Taylor-Entwicklung der exakten Lösung und Verfahrensfehler

Ngaleu Poutcheu Paulin Francis
Francisc@upb.de

Taylor-Entwicklung der exakten Lösung und Verfahrensfehler

- **Beobachtung, Definition und Notation**
  - Beobachtung
  - Notation
- **Taylor-Entwicklung**
  - Definition und Beispiele
  - Satz und Beweis
- **Verfahrensfehler**
  - Definition und Beispiele
  - Satz: Globale Fehler aus lokalen Fehler
  - Satz: Globale Fehler aus lokalen Verfahrens- und Rundungsfehlern
- **Zusammenfassung**

Taylor-Entwicklung der exakten Lösung und Verfahrensfehler

➢Beobachtung(1)

Die Taylor-Reihe der Lösung $y(t_0+h)=F_h(y_0)$ des AWP

$\frac{dy}{dt}=f(y)\ ,\ y(t_0)=y_0$ ist konstruierbar: $y(t_0+h)=y(t_0)+h\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t_0}+\frac{h^2}{2!}\left.\frac{d^2y}{dt^2}\right|_{t_0}y+\ldots,$

wobei $y(t_0)=y_0, \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t_0}=f(y_0)$ und $\frac{d}{dt}g(y(t))=g'(y)\left[\frac{dy}{dt}\right]=g'(y)[f(y)]$

also $$\frac{d^k y}{dt^k}=\underbrace{\left(\ldots\left(\left(f'(y)[f(y)]\right)'[f(y)]\right)'\ldots\right)'}_{k-1\,Richtungsableitungen}[f(y)]$$

Taylor-Entwicklung der exakten Lösung und Verfahrensfehler

- **Beobachtung (2)**

$$y(t_0) = y_0$$

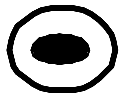
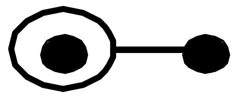
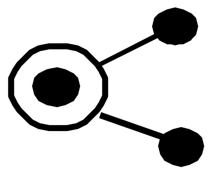
$$\frac{dy}{dt}(t_0) = f(y_0)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2}(t_0) = f'[f] \quad \left(\equiv f'(y_0)[f(y_0)]\right)$$

$$\frac{d^3 y}{dt^3}(t_0) = f''[f, f] + f'[f'[f]]$$

Taylor-Entwicklung der exakten Lösung und Verfahrensfehler

➢Notation

Term	durch	gewurzelte Bäume
f	$\leftrightarrow$	
$f'[f]$	$\leftrightarrow$	
$f''[f,f]$	$\leftrightarrow$	

Taylor-Entwicklung der exakten Lösung

➢ Definition:

sei $y \in \mathbb{R}^N$ und $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ Einem gewurzelten Baum rt wird das Elementare Differential $D_{f,y}(rt) \in \mathbb{R}^N$ (an der Stelle y) durch

die rekursive Definition

$$D_{f,y}([rt_1 \dots rt_k]) = f^{(k)}(y)[D_{f,y}(rt_1),\dots,D_{f,y}(rt_k)]$$

mit $D_{f,y}(\bullet) = f(y)$ zugeordnet.

➢ Beispiel

$$D_{f,\cdot}(\bullet) = f \qquad D_{f,\cdot}(\bullet\!-\!\bullet) = f'[f]$$

Taylor-Entwicklung der exakten Lösung

➢ **Satz :**

(a) : Sei $V \in \mathbb{N}$ mit $|V| = |rt|$ fixiert. Die Anzahl der monotonen Numerierierungen von rt ist :

$$a(rt) = \left|\left\{ lrt = (V,E,r) \in rt \,;\, lrt \text{ ist monoton} \right\}\right|$$

Für eine Lösung von $\frac{dy}{dt} = f(y)$ gilt mit a aus (a)

$$\frac{d^n y}{dt^n} = \sum_{\substack{rt \\ |rt|=n}} a(rt)\, D_{f,y}(rt), \qquad n = 1,2,.....$$

Taylor-Entwicklung der exakten Lösung

- **Beweis**

Zu zeigen ist: $$\frac{d^n y}{dt^n} = \sum_{\substack{rt \\ \text{monoton} \\ |lrt|=n}} D_{f,y}([l\,r\,t])$$

- **Bezeichnung**

Die Taylor-Entwicklung $$F_h(y) \cong y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \sum_{\substack{rt \\ |rt|=n}} a(rt) D_{f,y}(rt)$$

des Flusses F_h mittels elementarer Differentiale heißt **Butcher-Reihe.**

Jeder Term ist mittels $f, f', f'', \ldots$ an jeder Stellen y berechenbar.

Verfahrensfehler

➢ Definition

Ein **Einschritt-Verfahren** der **Konsistenzordnung** p zur Lösung von

$\frac{dy}{dt} = f(y)$ auf dem $\mathbb{R}^N$ ist eine 1-parametrige Schar von

Abbildungen

$I_h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ mit dem **lokalen Verfahrens-fehler** $F_h(y) - I_h(y) = O(h^{p+1})$

Der Term $e(y)$ in $\mathrm{O}(\mathrm{h}^{p+1}) = e(y)h^{p+1} + O(h^{p+2})$

heißt **führender Fehlerkoeffizient**

Verfahrensfehler

➢ **Beispiele**

Ordnung 1: $I_h(y) = y + hf(y)$ (Euler-(Polygonzug-) Verfahren)

Ordnung 2: $I_h(y) = y + hf(y) + \frac{h^2}{2} f'(y)[f(y)]$

Ordnung p: $I_h(y) = y + \sum_{n=1}^{p} \frac{h^n}{n!} \sum_{\substack{rt \\ |rt|=n}} a(rt) D_{f,y}(rt)$

Problem : Alle partiellen y-Ableitungen von f bis zur Ordnung p-1 sind zu implementieren und in jedem Zeitschritt $y(t) \rightarrow I_h(y(t)) \cong y(t+h)$ auszuwerten . Damit sind Taylor-Verfahren in der Praxis i.a kaum einsetzbar

Verfahrensfehler

➢Bemerkung

Frage: stellt die Taylor-Reihe den exakten Fluß dar?

$$F_h(y) = y + \sum_{n=1}^{p} \frac{h^n}{n!} \sum_{\substack{rt \\ |rt|=n}} a(rt) D_p(rt) + Fehler(h, p)$$

Analytizität heißt $\lim_{p \to \infty} Fehler(h, p) = 0$ bei festen h. Numerischer Fehler der Taylor-Verfahren: $F_h - I_h = Fehler(h, p)$ bei festen p und wählbarem (kleinen) h

Verfahrensfehler

➢ Definition

wir betrachten $h(n) = T/n,\ n \in \mathbb{N}$. Ein Verfahren I_h heißt (global) **konvergent** mit der **Konvergenzordnung** p, wenn

$$F_T(y) - \big(\underbrace{I_{h(n)} \circ \ldots \circ I_{h(n)}}_{n}\big)(y) = O\big(h(n)^p\big) = O\left(\frac{1}{n^p}\right)$$

Bemerkung: Hier werden zur Integration über ein längeres Zeitintervall T n äquidistante Zeitschritte mit $h = T/n$ betrachtet. Aber in der Praxis wird man mit variablen Schrittweiten **(„adaptiv“)** arbeiten.

Verfahrensfehler

➢**Satz(1): Globale Fehler aus lokalen Verfahrens**

Sei $y(t) = F_{t-t_0}(y_0)$ die exakte Lösung des AWP $\frac{dy}{dt} = f(y),\ y(t_0) = y_0$ wobei f eine **Lipschitz-stetige** Funktion ist.

Sei I_h ein numerisches Verfahren, mit den mittels positiver Schrittweiten $h_0, h_1, \ldots$ numerische Stützwerte $y_{i+1} = I_{hi}(y_i)$ zur Approximation von $y(t)$ zu den Zeiten $t_{i+1} = t_i + h_i$ berechnet werden

Die lokalen Fehler sind definiert durch : $e_i = F_{hi}(y_i) - I_{hi}(y_i)$

Die globalen Fehler sind : $E_i = y(t_i) - y_i = (F_{h_{i-1}} \circ \ldots \circ F_{h_0})(y_0) - (I_{h_{i-1}} \circ \ldots \circ I_{h_0})(y_0)$

Verfahrensfehler

Satz(1): Globale Fehler aus lokalen Verfahrens

Es gilt :
$$\|E_n\| \le \sum_{i=0}^{n-1} \|e_i\| e^{(t_n - t_{i-1})L} \le \left(\sum_{i=0}^{n-1} \|e_i\| \right) e^{(t_n - t_0)L}$$
$$\le n \left(\max_{i=0..n-1} \|e_i\| \right) e^{(t_n - t_0)L}$$

Für Konstante Schrittweiten $h = h_0 = h_1 = \ldots = T/n \ge 0$ gilt auch

$$\|E_n\| \le \left(\mathop{Max}_{i=0..n-1} \|e_i\| \right) \frac{e^{TL} - 1}{e^{TL} - 1} < \left(\mathop{Max}_{i=0..n-1} \|e_i\| \right) \frac{e^{TL} - 1}{hL}$$

Verfahrensfehler

➢**Satz(2): Globale Fehler aus lokalen Verfahrens- und Rundungsfehlern**

In Satz(1) sein $y_{i+1} = I_{h_i}(y_i) + e_i$ die mit den absoluten Auswertungs-Fehler e_i von $I_h(y_i)$ behafteten tatsächlich berechneten Stützwerte.

Es gelte die Abschätzung aus Satz(1) mit $\|e_i\|$ ersetzt durch $\|e_i\| + \|e_i\|$, speziell

$$\|E_n\| \leq \left(\max_{i=0,\dots,n-1} \left(\|e_i\| + \|e_i\| \right) \right) \frac{e^{TL} - 1}{hL}$$

Taylor-Entwicklung der exakten Lösung und Verfahrensfehler

➢**Zusammenfassung**

▪Die Taylor-Entwicklung des Flusses F_h mittels elementarer Differentiale (**Butcher-Reihe**) , wo jeder Term

mittels $f, f', f''...$ an jeder Stelle y berechenbar ist.

▪Die Auswertung der Konsistenzordnung p zur Lösung von AWP mit dem lokalen Verfahrens-fehler.

▪**Merke**: lokale Konsistenzordnung = globale Konvergenzordnung