Runge-Kutta-Theorie: Notation und Numerierte Gewurzelte Bäume

Christoph Spanke
(spanke@uni-paderborn.de)

Inhaltsverzeichnis

Gleichungsnotation

Es gilt nach Problemdefinition: $\dot{y} = \frac{dy}{dt} = f(y)$

Daraus ergeben sich:

$\ddot{y} = f'(y) * \frac{dy}{dt} = f'(y) * f(y)$

, für $f \in \mathbb{R}^n$ schreibt man: $f'[f]$

$\dddot{y} = f''(y) * \frac{dy}{dt} * f(y) + f'(y) * f'(y) * \frac{dy}{dt} = f''(y) * f(y) * f(y) + f'(y) * f'(y) * f(y)$

, für $f \in \mathbb{R}^n$ schreibt man: $f''[f, f] + f'[f'[f]]$

u.s.w.

Diese Verkettungen von Ableitungen der Funktion f lassen sich durch Graphen ausdrücken.

Definition NGB

Ein numerierter gewurzelter Baum (NGB) ist ein Tripel $\lambda\rho\tau = (V, E, r)$ aus:

(i) einer Knotenmenge V (<u>V</u>ertices)

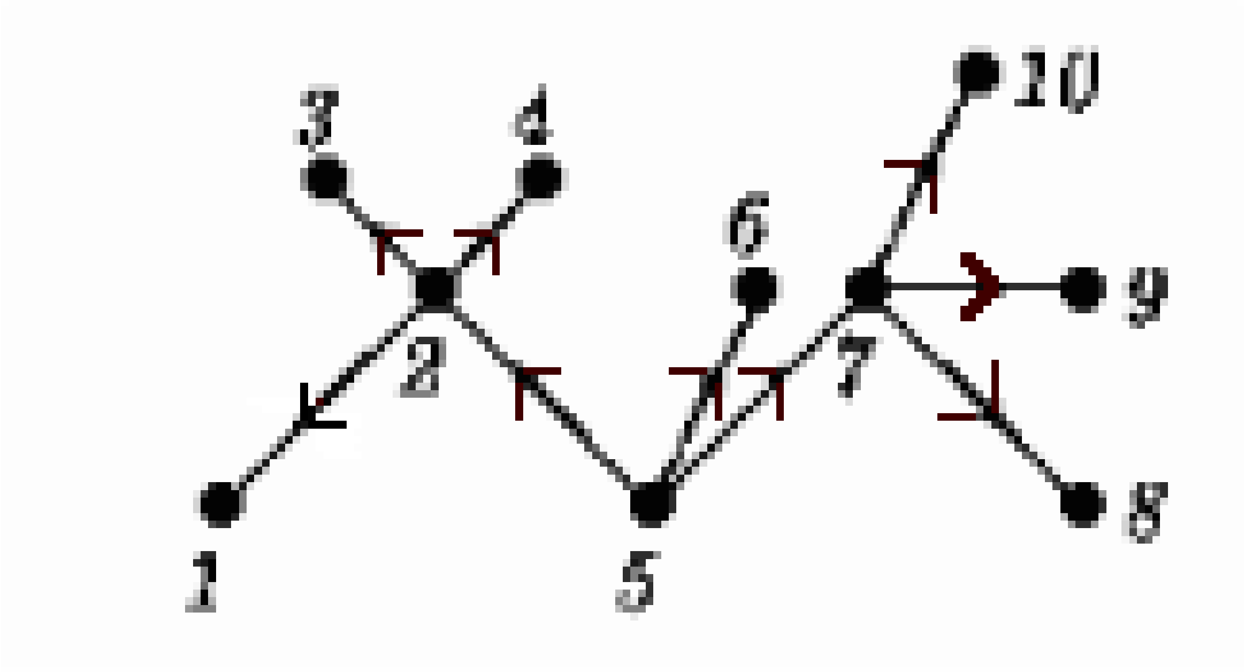
(ii) einer Menge gerichteter Kanten E (<u>E</u>dges)

(iii) eines ausgewiesenen Wurzelknotens r (<u>r</u>oot)

Dabei muss für jedes $s \in V$ genau eine Kantenfolge $e_1, e_2, ..., e_k \in E$ existieren, so dass $e_1 = (r, w_1), ...e_i = (w_{i-1}, w_i), ..., e_k = (w_k, s)$ gilt, also ein Weg der Länge k von r nach s existiert. Die Anzahl der Knoten $n =| V |$ heisst Ordnung des Baumes $\lambda\rho\tau$.

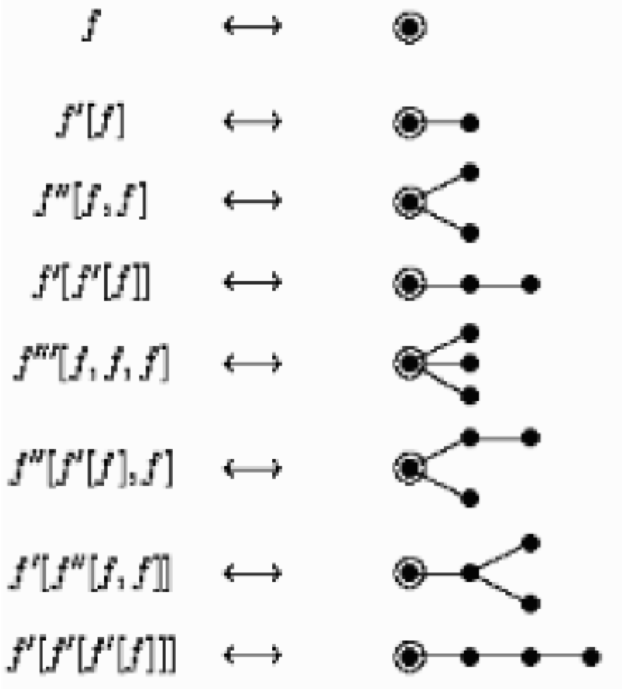
Christoph Spanke
spanke@uni-paderborn.de
Universität Paderborn

Beispiel Beispiel NGB



Für diesen Baum ist der Knoten mit der Nummer 5 der Wurzelknoten. Die Angabe des Wurzelknotens ist nicht zwingend notwendig, er lässt sich immer leicht bestimmen; es ist der einzige Knoten, der $nicht$ Endpunkt einer Kante ist.

Beispiel Notationsumwandlung



Jedes f ohne Ableitung entspricht also einem Blatt, und die Ordnung der Ableitung entspricht der Anzahl der Nachfolger des zugehörigen Knotens.

Christoph Spanke
spanke@uni-paderborn.de
Universität Paderborn

Eigenschaften NGB

Für einen numerierten gewurzelten Baum $\lambda\rho\tau = (V, E, r)$ gilt: $\mid E \mid = \mid V \mid -1$

Zwei Bäume sind isomorph, wenn sie sich lediglich in der Bezeichnung ihrer Knoten unterscheiden.

Äquivalente Bäume $\lambda_1\rho\tau, ..., \lambda_i\rho\tau$ werden in Äquivalenzklassen $\rho\tau$ zusammengefasst, Schreibweise: $\rho\tau = [\lambda_1\rho\tau]$, aber auch $\rho\tau = [\lambda_2\rho\tau]$ usw.

Alle Isomorphien (Kontenumbenennungen), die ein Element aus $\rho\tau$ auf ein anderes Element aus $\rho\tau$ abbilden, werden in sog. Symmetriegruppen $G(\lambda\rho\tau)$ zusammengefasst. Es gilt $G(\lambda_1\rho\tau) = G(\lambda_2\rho\tau)$, falls $\lambda_1\rho\tau, \lambda_2\rho\tau \in \rho\tau$. Man sagt: $G(\lambda\rho\tau)$ ist unabhängig von der Wahl des Repräsentanten $\lambda\rho\tau \in \rho\tau$.

Weiter benennt man die Größe der Symmetriegruppe: $\sigma(\rho\tau) := \mid G(\lambda\rho\tau) \mid$.

Symmetrieberechnung eines NGB

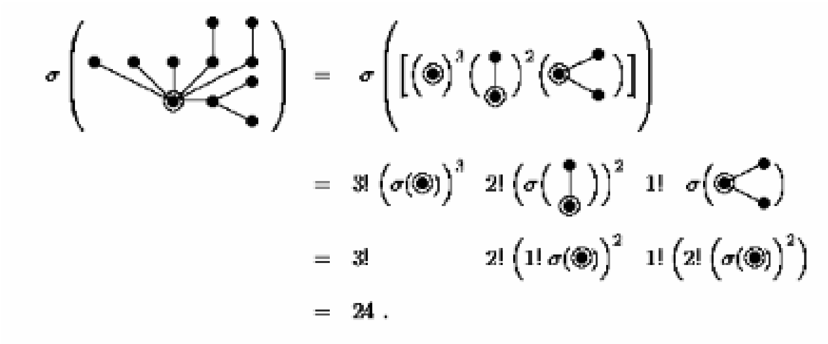
Produkt von NGB: Seien $\rho\tau_1,\ldots,\rho\tau_k$ Bäume, dann setze

$\rho\tau_1 * \ldots * \rho\tau_k :=$

Es lässt sich nun $\sigma(\rho\tau)$ rekursiv berechnen; es seien $\rho\tau_1,\ldots,\rho\tau_k$ paarweise verschieden (keine Einschränkung, sonst als Potenzen zusammenfassen). Dann gilt:

$$\sigma(\rho\tau_1^{m_1} * \ldots * \rho\tau_k^{m_k}) = \prod_{i=1}^{n} m_i! * (\sigma(\rho\tau_i))^{m_i}$$

Beispiel:

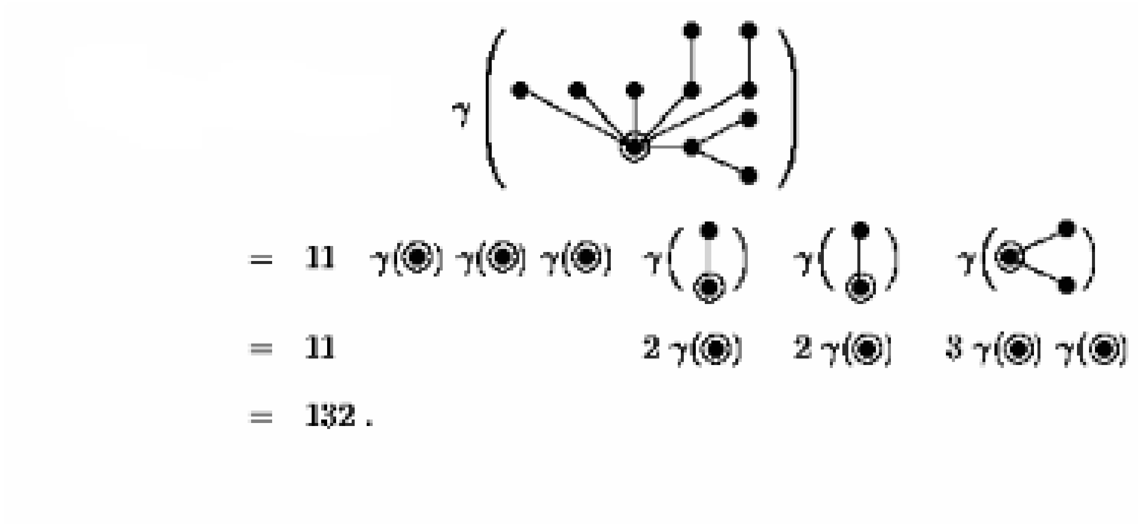


Christoph Spanke
spanke@uni-paderborn.de
Universität Paderborn

Dichte eines NGB

Die Dichte eines Baumes ist rekursiv durch $\gamma(\rho\tau) = \mid \rho\tau \mid * \gamma(\rho\tau_1) * \ldots * \gamma(\rho\tau_k)$ definiert, die Dichte eines Baumes, der nur noch aus einem Knoten besteht, wird mit 1 festgelegt.

Beispiel:



Christoph Spanke
spanke@uni-paderborn.de
Universität Paderborn

Rekursive Berechnung der Anzahl von Numerierungsvarianten

Ein Baum heisst monoton numeriert, wenn $r < s$ für alle $(r, s) \in E$ (eine topologische Sortierung liefert beispielsweise eine monotone Numerierung).

Für einen Baum $\rho\tau$ ist die Anzahl der monotonen Numerierungen:

$$\alpha(\rho\tau) = \mid \{\lambda\rho\tau = (V, E, r) \in \rho\tau; \lambda\rho\tau \ ist \ monoton\} \mid$$

Es gilt für jeden gewurzelten Baum $\rho\tau$:

$$\alpha(\rho\tau) = \frac{|\rho\tau|!}{\gamma(\rho\tau) * \sigma(\rho\tau)}$$

Christoph Spanke
spanke@uni-paderborn.de
Universität Paderborn

Relevanz für das Runge-Kutta-Verfahren

Es gilt nach *Satz 4.27* im Skript:

$$\frac{d^n y}{dt^n} = \sum_{\rho\tau : |\rho\tau| = n} \alpha(\rho\tau) D_{f,y}(\rho\tau) \qquad\qquad n = 1, 2, ...$$

Das ist ein einzelner Koeffizient der sog. Butcher-Reihe, im weiteren Verlauf des Runge-Kutta-Verfahrens noch von Bedeutung.

Zusammenfassung

- Berechnungsvorschrift für Symmetrieberechnung
- Berechnungsvorschrift für Dichteberechnung
- Aus Symmetrie und Dichte eines NGB: Anzahl der monotonen Numerierungen $\alpha(\rho\tau)$
- Anzahl der monotonen Numerierungen später wichtig
- Symmetrie und Dichte sind nur zur Bestimmung von $\alpha(\rho\tau)$ relevant

"Ende"