Kapitel 6

Differentialrechnung

6.1 Definitionen und Sätze

↓15.6.05

Im Prinzip könnten die meisten der folgenden Überlegungen und Definitionen ohne große Änderungen für komplexe Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durchgeführt werden. Wir beschränken uns hier jedoch auf reelle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zunächst die Definition einer Ableitung als Grenzwert von „Sekantensteigungen“:

Definition 6.1: (Die Ableitung einer Funktion)

Eine Funktion $f : D \mapsto \mathbb{R}$ heißt **„differenzierbar am Punkt x“**, *wenn der Grenzwert*

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert. Der Grenzwert $f'(x)$ heißt **„Ableitung von f am Punkt x“**. *Alternative Schreibweisen (mit $y = f(x)$):*

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x).$$

Ist f an jedem Punkt x des Definitionsbereichs D differenzierbar, so heißt die Abbildung $f' : x \mapsto f'(x)$ **„Ableitungsfunktion“** *(kurz:* **„Ableitung von f“***).*

Bemerkung 6.2: *Ist eine Funktion an einem Punkt differenzierbar, so ist sie dort auch stetig:*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ existiert } \Rightarrow f(x+h) - f(x) = O(h)$$

$$\Rightarrow f(x+h) = f(x) + O(h) \Rightarrow \lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x).$$

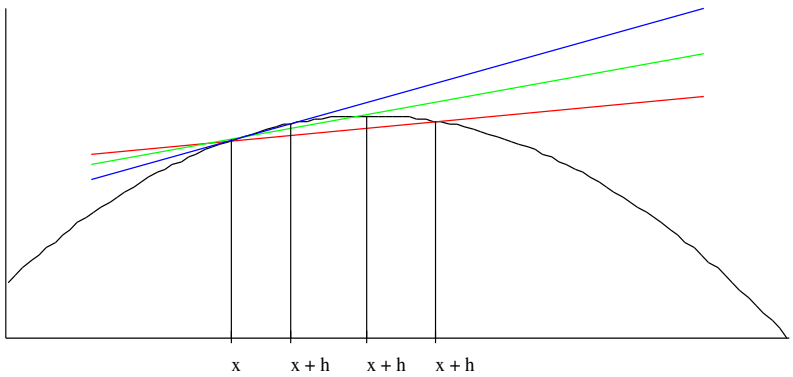
Damit kann eine Funktion nur an Stetigkeitspunkten differenzierbar sein.

Geometrische Interpretation der Ableitung 6.3:

Für kleines $\Delta x = h \neq 0$ ist der **„Differenzenquotient“**

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx f'(x)$$

die Sekantensteigung vom Punkt $(x, f(x))$ zum Punkt $(x+h, f(x+h))$ auf dem Graphen von x:



Die Ableitung $f'(x)$ selbst, d.h., der Grenzwert der Sekantensteigung für $\Delta x = h \to 0$, **ist die Steigung der Tangente an den Graphen von f am Punkt x.**

Zur Erinnerung an die Schule: die Tangente T durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ mit der Steigung $f'(x_0)$ ist der Graph der linearen Funktion

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Interpretation der Ableitung 6.4:

Die Ableitung gibt an, wie stark sich $f(x)$ ändert, wenn sich x um einen **kleinen** *Wert Δx ändert:*

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \approx f'(x),$$

d.h.

$$\boxed{f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x\ .}$$

Die Definition der Ableitung über den Grenzwert von Sekantensteigungen ist praktisch unnütz, da nur in den allereinfachsten Fällen handhabbar, z.B., bei:

Beispiel 6.5: Betrachte $f(x) = x^2$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2\cdot x\cdot h + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cdot x\cdot h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2\cdot x + h) = 2\cdot x.$$

Für das praktische Rechnen verläßt man sich wiederum auf Rechenregeln: ↓21.6.05

Satz 6.6: (Rechenregeln für's Ableiten)

Ableitungen einiger spezieller Funktionen (sei hierbei c eine konstante Zahl):

$$\frac{d}{dx}\, c = 0, \quad \frac{d}{dx}\, x^n = n\cdot x^{n-1}, \quad \frac{d}{dx}\, e^x = e^x, \quad \frac{d}{dx}\, \ln(x) = \frac{1}{x},$$

$$\frac{d}{dx}\, \sin(x) = \cos(x), \quad \frac{d}{dx}\, \cos(x) = -\sin(x).$$

Die Ableitung einer aus einfachen Funktionen zusammengesetzten Funktion ist über folgende Regeln zu berechnen. Seien f und g differenzierbare Funktionen. Die Ableitung der zusammengesetzten Funktion ($f+g$, $f\cdot g$ etc.) existiert jeweils, wenn f und g ableitbar sind:

- $\frac{d}{dx}\, c\cdot f(x) = c\cdot f'(x)$,
- $\frac{d}{dx}\, \Big(f(x) + g(x)\Big) = f'(x) + g'(x)$ (**„Summenregel“**),
- $\frac{d}{dx}\, f(x)\cdot g(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$ (**„Produktregel“**)
- $\frac{d}{dx}\, \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$ (**„Quotientenregel“**).

Bei der Quotientenregel wird $g(x) \neq 0$ vorausgesetzt (sonst teilt man durch 0).

Beweis: Die Ableitung von x^n, e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$ wird in Übungsaufgaben behandelt. Die Ableitung von $\ln(x)$ wird später in Beispiel 6.18 hergeleitet. Die Linearität $(c\cdot f)' = c\cdot f'$ und $(f+g)' = f' + g'$ folgt unmittelbar aus den Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen. Die Produktregel ergibt sich durch den Grenzwert von

$$\frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h}$$

$$= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

für $h \to 0$. Die Ableitung von $1/g(x)$ ergibt sich aus

$$\frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = -\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \cdot \frac{1}{g(x+h) \cdot g(x)}$$

zu

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}.$$

Zusammen mit der Produktregel liefert dies die Quotientenregel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g(x)} - f(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)^2}.$$

Q.E.D.

Beispiel 6.7:

$$\frac{d}{dx}\ \sqrt[3]{x} = \frac{d}{dx}\ x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Beispiel 6.8: Summen- und Produktregel:

$$\frac{d}{dx}\ \left(x + x^2 \cdot e^x\right) = \left(\frac{d}{dx}\ x\right) + \frac{d}{dx}\left(x^2 \cdot e^x\right)$$

$$= \left(\frac{d}{dx}\ x\right) + \left(\frac{d}{dx}\ x^2\right) \cdot e^x + x^2 \cdot \left(\frac{d}{dx}\ e^x\right) = 1 + 2 \cdot x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x.$$

Beispiel 6.9: Quotientenregel:

$$\frac{d}{dx}\ \frac{e^x}{x} = \frac{\left(\frac{d}{dx}\ e^x\right) \cdot x - e^x \cdot \left(\frac{d}{dx}\ x\right)}{x^2} = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2}.$$

Beispiel 6.10:

$$\frac{d}{dx}\,\frac{\cos(x)\cdot e^x}{x} = \frac{\left(\frac{d}{dx}\,(\cos(x)\cdot e^x)\right)\cdot x - \cos(x)\cdot e^x\cdot\left(\frac{d}{dx}\,x\right)}{x^2}$$

$$= \frac{\left(\left(\frac{d}{dx}\,\cos(x)\right)\cdot e^x + \cos(x)\cdot\left(\frac{d}{dx}\,e^x\right)\right)\cdot x - \cos(x)\cdot e^x\cdot\left(\frac{d}{dx}\,x\right)}{x^2}$$

$$= \frac{\left(-\sin(x)\cdot e^x + \cos(x)\cdot e^x\right)\cdot x - \cos(x)\cdot e^x\cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{-\sin(x)\cdot e^x\cdot x + \cos(x)\cdot e^x\cdot x - \cos(x)\cdot e^x}{x^2}$$

$$= -\frac{\sin(x)\cdot e^x}{x} + \frac{\cos(x)\cdot e^x}{x} - \frac{\cos(x)\cdot e^x}{x^2}.$$

Beispiel 6.11: Bequemer geht's mit MuPAD. Die Funktion `diff` ist für's Differenzieren von Ausdrücken zuständig:

```
>> diff(cos(x)*exp(x)/x, x)

         cos(x) exp(x)   cos(x) exp(x)   sin(x) exp(x)
         ------------- - ------------- - -------------
               x               2               x
                              x
```

(Vergleiche mit Beispiel 6.10.) Alternativ können Funktionen (aber keine Ausdrücke) mittels ′ differenziert werden:

```
>> f:= x -> cos(x)*exp(x)/x:
>> f'(x)

         cos(x) exp(x)   cos(x) exp(x)   sin(x) exp(x)
         ------------- - ------------- - -------------
               x               2               x
                              x
```

So setzt man konkrete Werte in die Ableitung ein:

```
>> f'(1), f'(2)

                        cos(2) exp(2)   sin(2) exp(2)
      -sin(1) exp(1), ------------- - -------------
                              4               2
```

```
>> f'(PI) = float(f'(PI))

         exp(PI)   exp(PI)
         ------- - ------- = -5.02126887
             2       PI
           PI
```

Wie steht's mit der Ableitung von „Hintereinanderschaltungen" (**„Komposition"**) von Funktionen wie z.B. $\sin(\sqrt{x}\,)$?

Satz 6.12: (Die Kettenregel)

Sei $g : D_g \mapsto D_f \subset \mathbb{R}$ differenzierbar am Punkt $x \in D_g$. Sei $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar am Punkt $g(x) \in D_f$. Dann ist die Funktion $h(x) = f(g(x))$ differenzierbar am Punkt x, und es gilt:

$$\frac{d}{dx}\, h(x) = \frac{d}{dx}\, f(g(x)) = \underbrace{f'(g(x))}_{\substack{\text{„äußere}\\ \text{Ableitung"}}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{„innere}\\ \text{Ableitung"}}} .$$

Als Merkregel für $y = g(x)$, $z = f(y) = f(g(x))$:

$$\frac{d}{dx}\, f(g(x)) = \boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}} = f'(y) \cdot g'(x).$$

Beweis: Es gilt

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

$$= \frac{f\Big(g(x) + h \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\Big) - f(g(x))}{h \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Für $h \to 0$ konvergiert $\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ gegen $g'(x)$ und $k := h \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ gegen 0:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f\Big(g(x) + h \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\Big) - f(g(x))}{h \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{f(g(x) + k) - f(g(x))}{k} = f'(g(x)).$$

Q.E.D.

Beispiel 6.13: Für $g(x) = \sqrt{x}$ gilt

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\, x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Zusammen mit $f(y) = \sin(y)$, $f'(y) = \cos(y)$ folgt:

$$\frac{d}{dx}\, \sin(\underbrace{\sqrt{x}}_{y}) = \Big(\frac{d}{dy}\, \sin(y)\Big) \cdot \Big(\frac{d}{dx}\, \sqrt{x}\Big) = \cos(y) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\cos(\sqrt{x}\,)}{2 \cdot \sqrt{x}}.$$

Definition 6.14: (Höhere Ableitungun)

Die Funktion f sei differenzierbar, sei f' die Ableitungsfunktion. Ist diese wiederum differenzierbar, so heißt $f'' = (f')'$ die **„zweite Ableitung von f“**. *Ist diese wiederum differenzierbar, so heißt $f''' = (f'')'$ die* **„dritte Ableitung von f“**. *Usw. Schreibweisen für die n-te Ableitung einer Funktion f:*

$$\frac{d^n}{dx^n}\, f(x) = f^{(n)}(x) = f^{\overbrace{''\cdots''}^{n}}(x).$$

Die „nullte“ Ableitung $f^{(0)}$ ist die Funktion f selbst. Ist die n-te Ableitung $f^{(n)}$ eine stetige Funktion in x, so heißt f **„n-fach stetig differenzierbar“**.

Beispiel 6.15: Offensichtlich gilt $\exp = \exp' = \exp'' = \exp'''$ etc. Die 4-te Ableitung der trigonometrischen Funktionen ist jeweils wieder die Ausgangsfunktion:

$$\frac{d}{dx}\, \sin(x) = \cos(x), \quad \frac{d^2}{dx^2}\, \sin(x) = -\sin(x),$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\, \sin(x) = -\cos(x), \quad \frac{d^4}{dx^4}\, \sin(x) = \sin(x),$$

$$\frac{d}{dx}\, \cos(x) = -\sin(x)\ , \quad \frac{d^2}{dx^2}\, \cos(x) = -\cos(x),$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\, \cos(x) = \sin(x), \quad \frac{d^4}{dx^4}\, \cos(x) = \cos(x).$$

Beispiel 6.16: Höhere Ableitungen in MuPAD: ↓22.6.05

```
>> diff(exp(x^2), x, x) // zweite Ableitung

                          2       2      2
                  2 exp(x ) + 4 x  exp(x )

>> n := 6:
>> diff(exp(x^2), x $ n) // n-te Ableitung

          2         2      2         4      2        6      2
 120 exp(x ) + 720 x  exp(x ) + 480 x  exp(x ) + 64 x  exp(x )
```

Mit der Funktion `subs` (engl.: substitute = ersetze; gemeint ist: ersetze x durch einen Wert) kann man konkrete Werte in Ausdrücke einsetzen. Berechne den Wert der 50-ten Ableitung von $\sin(x^2)\,e^x$ an der Stelle $x = 0$:

```
>> diff(sin(x^2)*exp(x), x $ 50):
>> subs(%, x = 0)

- 328124276424925240287808842587178858047 50 cos(0) exp(0) -

   968115670177443843347973800109839216759 9 sin(0) exp(0)
```

Hier kommt eine Besonderheit von `subs` zutage: der ersetzte Ausdruck wird nicht sofort „ausgewertet“. D.h. in diesem Fall, dass die Vereinfachungen $\cos(0) = 1, \exp(0) = 1, \sin(0) = 0$ nicht automatisch geschehen. Die Funktion `eval` (engl.: evaluate = werte aus) erzwingt die Evaluation:

```
>> eval(%)

          -328124276424925240287808842587178858047 50
```

Kennt man die Ableitung einer invertierbaren Funktion f, so kennt man auch die Ableitung der Umkehrabbildung f^{-1}. Es gilt

$$f^{-1}(f(y)) = y.$$

Leitet man beide Seiten der Gleichung nach y ab, so liefert die Kettenregel

$$f^{-1\prime}(f(y)) \cdot f'(y) = \frac{d}{dy}\, y = 1 \quad \Longrightarrow \quad f^{-1\prime}(f(y)) = \frac{1}{f'(y)}.$$

Satz 6.17: (Ableitung der Inversen)

Sei f differenzierbar und invertierbar, sei f^{-1} die Umkehrfunktion. Ist $f'(y) \neq 0$, so ist f^{-1} an der Stelle $x = f(y)$ differenzierbar, und es gilt

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Merkregel: mit $y = f^{-1}(x)$, $x = f(y)$: $\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{f'(y)}.}$

Beispiel 6.18: Für $f^{-1} = \ln$ als Umkehrfunktion der Funktion $f = \exp$ mit $f' = \exp$ folgt mit $x = \exp(y)$, $y = \ln(x)$:

$$\frac{d}{dx}\ \ln(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\exp(y)} = \frac{1}{\exp(\ln(x)} = \frac{1}{x}.$$

Hierbei ist $x > 0$ vorausgesetzt (damit $\ln(x)$ definiert ist). Für $x < 0$ gilt

$$\frac{d}{dx}\ \ln(-x) = \ln'(-x) \cdot \frac{d}{dx}\ (-x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

Für $x > 0$ ist $|x| = x$, für $x < 0$ ist $|x| = -x$. Zusammengefaßt gilt damit:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\ \ln(|x|) = \frac{1}{x} \quad \text{für alle } x \neq 0.}$$

An der Stelle $x = 0$ ist $\ln(|x|)$ unstetig und damit erst recht nicht differenzierbar.

6.2 Der Mittelwertsatz

Satz 6.19: (Der Satz von Rolle)

Sei $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar auf dem Intervall $[a, b]$. Es gelte $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis: O.b.d.A. sei f nicht konstant (sonst ist die Behauptung sicherlich richtig). Da f differenzierbar ist, ist f auch stetig. Nach Satz 4.22 gibt es ein Minimum oder ein Maximum ξ von f im Inneren des Intervalls (liegen sowohl das Minimum als auch das Maximum am Rand, müßte die Funktion konstant sein). Sei o.B.d.A. ξ ein Maximum (sonst betrachte $-f$). Mit $f(\xi+h) \leq f(\xi)$ für jedes h folgt für die einseitigen Grenzwerte

$$\lim_{h \to 0+0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \leq 0, \quad \lim_{h \to 0-0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \geq 0.$$

Es folgt $f'(\xi) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} = 0.$

Q.E.D.

Satz 6.20: (Der Mittelwertsatz)

Sei $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar auf dem Intervall $[a, b]$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = f'(\xi).$$

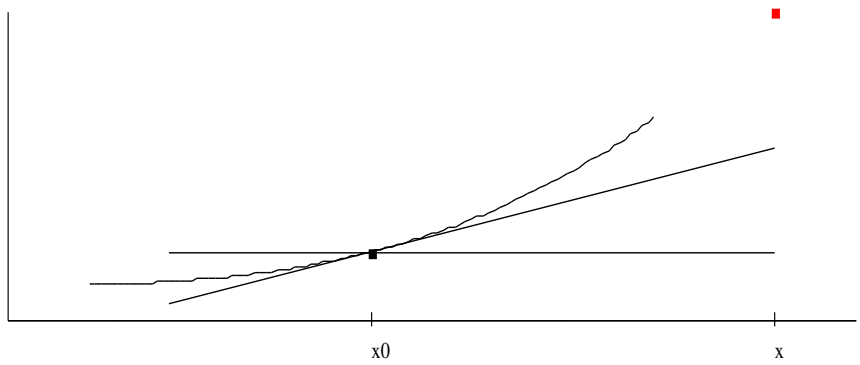
Beweis: Betrachte $g(x) = f(x) - (f(a) - f(b)) \cdot \frac{x-b}{a-b}$. Dies Funktion erfüllt $g(a) = g(b) = f(b)$. Nach Satz 6.19 existiert $\xi \in (a, b)$ mit

$$g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = 0.$$

Q.E.D.

6.3 Taylor–Reihen

Betrachte folgende Funktion, die nur in einer kleinen Umgebung eines Punktes x_0 bekannt ist (genauer: es sind $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$ etc. bekannt). Man interessiert sich für den Funktionswert an einem Punkt x in der Nähe von x_0:



In allereinfachster Näherung würde man (für x dicht bei x_0)

$$f(x) \approx f(x_0)$$

setzen. Die nächstbessere Approximation besteht darin, der Tangente am Punkt x_0 zu folgen:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Im obigen Fall ist deutlich, dass der Funktionswert oberhalb der Tangente zu suchen ist (die Funktion ist „gebogen“: es gilt $f''(x_0) > 0$). Es bietet sich an, einen quadratischen Term hinzuzufügen, um eine bessere Approximation zu erreichen:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + c \cdot (x - x_0)^2.$$

Wie sollte die Konstante c gewählt werden, wie geht es weiter?

Vorüberlegung zu Taylor-Polynomen 6.21:

Zu einer mehrfach differenzierbaren Funktion f finde ein Polynom

$$T_n(x) = c_0 + c_1 \cdot (x - x_0) + \cdots + c_n \cdot (x - x_0)^n,$$

dass sich an einem Punkt x_0 „möglichst eng an den Graphen von f anschmiegt“. D.h., es soll gelten:

$$f(x_0) = T_n(x_0), \quad f'(x_0) = T_n'(x_0), \quad \ldots \quad , f^{(n)}(x_0) = T_n^{(n)}(x_0).$$

Hierdurch ist das Polynom eindeutig bestimmt als

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n.$$

Begründung: Die k-te Ableitung von T_n an der Stelle x_0 ist

$$f^{(k)}(x_0) \overset{(!)}{=} T_n^{(k)}(x_0)$$

$$= c_k \cdot k! \cdot (x - x_0)^0 + c_{k+1} \cdot (k+1) \cdot k \cdot \cdots \cdot 2 \cdot (x - x_0)^1 \Big|_{x=x_0} + \cdots = c_k \cdot k!$$

$$\Rightarrow \quad c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Definition 6.22: (Taylor–Polynome und –Reihen)

Sei f mehrfach am Punkt x_0 differenzierbar. Das Polynom

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

heißt **„Taylor–Polynom“** *n-ten Grades von f am* **Entwicklungspunkt** *x_0. Die unendliche Reihe*

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

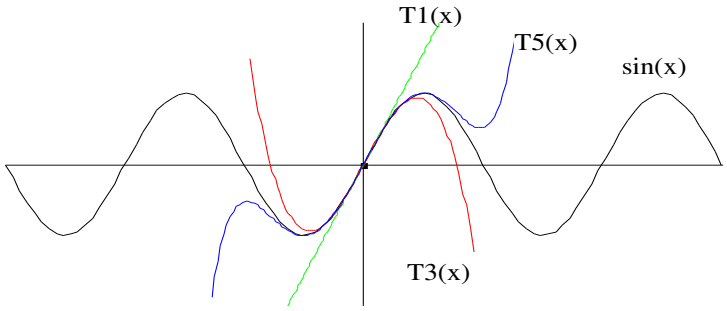
heißt **„Taylor–Reihe“** *von f am Entwicklungspunkt x_0.*

↓28.6.05

Wozu Taylor–Polynome? Taylor–Polynome dienen dazu, komplizierte Funktionen in unmittelbarer Umgebung eines Punktes x_0 durch einfache Funktionen, nämlich Polynome, zu approximieren. Dadurch kann man oft das Verhalten der Funktion in der Nähe spezieller Punkte einfach studieren.

> Taylor–Polynome nähern die Funktion an für Werte x, die dicht beim Entwicklungspunkt x_0 liegen: $T_n(x) \approx f(x)$. Je höher n und je kleiner der Abstand $x - x_0$, um so besser ist die Approximation.

Hier eine Graphik einiger Taylor–Polynome der Funktion $f(x) = \sin(x)$ um den Punkt $x_0 = 0$:



Eine erste Taylor–Reihenberechnung:

Beispiel 6.23: Wir berechnen die Taylor–Reihe von $f(x) = e^x$ um $x_0 = 0$. Wegen $f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = e^{x_0} = e^0 = 1$ ist die Taylor–Reihe

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!} \cdot (x-0) + \frac{1}{2!} \cdot (x-0)^2 + \cdots = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots .$$

Die in Beispiel 3.24 vorgestellte Reihendarstellung der Exponentialfunktion ist also nichts anderes als die Taylor–Entwicklung um den Nullpunkt. Das selbe gilt für die Reihendarstellung der trigonometrischen Funktionen aus Definition 5.10: mit

$$f(x) = \sin(x),\ f'(x) = \cos(x),\ f''(x) = -\sin(x),\ f^{(3)}(x) = -\cos(x),\ f^{(4)}(x) = \sin(x)$$

folgt

$$\begin{array}{lllllllll}
f^{(0)}(0) & = & f^{(4)}(0) & = & f^{(8)}(0) & = & \dots & = & 0, \\
f^{(1)}(0) & = & f^{(5)}(0) & = & f^{(9)}(0) & = & \dots & = & 1, \\
f^{(2)}(0) & = & f^{(6)}(0) & = & f^{(10)}(0) & = & \dots & = & 0, \\
f^{(3)}(0) & = & f^{(7)}(0) & = & f^{(11)}(0) & = & \dots & = & -1
\end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots .$$

Analog für $f(x) = \cos(x)$:

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \cdots .$$

Nun eine Anwendung der Taylor–Entwicklung:

Beispiel 6.24: (Vergleiche auch mit Beispiel 4.12) Betrachte die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} & \text{für } x \neq 0, \\ \dfrac{1}{2} & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Wir behaupten, dass f auch an der Stelle $x = 0$ stetig ist. Wir approximieren $\cos(x)$ durch die Taylor–Entwicklung um den Punkt $x_0 = 0$. Für $x \neq 0$ gilt

$$f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right)}{x^2} = \frac{\frac{x^2}{2} + O(x^4)}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{O(x^4)}{x^2} = \frac{1}{2} + O(x^2).$$

Hiermit ist nun klar: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{2} + O(x^2)\right) = \frac{1}{2}$.

Beispiel 6.25: In MuPAD ist die Funktion `taylor` dafür zuständig, den Beginn einer Taylor–Entwicklung zu berechnen:

```
>> taylor(exp(x), x = 0)

                    2    3    4    5
                   x    x    x    x         6
1 + x + -- + -- + -- + --- + O(x )
                   2    6    24   120
```

Die Taylor–Entwicklung von $f(x) = \frac{1}{1-x}$ um $x_0 = 0$ ist die geometrische Reihe aus Beispiel 3.3. Es werden 10 Terme berechnet:

```
>> taylor(1/(1 - x), x = 0, 10)

                2    3    4    5    6    7    8    9      10
1 + x + x  + x  + x  + x  + x  + x  + x  + x  + x  + O(x  )
```

Der folgende Befehl berechnet eine Taylor–Entwicklung um $x_0 = \pi$:

```
>> taylor(2 + sin(x)*cos(x), x = PI)

                              3              5
                   2 (x - PI)    2 (x - PI)              6
    2 + (x - PI) - ----------- + ----------- + O((x - PI) )
                         3            15
```

Beispiel 6.26: Betrachte $f(x) = 1 - \sqrt{1-x} = 1 - (1-x)^{\frac{1}{2}}$. Wie kann man Werte $f(x)$ für kleines x ohne technische Hilfsmittel ausrechnen? Zunächst die Berechnung der ersten Taylor–Polynome. Als Entwicklungspunkt wählen wir $x_0 = 0$, da wir uns für **kleine** Werte von x interessieren. Man braucht Ableitungen von $f(x)$ am Entwicklungspunkt $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - (1-x)^{\frac{1}{2}}, \quad f(0) = 0, \\ f'(x) &= \tfrac{1}{2} \cdot (1-x)^{-\frac{1}{2}}, \quad f'(0) = \tfrac{1}{2}, \\ f''(x) &= \tfrac{1}{4} \cdot (1-x)^{-\frac{3}{2}}, \quad f''(0) = \tfrac{1}{4}, \\ &\ldots \end{aligned}$$

Hiermit folgt die Entwicklung

$$\begin{aligned} f(x) = 1 - \sqrt{1-x} &\approx f(0) + f'(0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \cdots \\ &= 0 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \cdots \ . \end{aligned}$$

Nun ja, die Terme der Entwicklung sind in der Tat so alle berechenbar, aber das ist ziemlich mühselig. Bequemer mit MuPAD:

```
>> taylor(1 - sqrt(1 - x), x)

                2    3      4      5
      x    x    x    5 x    7 x       6
      - + -- + -- + ---- + ---- + O(x )
      2    8    16   128    256
```

Aus diesen Taylor–Approximationen bekommt man z.B. für $x = 0.1$:

$$\begin{aligned} f(0.1) &= \tfrac{0.1}{2} + \tfrac{0.1^2}{8} + \tfrac{0.1^3}{16} + \cdots \\ &= \ 0.05 \\ &\quad + \ 0.00125 \\ &\quad + \ 0.0000625 \\ &\quad + \ \cdots \\ &= \ 0.05131... \end{aligned}$$

Man sieht der Entwicklung geradezu an, dass die noch nicht berücksichtigten Terme der Entwicklung die angegebenen Dezimalstellen nicht mehr beeinflussen, d.h., die ersten 3 bis 4 Ziffern sind korrekt. Probe mit MuPAD:

```
>> 1 - sqrt(0.9)
                    0.05131670195
```

Für Taylor–Polynome endlichen Grades ist es zumindestens intuitiv klar, dass sie eine Approximation der Funktion liefern, wenn nur x dicht genug beim Entwicklungspunkt x_0 liegt. Es verbleibt jedoch zu klären, ob die unendliche Reihe gegen $f(x)$ konvergiert (bzw., wie weit entfernt x von x_0 liegen darf, damit $f(x)$ durch die Taylor–Reihe dargestellt wird).

Satz 6.27: (Restgliedformel der Taylor–Approximation)

Sei $f(x)$ in einer Umgebung des Punktes x_0 $(n+1)$-fach stetig differenzierbar. Sei x aus dieser Umgebung. Dann existiert ein Punkt ξ im offenen Intervall zwischen x und x_0, so dass gilt:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k}_{\textit{Taylor–Polynom vom Grad } n} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}}_{\textbf{„Restglied“}}.$$

Beweis: (für technisch Interessierte) Wir halten x fest und fassen das Taylor–Polynom als Funktion des Entwicklungspunkts x_0 auf:

$$T_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \cdot (x-t)^k.$$

Die Ableitung dieser Funktion ist eine Teleskopsumme:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\, T_n(t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} \cdot (x-t)^k - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \cdot k \cdot (x-t)^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} \cdot (x-t)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} \cdot (x-t)^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} \cdot (x-t)^k - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} \cdot (x-t)^k \\
&= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \cdot (x-t)^n.
\end{aligned}$$

Betrachte die Hilfsfunktion

$$g(t) = (x-x_0)^{n+1} \cdot T_n(t) + (x-t)^{n+1} \cdot (f(x) - T_n(x_0))$$

mit festem x und x_0, für die

$$\begin{aligned}
g(x_0) &= (x-x_0)^{n+1} \cdot T_n(x_0) + (x-x_0)^{n+1} \cdot (f(x) - T_n(x_0)) \\
&= (x-x_0)^{n+1} \cdot f(x), \\
g(x) &= (x-x_0)^{n+1} \cdot T_n(x) = (x-x_0)^{n+1} \cdot f(x)
\end{aligned}$$

gilt, also $g(x) = g(x_0)$. Nach dem Satz von Rolle 6.19 gibt es ein ξ im offenen Intervall zwischen x und x_0, wo die Ableitung

$$\frac{d}{dt}\, g(t) = (x - x_0)^{n+1} \cdot \frac{d}{dt}\, T_n(t) - (n+1) \cdot (x-t)^n \cdot (f(x) - T_n(x_0))$$

$$= (x - x_0)^{n+1} \cdot \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \cdot (x-t)^n - (n+1) \cdot (x-t)^n \cdot (f(x) - T_n(x_0))$$

$$= (x-t)^n \cdot \Big((x - x_0)^{n+1} \cdot \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} - (n+1) \cdot (f(x) - T_n(x_0)) \Big)$$

verschwindet:

$$0 = (x-\xi)^n \cdot \Big((x - x_0)^{n+1} \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} - (n+1) \cdot (f(x) - T_n(x_0)) \Big)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) - T_n(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}.$$

Q.E.D.

Interpretation 6.28:

Das Restglied

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1} = f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

ist die Differenz zwischen der Funktion $f(x)$ und dem n-ten Taylor–Polynom um x_0. Die Funktion wird genau dann durch die unendliche Taylor–Reihe dargestellt, wenn das Restglied bei festem x, x_0 für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Sind z.B. alle Ableitungen von f beschränkt, so ist dies für beliebiges x und x_0 der Fall, denn $n!$ wächst schneller gegeben ∞ als $|x - x_0|^n$ für jeden Wert von $|x - x_0|$. Dies erklärt z.B., dass die trigonometrischen Funktionen sin *und* cos*, deren Ableitungen nur Werte in $[-1, 1]$ annehmen, global durch ihre Taylor–Reihen dargestellt werden (wir haben sie in Definition 5.10 ja auch über diese Reihen eingeführt).*

Beispiel 6.29: Wir betrachten die Taylor–Entwicklung von $f(x) = \ln(1+x)$ um den Punkt $x_0 = 0$:

$$f(x) = \ln(1+x), \quad f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3},$$

$$\ldots, \quad f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} \cdot (k-1)!}{(1+x)^k}.$$

Mit $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)!$ folgt als Taylor–Reihe

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \mp \cdots,$$

die die Funktion darstellt, solange die Restglieder

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} = \frac{(-1)^n \cdot x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1} \cdot (n+1)}$$

gegen 0 konvergieren. Dies ist für positives $x \leq 1$ mit $0 < \xi < x \leq 1$ offensichtlich der Fall:

$$\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1} \cdot (n+1)} \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Speziell für $x = 1$ ergibt sich der Wert der alternierenden harmonischen Reihe:

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots.$$

Für negatives $x \geq -\frac{1}{2}$ gilt $-\frac{1}{2} \leq x < \xi < 0$:

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1} \cdot (n+1)}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1} \cdot (n+1)} \leq \frac{(1/2)^{n+1}}{(1/2)^{n+1} \cdot (n+1)} = \frac{1}{n+1} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

d.h., auch hier konvergiert das Restglied gegen 0. Weiterhin konvergiert die Taylor–Reihe auch für $-1 < x < -\frac{1}{2}$ gegen $\ln(1+x)$, was wir aus unserer Restgliedformel allerdings nicht herausbekommen (es gibt alternative Restgliedformeln, die dieses Resultat liefern). Zusammengefaßt:

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \pm \cdots \text{ für } x \in (-1, 1].}$$

Für $|x| > 1$ sowie für $x = -1$ divergiert die Taylor–Reihe.

6.4 Monotonie, Extremwerte

↓29.6.05

Eine der wichtigsten Anwendungen der Differentiation ist das Auffinden von Extremwerten. Dazu stellen wir zunächst fest, dass Ableitungswerte (= Tangentensteigungen) auf ansteigendes oder abfallendes Verhalten der Funktion hinweisen:

Satz 6.30: (Ableitungen weisen auf Monotonie hin)

Sei f differenzierbar, die Ableitungsfunktion f' sei stetig. Gilt $f'(x_0) > 0$, so ist f auf einer Umgebung von x_0 streng monoton steigend. Gilt $f'(x_0) < 0$, so ist f auf einer Umgebung von x_0 streng monoton fallend.

Beweis: Da f' stetig ist, gilt für $f'(x_0) > 0$, dass f' auch noch auf einer Umgebung von x_0 positiv ist. Für x, y aus dieser Umgebung von x_0 mit $x < y$ liefert der Mittelwertsatz 6.20

$$f(y) - f(x) = f'(\xi) \cdot (y - x) > 0$$

mit einem Zwischenwert ξ zwischen x und y. Damit ist $f(x)$ monoton steigend auf einer Umgebung des Punktes x, auf der für den Zwischenwert $f'(\xi) > 0$ gilt. Analog folgt, dass $f(x)$ monoton fallend ist, wenn mit $f'(x_0) < 0$ die Ableitung auf einer Umgebung von x_0 negative Werte annimmt.

Q.E.D.

Intuitiv: mit der Interpretation der Ableitung 6.4 ist dies unmittelbar klar. Für kleines Δx gilt:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Extrema sind die Stellen, wo die Funktion „auf der einen Seite“ steigend, „auf der anderen Seite“ fallend ist:

Satz 6.31: (An Extremstellen verschwindet die Ableitung)

Sei f differenzierbar. Ist die Stelle x_0 ein (lokales) Maximum oder Minimum, so gilt $f'(x_0) = 0$.

Man findet also alle Kandidaten für Extremstellen einer Funktion f, indem man die Nullstellen von f' sucht.

Beweis: Genau wie im Beweis des Satzes von Rolle 6.19.

Q.E.D.

Beispiel 6.32: Betrachte $f(x) = 2 \cdot x - x^2$:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} (2 \cdot x - x^2) = 2 - 2 \cdot x \overset{(!)}{=} 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 1.$$

Damit ist $x_0 = 1$ der einzige Punkt, an dem (möglicherweise) ein Extremum vorliegen kann.

Es gibt allerdings Stellen x_0 mit $f'(x_0) = 0$, die keine Extremstellen (sondern sogenannte „Sattelpunkte“) sind. Beispiel: die Funktion $f(x) = x^3$ ist streng monoton steigend. Am Punkt $x_0 = 0$ gilt $f'(x_0) = 3 \cdot x_0^2 = 0$, aber x_0 ist kein Extremum.

Satz 6.33: (Hinreichende Kriterien für Extrema)

Sei f mehrfach differenzierbar. Gilt an einer Stelle x_0

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) < 0,$$

so ist x_0 ein lokales Maximum. Gilt

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) > 0,$$

so ist x_0 ein lokales Minimum.

„Beweis“: Approximiere $f(x)$ in einer Umgebung von x_0 durch das Taylor–Polynom zweiten Grades:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2.$$

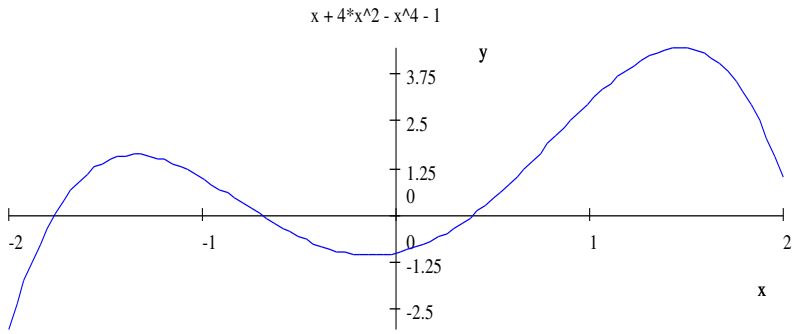
An einem Punkt x_0 mit $f'(x_0) = 0$ gilt näherungsweise:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2.$$

Da $(x - x_0)^2 > 0$ für $x \neq x_0$ ist, sind die Funktionswerte in der Umgebung größer als $f(x_0)$, wenn $f''(x_0) > 0$ gilt (Minimum). Für $f''(x_0) < 0$ sind die Funktionswerte in der Umgebung kleiner als $f(x_0)$ (Maximum).

Beispiel 6.34: Betrachte $f(x) = x + 4\,x^2 - x^4 - 1$:

```
>> f:= x -> x + 4*x^2 - x^4 - 1:
>> plotfunc2d(f(x), x = -2..2)
```



Um die Kandidaten für die Extrema zu finden, werden (numerische Approximationen der) Lösungen der Gleichung $f'(x) = 0$ berechnet. Für numerische Lösungen sind die MuPAD-Funktionen `numeric::solve` oder auch `numeric::fsolve` zuständig. Für polynomiale Gleichungen wird eine Menge aller Lösungen geliefert. Die einzelnen Lösungen lassen sich durch „indizierten Zugriff“ `Kandidaten[1]` etc. auswählen:

```
>> Kandidaten:= numeric::solve(f'(x) = 0, x)

          {-1.346997409, -0.1260001926, 1.472997601}
```

Diese Werte werden in die 2-te Ableitung von f eingesetzt:

```
>> f''(Kandidaten[1])
                          -13.77282422
>> f''(Kandidaten[2])
                           7.809487418
>> f''(Kandidaten[3])
                           -18.0366632
```

Nach Satz 6.33 ist der erste Kandidat ein Maximum, der zweite Kandidat ein Minimum, der dritte Kandidat ein Maximum. Die Graphik bestätigt dies.

6.5 Die de l'Hospitalsche Regel

In $\frac{0}{0}$–Situationen kann man durch Ableiten auch Grenzwerte bestimmen.

Satz 6.35: (de l'Hospitalsche Regel)

Seien f und g differenzierbar, es gelte $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der rechte Grenzwert existiert.

„Beweis:“ Intuitiv: Approximiere Zähler und Nenner durch das Taylor–Polynom ersten Grades:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}{g(x_0) + g'(x_0) \cdot (x - x_0)} = \frac{f'(x_0) \cdot (x - x_0)}{g'(x_0) \cdot (x - x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Für eine saubere Durchführung des Beweises benutze man den Mittelwertsatz 6.20 (unter der Zusatzannahme, dass f' und g' stetig seien. Die Regel gilt aber auch ohne diese Stetigkeit.)

Q.E.D.

Beispiel 6.36: Betrachte erneut die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

aus Beispiel 4.12. Für den Punkt $x_0 = 0$ liegt eine $\frac{0}{0}$–Situation vor. Mit de l'Hospital folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\,(e^x - 1)}{\frac{d}{dx}\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = \lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1,$$

wobei in jedem Schritt die Existenz des jeweils rechts stehenden Grenzwerts vorausgesetzt wird (was gerechtfertigt ist, sobald man ganz rechts angekommen ist).

Die de l'Hospitalsche Regel kann auch mehrfach hintereinander angewendet werden:

Beispiel 6.37: Betrachte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2\cdot x} - 1 - 2\cdot x}{x^2}$. Nach einer Anwendung von de l'Hospital trifft man beim Quotienten der Ableitungen wieder auf eine $\frac{0}{0}$–Situation und kann de l'Hospital erneut anwenden:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2\cdot x} - 1 - 2\cdot x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\,(e^{2\cdot x} - 1 - 2\cdot x)}{\frac{d}{dx}\,x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot e^{2\cdot x} - 2}{2\cdot x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{2\cdot x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\,(e^{2\cdot x} - 1)}{\frac{d}{dx}\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot e^{2\cdot x}}{1} = 2\cdot e^{2\cdot 0} = 2.$$

Bemerkung 6.38: *Die de l'Hospitalsche Regel*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

gilt auch für $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$.

Beispiel 6.39: Mit $f(x) = \ln(x+1)$, $g(x) = \ln(x)$, $f'(x) = \frac{1}{x+1}$, $g'(x) = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1} = 1,$$

wobei in $(*)$ de l'Hospital ein zweites Mal angewendet wurde.

Beispiel 6.40: Mit kleinen Tricks bekommt man eine de l'Hospital-Technik auch sofort für Situationen wie z.B. $0\cdot\infty$ oder auch 1^∞. ↓5.7.05

Für $0\cdot\infty$ ist der Standardtrick, ∞ als $1/0$ (oder manchmal 0 als $1/\infty$) zu schreiben. Z.B.:

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot(e^{1/x} - 1) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}\,(e^{1/x} - 1)}{\frac{d}{dx}\,\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}\cdot e^{1/x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} e^{1/x} = 1.$$

Hierbei wurde die ursprüngliche $\infty \cdot 0$–Situation durch das Umschreiben $x = \frac{1}{1/x}$ in eine $\frac{0}{0}$–Situation verwandelt, auf die de l'Hospital anwendbar ist.

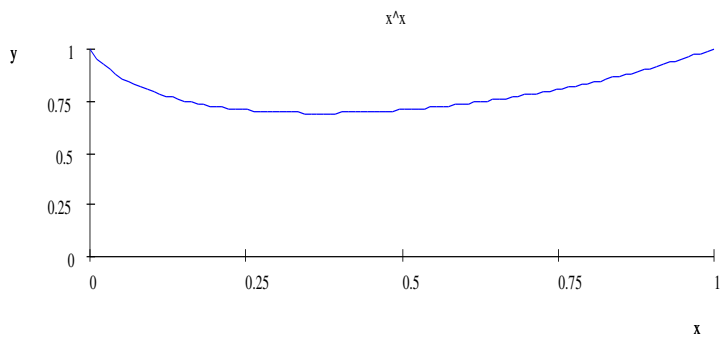
Für eine 1^∞–Situation ist der Standardtrick, die identische Abbildung in der Form $y = \exp(\ln(y))$ einzubringen, was die 1^∞–Situation in ein $0 \cdot \infty$–Problem verwandelt (welches dann wie oben zu behandeln ist). Beispiel:

$$\lim_{x\to 0+0} x^x = \lim_{x\to 0+0} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x\to 0+0} e^{x\cdot\ln(x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0+0}(x\cdot\ln(x))}.$$

Hier ist das $0\cdot(-\infty)$–Problem $\lim\limits_{x\to 0+0} x\cdot\ln(x)$ entstanden, was wie oben per de l'Hospital gelöst wird, indem es in ein $\frac{\infty}{\infty}$–Problem (genauer: in ein $\frac{-\infty}{\infty}$–Problem) umgeschrieben wird:

$$\lim_{x\to 0+0} x\cdot\ln(x) = \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{d}{dx}\ln(x)}{\frac{d}{dx}\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+0}(-x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0+0} x^x = e^{\lim\limits_{x\to 0+0} x\cdot\ln(x)} = e^0 = 1.$$

Der Grenzwert wird durch die folgende MuPAD–Graphik bestätigt:

```
>> plotfunc2d(x^x, x = 0..1, ViewingBox = [0..1, 0..1])
```