form*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k, \quad a_k, z, z_0 \in \mathbb{C}.$$

Dort, wo die Reihe konvergiert, definiert sie eine Funktion von z, deren Eigenschaften untersucht werden sollen.

7.1 Der Konvergenzradius

Satz 7.2: (Konvergenz von Potenzreihen)

Zur Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k$ *existiert ein* $r \geq 0$ *(der* **„Konvergenzradius“***), so dass*

a) die Reihe für alle z *mit* $|z - z_0| < r$ **absolut** *konvergiert,*

b) die Reihe für kein z *mit* $|z - z_0| > r$ *konvergiert.*

Beweis: Gibt es einen Punkt Z, in dem die Reihe $\sum_k a_k \cdot (Z - z_0)^k$ konvergiert, so bildet $a_k \cdot (Z - z_0)^k$ eine Nullfolge. Es gilt also $|a_k \cdot (Z - z_0)^k| \leq 1$ für hinreichend grosses $k \geq k_0$. Mit

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k \cdot (z - z_0)^k| = \sum_{k=k_0}^{\infty} \underbrace{|a_k \cdot (Z - z_0)^k|}_{\leq 1} \cdot \left| \frac{z - z_0}{Z - z_0} \right|^k$$

ist also für jedes z mit $|z - z_0| < |Z - z_0|$ die geometrische Reihe $\sum_k |\frac{z-z_0}{Z-z_0}|^k$ eine konvergente Majorante, d.h., $\sum_k a_k \cdot (z - z_0)^k$ konvergiert absolut. Damit ist

$$r = \sup \Big\{ |Z - z_0|;\ \textstyle\sum_k a_k \cdot (Z - z_0)^k \text{ konvergiert } \Big\},$$

falls die Menge der Konvergenzpunkte beschränkt ist. Konvergiert die Reihe für alle $Z \in \mathbb{C}$, setzt man formal $r = \infty$. Für jedes z mit $|z - z_0| > r$ muss die Reihe nach dieser Konstruktion von r divergieren.

Q.E.D.

Bemerkung 7.3: *Der Konvergenzbereich einer Potenzreihe besteht also prinzipiell aus einer Kreisscheibe um den Entwicklungspunkt* z_0*. Der Radius* r *kann allerdings* 0 *sein (d.h., die Potenzreihe konvergiert nur am Punkt* $z = z_0$*). Im Folgenden interessieren natürlich nur Potenzreihen mit einem Konvergenzradius* $r > 0$*. Über den Rand des Konvergenzkreises* $\{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| = r\}$ *kann man keine allgemeine Aussagen machen. In folgendem Beispiel konvergiert die Reihe für keinen der Randpunkte (denn für* $|z| = 1$ *ist* z^k *keine Nullfolge):*

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad (\textit{Konvergenz für } |z| < r = 1.)$$

In folgendem Beispiel konvergiert die Reihe für alle Randpunkte mit $|z| = 1$ außer für $z = 1$ ($z = 1$ führt auf die divergente harmonische Reihe):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k} \quad (\textit{Konvergenz für } |z| \leq r = 1, z \neq 1).$$

Im folgenden Beispiel konvergiert die Reihe für alle Randpunkte:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k^2} \quad (\textit{Konvergenz für } |z| \leq r = 1.)$$

Beispiel 7.4: Die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$$

hat den Konvergenzradius 1. Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot z^{2\cdot k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-z^2)^k = \frac{1}{1-(-z^2)} = \frac{1}{1+z^2}$$

hat ebenfalls den Konvergenzradius 1.

Der Konvergenzradius eine Potenzreihe kann unmittelbar aus den Koeffizienten a_k der Reihe bestimmt werden:

Satz 7.5: (Cauchy-Hadamard-Formel für den Konvergenzradius)

Der Konvergenzradius der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k$ *ist* $r = \dfrac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$, *wenn* $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ *existiert. Gilt* $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$, *so setze* $r = \infty$. *Gilt* $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \infty$, *so setze* $r = 0$.

Beweis: Der Grenzwert $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ existiere. Betrachte ein beliebiges z mit $|z - z_0| < r$. Dann gilt $c := \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \cdot |z - z_0| < 1$. Es folgt, dass für alle $k \geq N$ (mit geeignetem N)

$$\sqrt[k]{|a_k|} \cdot |z - z_0| \leq C < 1 \quad \text{mit } C := \tfrac{1+c}{2} \in [\tfrac{1}{2}, 1)$$

gelten muss. Damit kann die Reihe durch eine konvergente geometrische Reihe abgeschätzt werden:

$$\left| a_k \cdot (z - z_0)^k \right| = \left(\sqrt[k]{|a_k|} \cdot |z - z_0| \right)^k \leq C^k \qquad \forall k \geq N.$$

Nach Satz 3.16 konvergiert $\sum_k |a_k| \cdot |z - z_0|^k$, da $\sum_k C^k$ mit $C < 1$ eine konvergente Majorante ist. Dies ist die absolute Konvergenz von $\sum_k a_k \cdot (z - z_0)^k$. Das Argument greift auch für den Grenzfall $r = \infty$.

Betrachte nun ein beliebiges z mit $|z - z_0| > r$. Diesmal gilt

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \cdot |z - z_0| > 1,$$

also

$$\Big| a_k \cdot (z - z_0)^k \Big| = \Big(\sqrt[k]{|a_k|} \cdot |z - z_0| \Big)^k > 1$$

für große k, d.h., die Reihenglieder von $\sum_k a_k \cdot (z - z_0)^k$ bilden keine Nullfolge. Nach Satz 3.8 kann die Reihe $\sum_k a_k \cdot (z - z_0)^k$ nicht konvergieren. Das Argument greift auch für den Grenzfall $r = 0$.

Q.E.D.

Bemerkung 7.6: *Die allgemeine Form der Cauchy-Hadamard-Formel ist*

$$\text{Konvergenzradius} = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}},$$

wo lim sup (**„Limes superior“**) *der größte Häufungspunkt der Folge* $\sqrt[k]{|a_k|}$ *ist. Der Limes superior existiert für jede reelle Folge (bei unbeschränkten Folgen definiert man ihn formal als* ∞*).*

7.2 Eigenschaften von Potenzreihen

Auf dem Inneren des Konvergenzkreises sind durch Potenzreihen dargestellte Funktionen „beliebig harmlos und angenehm“. Sie sind automatisch unendlich oft diff'bar und werden durch ihre Taylor-Entwicklung dargestellt (Funktionen, die durch ihre Taylor-Reihen dargestellt werden, nennt man **analytisch**). Dies darf nicht verwundern, denn (gliedweise Differenzierbarkeit mal vorausgesetzt):

$$\frac{d^n}{dz^n}\Big|_{z=z_0} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k}_{f(z)} = \Big(n! \cdot a_n + (..) \cdot (z - z_0) + (..) \cdot (z - z_0)^2 + \dots \Big)_{z=z_0}$$

$$= n! \cdot a_n,$$

also $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$.

Damit ist die Potenzreihe ihre eigene Taylor-Reihe:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \cdot (z-z_0)^k.$$

Diese heuristische Überlegung gilt in der Tat:

Satz 7.7: (Potenzreihen stellen analytische Funktionen dar)

Auf dem Inneren des Konvergenzkreises $\{z \in \mathbb{C};\ |z-z_0| < r\}$ *einer Potenzreihe mit Konvergenzradius* $r > 0$ *stellt*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z-z_0)^k$$

eine unendlich oft differenzierbare Funktion dar. Es gilt

$$\frac{d^n}{dz^n}\, f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-n+1) \cdot (z-z_0)^{k-n},$$

d.h., die Potenzreihe kann gliedweise differenziert werden. Der Konvergenzradius der abgeleiteten Reihen ist wiederum r. *Speziell gilt* $a_k = f^{(k)}(z_0)/k!$.

Beweis: Für die Potenzreihe ist der Differenzenquotient

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \frac{(z+h-z_0)^k - (z-z_0)^k}{h}.$$

Mit der Binomialentwicklung

$$\frac{(z+h-z_0)^k-(z-z_0)^k}{h} = \frac{1}{h} \cdot \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} \cdot h^j \cdot (z-z_0)^{k-j}$$

$$= k \cdot (z-z_0)^{k-1} + h \cdot \sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j} \cdot h^{j-2} \cdot (z-z_0)^{k-j}$$

folgt

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (z-z_0)^{k-1} + h \cdot \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=2}^{k} a_k \cdot \binom{k}{j} \cdot h^{j-2} \cdot (z-z_0)^{k-j}}_{g(h)}.$$

Die die Funktion $g(h)$ definierende Reihe ist dabei wohldefiniert, da die linke Seite der Gleichung für hinreichend kleines h definiert ist ($z+h$ muss im Konvergenzkreis von $f(z)$ liegen) und die Reihe $\sum_k a_k \cdot k \cdot (z-z_0)^{k-1}$ konvergiert (in den

Übungen wird gezeigt, dass $f(z) = \sum_k a_k(z-z_0)^k$ und $f(z) = \sum_k a_k \cdot k \cdot (z-z_0)^k$ den selben Konvergenzradius haben). Die Funktion $g(h)$ ist beschränkt in h, denn für $|h| \leq |h_0|$ (mit noch zu wählendem h_0) gilt:

$$|g(h)| = \Big|\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{k} a_k \cdot \binom{k}{j} \cdot h^{j-2} \cdot (z-z_0)^{k-j}\Big| \leq \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{k} |a_k| \cdot \binom{k}{j} \cdot |h_0|^{j-2} \cdot |z-z_0|^{k-j}$$

$$\leq \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| \sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j} \cdot |h_0|^{j-2} \cdot |z-z_0|^{k-j} \leq \frac{1}{|h_0|^2} \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \cdot |h_0|^{j} \cdot |z-z_0|^{k-j}$$

$$= \frac{1}{|h_0|^2} \sum_{k=2}^{\infty} |a_k|(|z-z_0| + |h_0|)^k.$$

Ist $r > 0$ der Konvergenzradius von $\sum_k a_k \cdot (z-z_0)^k$ (und damit auch von $\sum_k |a_k| \cdot |z-z_0|^k$), so wähle $|h_0| = (r - |z-z_0|)/2$, womit $|z-z_0| + |h_0| < r$ gilt, d.h., die obige Reihe konvergiert und liefert eine Schranke für $|g(h)|$.
Damit folgt $h \cdot g(h) = O(h)$:

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (z-z_0)^{k-1} + \lim_{h \to 0} O(h)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (z-z_0)^{k-1}.$$

Damit ist gezeigt, dass die Potenzreihe einmal differenzierbar ist. Die Ableitung ist wieder als Potenzreihe dargestellt.
Die höheren Ableitungen folgen nun sofort per Induktion nach der Ableitungsordnung.

Q.E.D.

6.7.05↓ **Bemerkung 7.8:** *Die Formel*

$$\frac{d^n}{dz^n} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z-z_0)^k = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-n+1) \cdot (z-z_0)^{k-n}$$

ist leicht zu merken. Sie besagt lediglich, dass man Differentiation und Summation vertauschen darf:

$$\frac{d^n}{dz^n} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z-z_0)^k \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \frac{d^n}{dz^n} (z-z_0)^k$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-n+1) \cdot (z-z_0)^{k-n}.$$

Beispiel 7.9: Die in Beispiel 3.24 bzw. Definition 5.10 eingeführten Funktionen

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad \sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot z^{2\cdot k+1}}{(2\cdot k+1)!}, \quad \cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot z^{2\cdot k}}{(2\cdot k)!}$$

haben den Konvergenzradius $r = \infty$ und sind damit auf ganz $\mathbb{C}$ differenzierbar. Aus diesen Darstellungen erhält man sofort:

$$\frac{d}{dz}\, e^z = e^z, \quad \frac{d}{dz}\, \sin(z) = \cos(z), \quad \frac{d}{dz}\, \cos(z) = -\sin(z).$$

Bemerkung 7.10: *Die (reelle) Reihe*

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot x^{2\cdot k}$$

um $x_0 = 0$ hat offensichtlich den Konvergenzradius 1. Für $|x| < 1$ stellt sie nach Konstruktion die Funktion $1/(1+x^2)$ da, die längs der reellen Achse eine „harmlose“ Funktion darstellt (überall stetig, beliebig oft differenzierbar). Warum konvergiert die Reihe aber nur für Werte von x mit $|x| < 1$, wo doch $1/(1+x^2)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ wohldefiniert ist?

Im Komplexen ist die Theorie der Differentiation und Taylor-Entwickelbarkeit wesentlich weitreichender (und einfacher) als im Reellen. Man muss sich in der Tat $1/(1+x^2)$ im Komplexen vorstellen. Die Funktion $z \in \mathbb{C} \to 1/(1+z^2) \in \mathbb{C}$ hat Singularitäten (Polstellen) bei $z = \pm i$. In der Tat ist der Konvergenzradius 1 bei Entwicklung um den Nullpunkt der Abstand vom Entwicklungspunkt 0 zur nächsten Singularität! Im Komplexen ist der „kleine“ Konvergenzradius 1 der Reihe daher unmittelbar verständlich. Im Reellen sieht man die komplexen Singularitäten nicht und wundert sich, dass die nette Funktion $1/(1+x^2)$ nicht überall durch ihre Taylor-Reihe dargestellt wird.