# Kapitel 3

# Reihen

Es geht nun um spezielle Folgen, deren Glieder durch Summation entstehen. Für diese „Reihen“ gibt es spezielle Konvergenzkriterien.

## 3.1 Definitionen, Beispiele, Sätze

**Definition 3.1:** (Reihen)

*Die einer komplexen Folge $(z_n)$ zugeordnete* **„Reihe“** *ist die Folge $(S_n)$ der* **„Partialsummen“**

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k.$$

*Existiert ein Grenzwert der Partialsummen, so nennt man ihn den Wert der* **„unendlichen Reihe“** *und schreibt auch* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} z_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$. *Eine Reihe heißt* **„absolut konvergent“**, *wenn der Grenzwert* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |z_k|$ *existiert.*

---

**Beispiel 3.2:** Die sogenannte **„arithmetische Reihe“** besitzt eine explizite Darstellung:

$$\begin{aligned}
S_n = \sum_{k=1}^{n} k &= 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot \Big( 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n \\
&\qquad\quad n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 \Big) \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot \Big( \underbrace{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ Summanden}} \Big) \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1).
\end{aligned}$$

Halten wir fest:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.}$$

Die arithmetische Reihe konvergiert damit uneigentlich gegen $\infty$.

---

**Beispiel 3.3:** Sei $z \in \mathbb{C}$. Eine **„geometrische Reihe“** ist von der Form

$$S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \sum_{k=0}^{n} z^k \ .$$

Auch in diesem Fall kann man eine explizite Formel für $S_n$ angeben:

$$\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} \ .}$$

Dies ist leicht nachzuvollziehen:

$$\begin{aligned}
(1-z) \cdot S_n &= (1-z) \cdot (1 + z + z^2 + \cdots + z^n) \\
&= \quad 1 \quad \cdot (1 + z + z^2 + \cdots + z^n) \\
&\quad\ -z \quad \cdot (1 + z + z^2 + \cdots + z^n) \\
&= \qquad 1 + z + z^2 + \cdots + z^n \\
&\qquad\quad - z - z^2 - \cdots - z^n - z^{n+1} \\
&= \qquad 1 \qquad\qquad\qquad\qquad - z^{n+1}.
\end{aligned}$$

Mit der expliziten Summenformel ist die Konvergenz geometrischer Reihen leicht zu überprüfen. Für $|z| < 1$ konvergiert $z^{n+1}$ gegen 0 (Beispiel 2.10):

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \quad \text{für } |z| < 1 \ .}$$

Diese Reihe konvergiert absolut, denn mit denselben Argumenten konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} |z|^k = \frac{1}{1-|z|} \quad \text{für } |z| < 1 \ .$$

---

**Beispiel 3.4:** Einige Berechnungen mit MuPAD. Für die symbolische Berechnung von Summen ist die Funktion `sum` zuständig:

```
>> sum(k, k = 1..n)
                                  2
                             n   n
                             - + --
                             2   2
```

Durch Faktorisierung mittels `factor` ergibt sich oft eine einfachere Form:

```
>> factor(%)
                          1/2 n (n + 1)
```

Die geometrische Reihe:

```
>> sum(z^k, k = 0..n)
                                 n
                            z z  - 1
                            --------
                             z - 1
>> assume(0 < z < 1):
>> sum(z^k, k = 0..infinity)
                                  1
                             - -----
                               z - 1
```

---

**Beispiel 3.5:** Die periodische Dezimaldarstellung $0\,.\,\overline{d_1d_2d_3}$ mit Dezimalziffern $d_k \in \{0,1,\ldots,9\}$ steht für $0\,.\,d_1d_2d_3\ d_1d_2d_3\ d_1d_2d_3\ldots$. Solche zyklischen Dezimalentwicklungen sind rationale Zahlen. Sei $n = „d_1d_2d_3“ = d_1 \cdot 100 + d_2 \cdot 10 + d_3 \in \{0,\ldots,999\}$: ↓11.5.02

$$\begin{aligned}
0\,.\,\underbrace{d_1d_2d_3}_{n}\ \underbrace{d_1d_2d_3}_{n}\ \underbrace{d_1d_2d_3}_{n}\ \cdots &= \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \frac{d_1}{10^4} + \frac{d_2}{10^5} + \frac{d_3}{10^6} + \cdots \\
&= \frac{d_1 \cdot 100 + d_2 \cdot 10 + d_3}{10^3} + \frac{d_1 \cdot 100 + d_2 \cdot 10 + d_3}{10^6} + \cdots \\
&= \frac{n}{1000} + \frac{n}{1000^2} + \frac{n}{1000^3} + \cdots = n \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1000^k}
\end{aligned}$$

$$= n \cdot \Big( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1000^k} \; - \; 1 \Big) = n \cdot \Big( \frac{1}{1 - \frac{1}{1000}} - 1 \Big) = n \cdot \Big( \frac{1000}{999} - 1 \Big) = \frac{n}{999}.$$

Bemerkung: statt der formalen Rechnung kann man die Beweisidee für die Summenformel der geometrischen Reihe explizit nachvollziehen, was in diesem Fall als "Rechentrick" sogar ganz einfach zu merken ist:

$$\begin{array}{rrcl} & 1000 \cdot x & = & d_1 d_2 d_3 \,.\, d_1 d_2 d_3 \; d_1 d_2 d_3 \; \ldots \\ - & x & = & 0 \,.\, d_1 d_2 d_3 \; d_1 d_2 d_3 \; \ldots \\ \hline & 999 \cdot x & = & \underbrace{d_1 d_2 d_3}_{n} \,.\, 000\,000 \; \ldots \end{array} \qquad \Rightarrow \quad x = \frac{n}{999}.$$

---

Das Cauchy-Kriterium (Definition 2.31 und Satz 2.32 ) liefert folgendes Konvergenzkriterium für Reihen:

**Satz 3.6:** (Das Cauchy-Kriterium für Reihen)

*Die Reihe $\sum_k z_k$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon)$ gibt, so dass $\Big| \sum_{k=n}^{m} z_k \Big| \leq \epsilon$ gilt für alle $m \geq n \geq N(\epsilon)$.*

**Beweis:** Nach dem Cauchy-Kriterium konvergiert die Folge $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon)$ gibt, so dass

$$|S_m - S_n| \leq \epsilon \text{ für alle } m, n \geq N(\epsilon).$$

Hierbei ist $S_m - S_n = \sum_{k=n+1}^{m} z_k$ für $m > n$. Ersetzt man $n$ durch $n - 1$ ergibt sich das angegebene Kriterium.

Q.E.D.

Als Folgerung ergibt sich, dass absolut konvergente Reihen konvergieren:

**Satz 3.7:** (Absolute Konvergenz impliziert Konvergenz)

*Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ konvergiert, dann auch $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$.*

**Beweis:** Die Dreiecksungleichung liefert $\Big| \sum_{k=n}^{m} z_k \Big| \leq \sum_{k=n}^{m} |z_k|$. Erfüllt $\sum_k |z_k|$ das Cauchy-Kriterium 3.6, so ist dieses Kriterium automatisch auch für $\sum_k z_k$ erfüllt.

Q.E.D.

Nur Reihen über Nullfolgen können konvergieren:

**Satz 3.8:**

*Wenn die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ *konvergiert, dann ist* $(z_k)$ *eine Nullfolge.*

**Beweis:** Das Cauchy-Kriterium 3.6 mit $m = n$ besagt, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon)$ gibt, so dass

$$\Big|\sum_{k=n}^{n} z_k\Big| = |z_n| \leq \epsilon$$

für alle $n \geq N(\epsilon)$ gilt. Dies ist die Konvergenz $(z_n) \to 0$.

Q.E.D.

Dies ist kein Konvergenz- sondern ein Divergenzkriterium: bilden die Summanden keine Nullfolge, muß die Reihe divergieren!

---

**Beispiel 3.9:** Die Reihe $\sum_k \frac{k}{k+1}$ konvergiert nicht, da die Summanden $\frac{k}{k+1}$ nicht gegen 0 konvergieren (sie konvergieren gegen 1).

---

Die Umkehrung gilt nicht: bilden die Summanden eine Nullfolge, so kann man <u>nicht</u> darauf schließen, dass die Reihe konvergiert. Ein Gegenbeispiel:

---

**Beispiel 3.10:** Die sogenannte **„harmonische Reihe“** $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ ist unbeschränkt, d.h., sie divergiert.

**Beweis:** Betrachte die Teilfolge $(S_{2^m})$:

$$S_{2^m} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>\frac{2}{2^2}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}}_{>\frac{2^2}{2^3}=\frac{1}{2}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2^{m-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^m}}_{>\frac{2^{m-1}}{2^m}=\frac{1}{2}}$$

$$\geq 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{m \text{ Terme}} = 1 + \frac{m}{2}.$$

Da $(S_n)$ monoton wächst, konvergiert $(S_n)$ uneigentlich gegen $\infty$.

Q.E.D.

Auf dieses Argument kommen wir später beim „Kondensationskriterium“ 3.20 zurück.

---

Der Satz 2.28 liefert für reelle Reihen folgendes Konvergenzkriterium:

**Satz 3.11:** (Reihenkonvergenz bei positiven Summanden)

*Sei* $(x_n)$ *eine reelle Nullfolge mit* $x_n \geq 0$. *Die Reihe* $\sum_k x_k$ *konvergiert dann und genau dann, wenn die Partialsummen* $\sum_{k=1}^{n} x_k$ *nach oben beschränkt sind.*

**Beweis:** Wegen $x_k \geq 0$ ist die Partialsummenfolge $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ monoton steigend. Ist sie beschränkt, konvergiert sie nach Satz 2.28. Konvergiert sie, ist sie selbstverständlich beschränkt.

Q.E.D.

Wir erinnern an Beispiel 2.29:

---

**Beispiel 3.12:** Mit $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k \geq 2^{k-1}$ sind die folgenden Partialsummen nach oben beschränkt:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \underbrace{\frac{1}{1!}}_{=\frac{1}{2^0}} + \underbrace{\frac{1}{2!}}_{=\frac{1}{2^1}} + \underbrace{\frac{1}{3!}}_{<\frac{1}{2^2}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{n!}}_{<\frac{1}{2^{n-1}}}$$

$$\leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \leq 3.$$

Damit konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ gegen einen Wert $\leq 3$ (es ist die Eulersche Zahl 2.718...).

---

## 3.2 Rechenregeln und das Cauchy-Produkt

Die Rechenregeln 2.13 liefern sofort:

**Satz 3.13:** (Rechenregeln)

*a) Wenn $\sum_k z_k$ konvergiert, dann auch $\sum_k c \cdot z_k$ für jedes $c \in \mathbb{C}$:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot z_k = c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} z_k.$$

*b) Wenn $\sum_k z_k$ und $\sum_k \tilde{z}_k$ konvergieren, dann auch $\sum_k (z_k \pm \tilde{z}_k)$:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (z_k \pm \tilde{z}_k) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k \ \pm \ \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{z}_k.$$

**Beweis:** Satz 2.13 a) + b) angewendet auf die Partialsummen.

Q.E.D.

Es macht Sinn, Reihen miteinander zu multiplizieren. Da das Distributivgesetz aus dem Produkt zweier Partialsummen eine endliche Doppelsumme

$$(a_1 + \cdots + a_n) \cdot (b_1 + \cdots + b_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i \cdot b_j$$

ergibt, muss man die Summanden zunächst gezielt zusammenfassen, um zu einer Folge von Partialsummen für das Produkt zu kommen. Wir führen eine „Anordnung“ ein, indem wir einen formalen Ordnungsparameter $\zeta$ einführen:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \zeta^k \,|\, \zeta = 1 \ .$$

Das Produkt ordnen wir dann nach Potenzen von $\zeta$:

$$(a_1 \cdot \zeta + a_2 \cdot \zeta^2 + \cdots) \cdot (b_1 \cdot \zeta + b_2 \cdot \zeta^2 + \cdots)$$

$$= a_1 \cdot b_1 \cdot \zeta^2 + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) \cdot \zeta^3 + (a_1 \cdot b_3 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_1) \cdot \zeta^4 + \cdots \ .$$

Die einzelnen $\zeta$-Potenzen liefern die Summanden der Partialsummen. Dies motiviert die folgende Definition:

**Definition 3.14:** (Das Cauchy-Produkt von Reihen)

*Das* **„Cauchy-Produkt“** *(die* **„Faltung“***) zweier Reihen* $\sum_k a_k$, $\sum_k b_k$ *ist die Reihe* $\sum_k c_k$ *mit*

$$c_k = \sum_{\substack{i,j \\ i+j=k}} a_i \cdot b_j .$$

**Satz 3.15:** (Konvergenz des Cauchy-Produkts) $\boxed{\downarrow 17.5.02}$

*Sind die Reihen* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *absolut konvergent, so auch das Cauchy-Produkt* $\sum_{k=2}^{\infty} c_k$. *Es gilt* $\sum_{k=2}^{\infty} c_k = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\Big) \cdot \Big(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\Big)$.

**Beweis:** (Für technisch Interessierte) Für die Partialsummen des Cauchy-Produkts gilt

$$\sum_{k=2}^{n} |c_k| = \sum_{k=2}^{n} \Big|\sum_{\substack{i,j \\ i+j=k}} a_i \cdot b_j\Big| \le \sum_{k=2}^{n} \sum_{\substack{i,j \\ i+j=k}} |a_i| \cdot |b_j|$$

$$\le \sum_{\substack{i,j \\ i\le n, j\le n}} |a_i| \cdot |b_j| = \Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i|\Big) \cdot \Big(\sum_{j=1}^{n} |b_j|\Big).$$

Da die rechte Seite für $n \to \infty$ konvergiert, ist die rechte Seite beschränkt. Nach Satz 3.11 liefert dies die Konvergenz von $\sum_k |c_k|$, also die absolute Konvergenz

des Cauchy-Produkts.
Das Cauchy-Produkt konvergiert gegen das Produkt der einzelnen Summen:

$$\Big|\underbrace{\Big(\sum_{i=1}^{2n} a_i\Big)}_{S_{2n}^{(a)}} \cdot \underbrace{\Big(\sum_{j=1}^{2n} b_j\Big)}_{S_{2n}^{(b)}} - \underbrace{\sum_{k=2}^{2n} c_k}_{S_{2n}^{(c)}}\Big| = \Big|\sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{2n} a_i \cdot b_j - \sum_{k=2}^{2n}\sum_{\substack{i,j\\ i+j=k}} a_i \cdot b_j\Big|$$

$$= \Big|\sum_{\substack{i,j\\ i\le 2n, j\le 2n\\ i+j>2n}} a_i \cdot b_j\Big| \le \sum_{\substack{i,j\\ i\le 2n, j\le 2n\\ i+j>2n}} |a_i| \cdot |b_j|$$

$$\le \max(|a_n|, \ldots, |a_{2\,n}|) \cdot \sum_{j=n+1}^{2\,n} |b_j| \;+\; \max(|b_n|, \ldots, |b_{2\,n}|) \cdot \sum_{i=n+1}^{2\,n} |a_i|.$$

Da $(a_n)$, $(b_n)$ Nullfolgen sind, ist der letzte Ausdruck eine Nullfolge. Für die Partialsummen folgt

$$S_{2\,n}^{(c)} = S_{2\,n}^{(a)} \cdot S_{2\,n}^{(b)} + \text{Nullfolge}_n,$$

was zur Behauptung $S_n^{(c)} \to (\sum_i a_i) \cdot (\sum_j b_j)$ führt.

Q.E.D.

## 3.3 Spezielle Konvergenzkriterien

Es gibt eine Anzahl spezieller Kriterien für die Konvergenz/Divergenz von Reihen:

**Satz 3.16:** (Majorantenkriterium)

*Sei $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ eine konvergente Reihe mit reellen Summanden $x_k \ge 0$. Sei $(z_n)$ eine komplexe Folge. Gilt für alle bis auf endlich viele Indizes $|z_k| \le x_k$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ absolut.*
*Bezeichung: $\sum_k x_k$ heißt* **„konvergente Majorante“** *für $\sum_k z_k$.*

**Beweis:** Die Partialsummen von $\sum_k |z_k|$ sind beschränkt (o.B.d.A. nehmen wir an, $|z_k| \le x_k$ gilt für alle Indizes):

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k| \le \sum_{k=1}^{n} x_k \le \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

Nach Satz 3.11 konvergiert $\sum_k |z_k|$, d.h., die Reihe $\sum_k z_k$ konvergiert absolut.

Q.E.D.

**Satz 3.17:** (Minorantenkriterium)

*Sei $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ eine divergente Reihe mit reellen Summanden $x_k \geq 0$ Sei $(y_n)$ eine reelle Folge. Gilt für alle bis auf endlich viele Indizes $x_k \leq y_k$, so divergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ (genauer: sie konvergiert uneigentlich gegen $\infty$).*

*Bezeichung: $\sum_k x_k$ heißt* **„divergente Minorante“** *für $\sum_k y_k$.*

**Beweis:** Würde die Reihe $\sum_k y_k$ konvergieren, wäre sie eine konvergente Majorante für $\sum_k x_k$, und nach Satz 3.16 müßte $\sum_k x_k$ konvergieren.

Q.E.D.

**Satz 3.18:** (Quotientenkriterium)

*Sei $(z_n)$ eine komplexe Folge. Gilt für alle bis auf endlich viele Indizes $\frac{|z_{k+1}|}{|z_k|} \leq c$ mit einem Wert $c \in (0,1)$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ absolut.*

**Beweis:** Aus der Abschätzung folgt

$$|z_k| \leq c \cdot |z_{k-1}| \leq c^2 \cdot |z_{k-2}| \leq \cdots \leq c^{k-1} \cdot |z_1|.$$

Die geometrische Reihe $\sum_k |z_1| \cdot c^{k-1}$ konvergiert nach Beispiel 3.3 für $c \in (0,1)$ und ist damit eine konvergente Majorante für $\sum_k z_k$.

Q.E.D.

**Satz 3.19:** (Wurzelkriterium)

*Sei $(z_n)$ eine komplexe Folge. Gilt für alle bis auf endlich viele Indizes $\sqrt[k]{|z_k|} \leq c$ mit einem Wert $c \in (0,1)$, so konvergiert die komplexe Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ absolut.*

**Beweis:** Aus der Abschätzung folgt $|z_k| \leq c^k$. Damit ist die geometrische Reihe $\sum_k c^k$ für $c \in (0,1)$ eine konvergente Majorante für $\sum_k z_k$.

Q.E.D.

**Satz 3.20:** (Kondensationskriterium)

*Ist $(x_n)$ eine monoton fallende Folge positiver reeller Zahlen, so konvergiert $\sum_k x_k$ dann und genau dann, wenn die Reihe*

$$\sum_{m}^{\infty} 2^m \cdot x_{2^m}$$

*konvergiert.*

**Beweis:** Nach Satz 3.11 ist zu entscheiden, ob die Partialsummen $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ beschränkt sind. Betrachte

$$S_{2^{n+1}-1} = \underbrace{x_1}_{=1\cdot x_1} + \underbrace{x_2 + x_3}_{\leq 2\cdot x_2} + \underbrace{x_4 + \cdots + x_7}_{\leq 4\cdot x_4} + \cdots + \underbrace{x_{2^n} + \cdots + x_{2^{n+1}-1}}_{\leq 2^n\cdot x_{2^n}}$$

$$\leq \sum_{m=0}^{n} 2^m \cdot x_{2^m}.$$

Konvergiert $\sum_m 2^m \cdot x_{2^m}$, so sind alle Partialsummen $S_n$ beschränkt und $\sum_k x_k$ konvergiert. Umgekehrt gilt:

$$S_{2^n} = x_1 + \underbrace{x_2}_{=1\cdot x_2} + \underbrace{x_3 + x_4}_{\geq 2\cdot x_4} + \underbrace{x_5 + \cdots + x_8}_{\geq 4\cdot x_8} + \cdots + \underbrace{x_{2^{n-1}+1} + \cdots + x_{2^n}}_{\geq 2^{n-1}\cdot x_{2^n}}$$

$$\geq x_1 + \sum_{m=1}^{n} 2^{m-1} \cdot x_{2^m} \geq \frac{1}{2} \cdot \sum_{m=1}^{n} 2^m \cdot x_{2^m}.$$

Divergiert $\sum_m 2^m \cdot x_{2^m}$, so sind alle Partialsummen unbeschränkt und $\sum_k x_k$ divergiert.

Q.E.D.

Hier eine Reihe von Beispielen zu den diversen Kriterien:

---

**Beispiel 3.21:** Wir setzen das Majorantenkriterium 3.16 ein, um zu zeigen, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert. Dazu machen wir eine Anleihe beim kommenden Beispiel 3.31, wo die Konvergenz

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = 1$$

gezeigt wird. Dazu schätzen wir $x_k = \frac{1}{k^2}$ gegen $\tilde{y}_k = \frac{1}{k\cdot(k+1)}$ ab ($\sum_k \tilde{y}_k$ soll als konvergente Majorante für $\sum_k x_k$ dienen). Es gilt zwar nicht unmittelbar $|x_k| = x_k \leq \tilde{y}_k$, aber mit

$$k^2 \geq \frac{k \cdot (k+1)}{2}$$

($\Leftrightarrow\ 2 \cdot k^2 \geq k^2 + k\ \Leftrightarrow k^2 \geq k$; dies ist für alle $k \geq 1$ erfüllt) folgt

$$x_k = \frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{k \cdot (k+1)} = 2 \cdot \tilde{y}_k =: y_k.$$

Mit Beispiel 3.31 folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} y_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k \cdot (k+1)} = 2.$$

Das Majorantenkriterium garantiert hiermit die Konvergenz von $\sum_k \frac{1}{k^2}$. Welchen Wert diese Reihe hat, haben wir damit allerdings nicht herausbekommen.

---

**Beispiel 3.22:** Die in Beispiel 3.21 betrachtete Summe wird mit MuPAD berechnet:

```
>> sum(1/k^2, k = 1..infinity)
                                 2
                              PI
                              ---
                               6
```

Hierbei ist `PI` $= \pi = 3.1415....$ Zur Kontrolle vergleichen wir diesen Wert mit einer langen, aber endlichen Summe:

```
>> float(%)
                          1.644934067

>> sum(1.0/k^2, k = 1..1000)

                          1.643934567
```

(Das passt einigermaßen.) Einige weitere Summen, z.B. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k \cdot (k+2) \cdot (k+5)}$:

```
>> sum((k + 1)/k/(k + 2)/(k + 5), k = 1..infinity)

                             323/900
```

Oder auch $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$:

```
>> sum(1/k^3, k = 1..infinity)

                             zeta(3)
```

Dieser Reihenwert hat keine elementare Darstellung. Stattdessen stellt MuPAD ihn mittels der (unter Mathematikern) berühmten speziellen Funktion `zeta` (die sogenannte Riemannsche Zeta-Funktion) dar. Das nützt uns hier relativ wenig, da wir mit dieser Funktion nicht näher vertraut sind. Zumindestens kann man hiermit aber bequem Gleitpunktnäherungen berechnen:

```
>> float(%)
                          1.202056903
```

Die Web-Seite `mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunction.html` liefert weitere Informationen zur Zeta-Funktion.

**Beispiel 3.23:** Die Reihe $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ konvergiert nicht für $n \to \infty$: zwar konvergieren die Summanden $x_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$ gegen 0, aber „nicht schnell genug“:

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{k}} = 18.5896... \,, \quad \sum_{k=1}^{1000} \frac{1}{\sqrt{k}} = 61.8010... \,, \quad \sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}} = 198.5446... \,.$$

Genauer gesagt: die Reihe „konvergiert uneigentlich gegen $\infty$“. Beweis: die nach Beispiel 3.10 divergierende harmonische Reihe ist eine divergente Minorante:

$$\frac{1}{k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

---

18.5.02↓ **Beispiel 3.24:** Betrachte die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$, wo $z$ eine beliebige feste komplexe Zahl ist (beachte: $0! = 1$). Diese Reihe konvergiert nach dem Quotientenkriterium. Mit $z_k = \dfrac{z^k}{k!}$ ist der Quotient zweier aufeinander folgender Summanden

$$\frac{|z_{k+1}|}{|z_k|} = \frac{\frac{|z|^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{|z|^k}{k!}} = \frac{|z|^{k+1} \cdot k!}{|z|^k \cdot (k+1)!} = \frac{|z|^k \cdot |z| \cdot k!}{|z|^k \cdot (k+1) \cdot k!} = \frac{|z|}{k+1}.$$

Für hinreichend große $k$ (nämlich $k \geq 2 \cdot |z|$) gilt

$$\frac{|z_{k+1}|}{|z_k|} \leq \frac{|z|}{2 \cdot |z| + 1} < \frac{|z|}{2 \cdot |z|} = \frac{1}{2} =: c < 1,$$

womit das Quotientenkriterium erfüllt ist.

Der Grenzwert heißt **„Exponentialfunktion“** $e^z$ bzw. $\exp(z)$. In der Tat stimmt die Reihe mit der in Satz 2.20 benutzten Definition überein (was noch zu zeigen wäre):

$$\boxed{e^z = \exp(z) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots \,.}$$

Die Reihendarstellung der exp-Funktion bietet einige Vorteile. Für kleine Argumente $z$ gilt z.B. die Näherung

$$\exp(z) = 1 + \underbrace{z}_{\text{klein}} + \underbrace{\frac{z^2}{2!}}_{\text{noch kleiner}} + \underbrace{\frac{z^3}{3!}}_{\text{noch viel kleiner}} + \cdots \approx 1 + z + \frac{z^2}{2} \,.$$

Wir ersparen uns hier den Beweis für

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

der einigen technischen Abschätzungsaufwand erfordert.

**Beispiel 3.25:** Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ konvergiert genau dann, wenn $p > 1$ gilt.

Beweis: für festes $p > 0$ ist die Folge $x_k = 1/k^p$ monoton falled. Das Kondensationskriterium liefert die Konvergenz, wenn

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^m \cdot x_{2^m} = \sum_{m=1}^{\infty} 2^m \cdot \frac{1}{(2^m)^p} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2^m)^{p-1}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{p-1})^m}$$

konvergiert. Diese geometrische Reihe konvergiert, wenn $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$ gilt, d.h., für $p > 1$. Für $p \leq 1$ ist die harmonische Reihe $\sum_k \frac{1}{k}$ eine divergierende Minorante.

## 3.4 Bedingte Konvergenz, Umordnungen

Es gibt einen Spezialfall, wo die Tatsache, dass die Summanden eine Nullfolge bilden, für die Konvergenz der Reihe ausreicht: alternierende Reihen:

**Satz 3.26:** (Das Leibniz–Kriterium für alternierende Reihen)

*Eine reelle Folge $(x_n)$ heißt* **"alternierend"**, *wenn für jeden Index $x_n$ und $x_{n+1}$ unterschiedliche Vorzeichen haben. Ist zusätzlich $|x_n|$ monoton fallend und $(x_n)$ eine Nullfolge, so konvergiert die zugeordnete „alternierende Reihe" $\sum_k x_k$.*

**Beweis:** Fixiere ein beliebiges $n$. Durch Induktion nach $m$ ist leicht zu zeigen, dass

$$\Big| \sum_{k=n}^{m} x_k \Big| \leq |x_n|$$

für alle $m \geq n$ gilt. Da $|x_n|$ eine Nullfolge bildet, ist das Cauchy-Kriterium 3.6 erfüllt.

Q.E.D.

**Beispiel 3.27:** Die **„alternierende harmonische Reihe"**

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

erfüllt das Leibniz-Kriterium und konvergiert (der Grenzwert ist $\ln(2)$).

Die alternierende harmonische Reihe konvergiert, aber sie konvergiert nicht absolut (die harmonische Reihe ist bekanntlich divergent). Für solche „bedingt" (= nicht absolut) konvergente Reihen ist höchste Vorsicht geboten: die Reihenfolge der Summation ist wichtig!

**Beobachtung 3.28:**

*Für die alternierende harmonische Reihe des letzten Beispiels gilt:*

$$\begin{array}{rcl} S & = & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots \\ \frac{S}{2} & = & \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots \\ \hline \frac{3 \cdot S}{2} & = & 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots \end{array}$$

*Man kann sich leicht überlegen, dass in der letzten Reihe der Kehrwert jeder natürlichen Zahl genau einmal auftaucht. In der Tat erhält sie alle Summanden der alterniernenden Reihe $S$, nur dass die Summanden anders angeordnet sind:*

> *„Nehme 2 positive Summanden von $S$, dann einen negativen, dann die beiden nächsten positiven, dann den nächsten negativen usw.“*

**Diese Umordnung hat den Grenzwert verändert!**

Erstaunlicherweise kann man durch eine geeignete Umsummation *jeden beliebigen* Grenzwert erreichen:

**Satz 3.29:** (Riemannscher Umordnungssatz für bedingt konvergente Reihen)

*Sei $\sum_k x_k$ eine konvergierende reelle Reihe, die nicht absolut konvergiert: $\sum_k |x_k| = \infty$. Dann gibt es zu jedem $S \in \mathbb{R}$ eine bijektive Abbildung $P : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (eine* **“Permutation“ von** $\mathbb{N}$*), so dass*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{P(k)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_{P(k)} = S$$

*gilt.*

Die **Beweisidee** ist sehr einfach, der Beweis ist konstruktiv. Sei

$$N^+ = \{n \in \mathbb{N}, x_n \geq 0\}, \quad N^- = \{n \in \mathbb{N}, x_n < 0\}.$$

Man überlegt sich, dass die Divergenz von $\sum_k |x_k|$ zusammen mit der Konvergenz von $\sum_k x_k$ bedeutet, dass $\sum_{k\in N^+} x_k$ gegen $\infty$ und $\sum_{k\in N^-} x_k$ gegen $-\infty$ konvergiert. Zu gegebenem $S$ wähle solange Indizes in $N^+$, bis die Summe über die entsprechenden positiven $x_k$ zum ersten Mal $S$ überschreitet (wegen $\sum_{k\in N^+} x_k = \infty$ wird dies sicherlich irgendwann geschehen). Dann wähle solange Indizes in $N^-$, bis durch Hinzuaddieren der entsprechenden negativen $x_k$ zum ersten Mal $S$ unterschritten wird (wegen $\sum_{k\in N^-} x_k = -\infty$ wird dies sicherlich

irgendwann geschehen). Dann wähle wieder Indizes auf $N^+$, bis $S$ überschritten wird usw. Die Differenz zwischen $S$ und der überschreitenden bzw. unterschreitenden Zwischensumme ist jeweils kleiner als das letzte Folgenelement, das addiert bzw. subtrahiert wurde. Die Folgenglieder sind aber eine Nullfolge, da $\sum_k x_k$ konvergiert. Damit konvergieren die konstruierten Zwischensummen gegen $S$. Details: siehe z.B. Chr. Blatter, Analysis 1, Springer.

Q.E.D.

↓24.5.02

Glücklicherweise ergibt sich dieses Umordnungsproblem bei absolut konvergierenden Reihen nicht. Jede Umordnung der Reihenglieder liefert die selbe Summe:

**Satz 3.30:** (Umordnungssatz für absolut konvergente Reihen)

*Sei $\sum_k z_k$ eine (komplexe) absolut konvergierende Reihe. Dann konvergiert $\sum_k z_{P(k)}$ für jede Permutation $P$ absolut gegen den selben Grenzwert.*

**Beweis:** siehe z.B. Chr. Blatter, Analysis 1, Springer.

## 3.5 Summation per Partialbruchzerlegung

Es gibt einige Situationen, wo man (endliche) Reihen explizit berechnen kann. Der Reihenwert ergibt sich als Grenzwert des expliziten Ausdrucks:

---

**Beispiel 3.31:** Betrachte $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\cdot(k+1)}$. Die entscheidende Beobachtung ist:

$$\frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

(man bringe $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ auf den Hauptnenner). Hiermit ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\cdot(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{n} \\ &\quad - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} - \cdots - \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1} \\ &= 1 - \tfrac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Man nennt so eine Summe auch „Teleskopsumme“: sie läßt sich zu einigen wenigen Termen „zusammenschieben“, da sich fast alle Summanden aufheben. Es folgt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\cdot(k+1)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\cdot(k+1)} = \lim_{n\to\infty}\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big) = 1.$$

---

Der im obigen Beispiel angewendete Trick läßt sich systematisch anwenden:

**Rezept (Summation durch „Partialbruchzerlegung“) 3.32:**

*Betrachte die Summe $\sum_k a_k$ über einen „rationalen“ Ausdruck in $k$:*

$$a_k = \frac{c_0 + c_1 \cdot k + \cdots + c_p \cdot k^p}{d_0 + d_1 \cdot k + \cdots + d_q \cdot k^q}$$

*mit $p + 2 \leq q$ (für $p + 2 > q$ divergiert die Reihe $\sum_k a_k$).*

- *Schritt 1: Bestimme die Nullstellen $k_1, k_2, \ldots, k_q$ des Nennerpolynoms $P(k) = d_0 + d_1 \cdot k + \cdots + d_q \cdot k^q = d_q \cdot (k - k_1) \cdot \cdots \cdot (k - k_q)$.*
- *Schritt 2: Sind alle Nullstellen einfach, so kann man den Ausdruck stets folgendermaßen additiv zerlegen: es gibt Werte $e_1, e_2, \ldots, e_q$, so dass*

  $$a_k = \frac{c_0 + c_1 \cdot k + \cdots + c_p \cdot k^p}{d_0 + d_1 \cdot k + \cdots + d_q \cdot k^q} = \frac{e_1}{k - k_1} + \frac{e_2}{k - k_2} + \cdots + \frac{e_q}{k - k_q} \ .$$

  *Finde diese Werte $e_1, \ldots, e_q$! Man bringt dazu die rechte Seite dieses Ansatzes auf den Hauptnenner (das ergibt nach Konstruktion das Nennerpolynom $P(k)$). Das Zählerpolynom muss mit dem Zähler der linken Seite übereinstimmen. Vergleiche in den Zählern die Koeffizienten der $k$-Potenzen, die einzeln übereinstimmen müssen. Dies führt zu einem (stets lösbaren)* **linearen Gleichungssystem** *für $e_1, \ldots, e_q$.*
- *Schritt 3: Es gilt*

  $$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{e_1}{k - k_1} + \frac{e_2}{k - k_2} + \cdots + \frac{e_q}{k - k_q} \right)$$

  $$= \sum_{k=1}^{n} \frac{e_1}{k - k_1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{e_2}{k - k_2} + \cdots + \sum_{k=1}^{n} \frac{e_2}{k - k_q}.$$

  *Unterscheiden sich die Nullstellen um ganze Zahlen, so läßt sich diese Summe von Summen als „Teleskopsumme“ zu einem expliziten Ausdruck in $n$ vereinfachen.*

---

**Beispiel 3.33:** Betrachte $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{k}{k^3 - 2 \cdot k^2 - k + 2}$.

**Schritt 1:** Die Nullstellen des Nennerpolynoms sind $k_1 = 1$, $k_2 = -1$, $k_3 = 2$:

$$k^3 - 2 \cdot k^2 - k + 2 = (k - 1) \cdot (k + 1) \cdot (k - 2).$$

**Schritt 2:** Mache den Ansatz:

$$\frac{k}{k^3 - 2 \cdot k^2 - k + 2} = \frac{e_1}{k-1} + \frac{e_2}{k+1} + \frac{e_3}{k-2}.$$

Bringe die rechte Seite auf den Hauptnenner und ordne den Zähler nach $k$-Potenzen:

$$\begin{aligned}
&\frac{e_1}{k-1} + \frac{e_2}{k+1} + \frac{e_3}{k-2} \\
&\quad = \frac{e_1 \cdot (k+1) \cdot (k-2) + e_2 \cdot (k-1) \cdot (k-2) + e_3 \cdot (k-1) \cdot (k+1)}{(k-1) \cdot (k+1) \cdot (k-2)} \\
&\quad = \frac{e_1 \cdot (k+1) \cdot (k-2) + e_2 \cdot (k-1) \cdot (k-2) + e_3 \cdot (k-1) \cdot (k+1)}{(k-1) \cdot (k+1) \cdot (k-2)} \\
&\quad = \frac{e_1 \cdot k^2 - e_1 \cdot k - 2 \cdot e_1 + e_2 \cdot k^2 - 3 \cdot e_2 \cdot k + 2 \cdot e_2 + e_3 \cdot k^2 - e_3}{(k-1) \cdot (k+1) \cdot (k-2)} \\
&\quad = \frac{(e_1 + e_2 + e_3) \cdot k^2 + (-e_1 - 3 \cdot e_2) \cdot k + (-2 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 - e_3)}{(k-1) \cdot (k+1) \cdot (k-2)}.
\end{aligned}$$

Dies muß als Polynom in $k$ mit dem Zähler der Summanden der Reihe übereinstimmen, also

$$k = 0 \cdot k^2 + 1 \cdot k + 0 = \underbrace{(e_1 + e_2 + e_3)}_{=0} \cdot k^2 + \underbrace{(-e_1 - 3 \cdot e_2)}_{=1} \cdot k + \underbrace{(-2 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 - e_3)}_{=0}.$$

Durch Vergleich der $k$-Potenzen ergibt sich:

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad -e_1 - 3 \cdot e_2 = 1, \quad -2 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 - e_3 = 0.$$

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems ist

$$e_1 = -\frac{1}{2}, \quad e_2 = -\frac{1}{6}, \quad e_3 = \frac{2}{3},$$

also

$$\frac{k}{k^3 - 2 \cdot k^2 - k + 2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k-1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{k+1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k-2}.$$

**Schritt 3:** Reduktion der Teleskopsumme. Beachte, dass eine der Gleichungen $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ war. Deshalb ist es kein Zufall, dass sich in der Tat eine Teleskopsumme ergibt:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=3}^{n} \frac{k}{k^3 - 2 \cdot k^2 - k + 2} = \sum_{k=3}^{n} \frac{(-1/2)}{k-1} + \sum_{k=3}^{n} \frac{(-1/6)}{k+1} + \sum_{k=3}^{n} \frac{(2/3)}{k-2} \\
= \quad & \tfrac{(-1/2)}{2} + \tfrac{(-1/2)}{3} + \tfrac{(-1/2)}{4} + \cdots + \tfrac{(-1/2)}{n-2} + \tfrac{(-1/2)}{n-1} \\
& \qquad \tfrac{(-1/6)}{4} + \cdots + \tfrac{(-1/6)}{n-2} + \tfrac{(-1/6)}{n-1} + \tfrac{(-1/6)}{n} + \tfrac{(-1/6)}{n+1} \\
& + \tfrac{(2/3)}{1} + \tfrac{(2/3)}{2} + \tfrac{(2/3)}{3} + \underbrace{\tfrac{(2/3)}{4}}_{0} + \underbrace{\cdots}_{0} + \underbrace{\tfrac{(2/3)}{n-2}}_{0} \\
= \quad & \tfrac{(-1/2)}{2} + \tfrac{(-1/2)}{3} + \tfrac{(-1/2)}{n-1} \\
& \qquad + \tfrac{(-1/6)}{n-1} + \tfrac{(-1/6)}{n} + \tfrac{(-1/6)}{n+1} \\
& + \underbrace{\tfrac{(2/3)}{1} + \tfrac{(2/3)}{2} + \tfrac{(2/3)}{3}}_{\frac{29}{36}} \\
= \quad & \qquad + \tfrac{(-2/3)}{n-1} + \tfrac{(-1/6)}{n} + \tfrac{(-1/6)}{n+1}.
\end{aligned}$$

Der Grenzwert für $n \to \infty$ liefert

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{k}{k^3 - 2 \cdot k^2 - k + 2} = \frac{29}{36}.$$

---

**Beispiel 3.34:** In MuPAD ist die Funktion `partfrac` („partial fraction“) für die Partialbruchzerlegung zuständig:

```
>> partfrac(k/(k^3 - 2*k^2 - k + 2))

                  2           1           1
               --------- - --------- - ---------
               3 (k - 2)   6 (k + 1)   2 (k - 1)
```

---