Runge-Kutta Verfahren

Ordnungstheorie der
Runge-Kutta Verfahren

Übersicht

1. Wiederholung
2. Motivation und Vorgehensweise
3. Definition der RK-Gewichte
4. Die Butcher-Reihe eines RK-Verfahrens
5. Die Ordungsgleichungen
6. Bemerkungen
7. Zusammenfassung

1. Wiederholung

- Ein s-stufiges Verfahren zur Lösung von $\frac{d_y}{d_t} = f(y)$ ist eine Abb. der Form:

$$I_h(y) = y + h \sum_{j=1}^{s} b_j f(y_i)$$

- Die Taylor-Entwicklung

$$F_h(y) \simeq y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \sum_{\substack{\rho\tau \\ |\rho\tau|=n}} \alpha(\rho\tau) D_{f,y}(\rho\tau)$$

des Flusses mittels elementarer Differentiale heißt Butcher-Reihe

2. Motivation & Vorgehensweise

- Ziel:
  Identifizieren der Butcher Reihe von $I_h(y)$
- Vorgehensweise:
  - Definition der Runge Kutta Gewichte
  - allg. Butcher Reihe der RK-Verfahren
- Vergleich von $I_h(y)$ und $F_h(y)$
- Definition der Ordungsgleichungen

2.1 Bsp.: Die Butcher-Reihe des impliziten Euler-Verfahrens

- Sei $Y = I_h(y)$
  die Lösung von $Y(h) = y + hf(Y)$

Dann gilt: $Y(h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} Y^{(n)}(0) h^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{n!} Y^{(n)}(0) = a_n$$

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dh^n} Y(h)\Big|_{h=0} = \sum_{\substack{\rho\tau \\ |\rho\tau|=n}} \frac{1}{\sigma(\rho\tau)} D_{f,y}(\rho\tau)$$

$$\Rightarrow \quad I_h(y) \simeq y + \sum_{n=1}^{\infty} h^n \sum_{\substack{\rho\tau \\ |\rho\tau|=n}} \frac{1}{\sigma(\rho\tau)} D_{f,y}(\rho\tau)$$

3. Definition der RK-Gewichte

- Das Butcher-Schema

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array} = \begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & \dots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & \dots & b_s \end{array}$$

sei gegeben.

Zum Baum ρτ wähle λρτ = (V,E,r) ε ρτ mit V={1,…,n}.

Definiere die RK-Gewichte:

$$\Phi(\rho\tau) = \sum_{j_1=1}^{s} \cdots \sum_{j_n=1}^{s} b_{j_r} \prod_{(\alpha,\beta)\in E} a_{j_\alpha j_\beta}$$

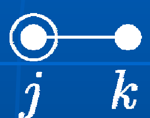
3.1 Bemerkung

- Für eine Kante (α,β) mit einem Endknoten β kann eine Summation ausgeführt werden und liefert
$$\sum_{j_\beta=1}^{s} a_{j_\alpha j_\beta} = c_{j_\alpha}.$$
- Es folgt die anschauliche Konstruktion des Gewichtes Φ:
  - hefte an die Wurzel eine Kopie von b
  - an jede Kante eine Kopie von A
  - für "Endkanten" kann diese zu einer Kopie von c vereinfacht werden
  - dann multipliziere alles und addiere.

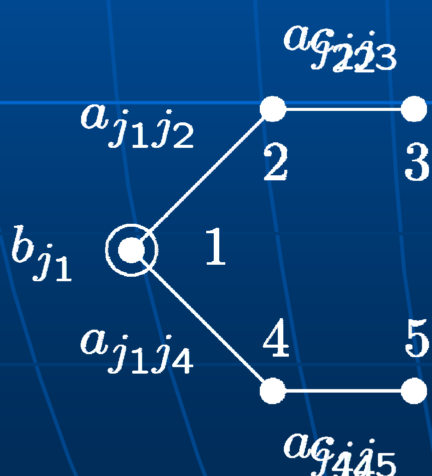
3.2 Beispiele

$\lambda\rho\tau =$ 

$$\longrightarrow \Phi(\rho\tau) = \sum_{j=1}^{s} b_j$$

$\lambda\rho\tau =$ 

$$\longrightarrow \Phi(\rho\tau) = \sum_{j=1}^{s} b_j a_{jk} = \sum_{j=1}^{s} b_j c_j$$

$\lambda\rho\tau =$ 

$$\Phi(\rho\tau) = \sum_{j_1=1}^{s} \sum_{j_2=1}^{s} \sum_{j_4=1}^{s} b_{j_1} a_{j_1j_2} a_{j_2j_3} c_{j_2} a_{j_1j_4} a_{j_4j_5} c_{j_4}$$

3. Butcher Reihe eines RK-Verfahrens

- Für die RK-Abbildung zur Lösung von $\frac{dy}{dt} = f(y)$ gilt :

$$I_h(y) = y + h \sum_{j=1}^{s} b_j f(y_j)$$

$$I_h(y) \approx y + \sum_{n=1}^{\infty} h^n \sum_{\substack{\rho\tau \\ |\rho\tau|=n}} \frac{\Phi(\rho\tau)}{\sigma(\rho\tau)} D_{f,y}(\rho\tau)$$

5. Ordnungsgleichungen

$$F_h(y) \simeq y + \sum_{n=1}^{\infty} h^n \sum_{|\rho\tau|=n} \frac{1}{\gamma(\rho\tau)\sigma(\rho\tau)} D_{f,y}(\rho\tau)$$

- Der Vergleich mit dieser Abb. ergibt:

$$F_h(y) - I_h(y) \simeq$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} h^n \sum_{\substack{\rho\tau \\ |\rho\tau|=n}} \frac{1}{\sigma(\rho\tau)} \left(\frac{1}{\gamma(\rho\tau)} - \Phi(\rho\tau) \right) D_{f,y}(\rho\tau)$$

→RK-Verfahren hat Ordnung p genau dann wenn für alle Bäume ρτ mit |ρτ|<= p die Ordungsgleichungen

$$\Phi(\rho\tau) = \frac{1}{\gamma(\rho\tau)}$$

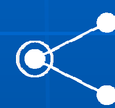
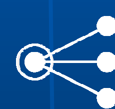
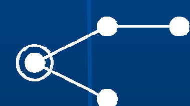
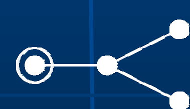
erfüllt sind.

Der führende Fehlerterm hat die Darstellung:

$$h^{p+1} \sum_{\substack{\rho\tau \\ |\rho\tau|=p+1}} \frac{1}{\sigma(\rho\tau)}\left(\frac{1}{\gamma(\rho\tau)} - \Phi(\rho\tau)\right) D_{f,y}(\rho\tau)$$

$$\rightarrow I_h(y) = F_h(y) + O(h^{p+1})$$

Die Ordnungs-gleichungen bis zu Ordnung 4

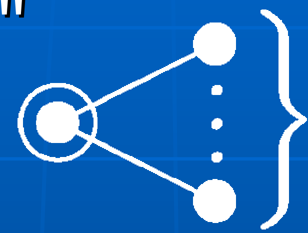
Ordnung	$\rho\tau$	$\Phi(\rho\tau)$	$=$	$\frac{1}{\gamma(\rho\tau)}$
1		$\sum_{j=1}^{s} b_j$	$=$	1
2		$\sum_{j=1}^{s} b_j c_j$	$=$	$\frac{1}{2}$
3		$\sum_{j=1}^{s} b_j c_j^2$	$=$	$\frac{1}{3}$
3		$\sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{s} b_j a_{jk} c_k$	$=$	$\frac{1}{6}$
4		$\sum_{j=1}^{s} b_j c_j^3$	$=$	$\frac{1}{4}$
4		$\sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{s} b_j c_j a_{jk} c_k$	$=$	$\frac{1}{8}$
4		$\sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{s} b_j a_{jk} c_k^2$	$=$	$\frac{1}{12}$
4		$\sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{s} \sum_{l=1}^{s} b_j a_{jk} a_{kl} c_l$	$=$	$\frac{1}{24}$

6. Bemerkungen

I. Sei a_p = Anzahl aller Bäume ρτ mit genau p Knoten.
Die Anzahl der Gleichungen $\sum_{k=1}^{p} a_k$ steigt schnell mit der gewünschten Ordnung p:

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…	20
a_p	1	1	2	4	9	20	48	115	286	719	…	12 826 228
$\sum_{k=1}^{p} a_k$	1	2	4	8	17	37	85	200	486	1205	…	20 247 374

II. Die Konsistenzbedingung $\sum_{j=1}^{s} b_j = 1$ garantiert Konsistenz/Konvergenz.

Die "Büschel"  $k-1$ *Blätter*

liefern die Quadraturbedingungen

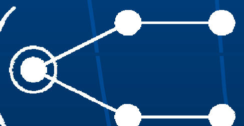
$$\Phi\Big(\ \Big\}\,k-1\Big) = \sum_{j=1}^{s} b_j c_j^{k-1} = \frac{1}{\gamma(\rho\tau)}$$

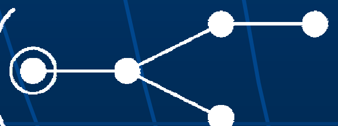
$$= \frac{1}{k}$$ k=1,...,p

III. Bei der Anwendung von RK-Verfahren auf skalare Gleichungen $\frac{dy}{dt} = f(y), y \in \mathbb{R}$, fallen einige elementare Differentiale zusammen, so daß im Vergleich der Butcher-Reihen von F_h und I_h nicht für jeden Baum getrennt

$$\Phi(\rho\tau) = \frac{1}{\gamma(\rho\tau)}$$

gefordert zu werden braucht, z.B.

$$D_{f,y}\Bigg($$  $$\Bigg) = f''(y)f'(y)f(y)f'(y)f(y)$$

$$= D_{f,y}\Bigg($$  $$\Bigg) = f'(y)f''(y)f'(y)f(y)f(y)$$

7. Zusammenfassung

- Die allgemeine Definition der Butcher Reihe für $I_h(y)$ ist :

- Der führende Fehlerterm hat eine Abweichung von:

für ein RK-Verfahren der Ordnung p