Kapitel 3

Dynamische Systeme

Definition 3.1: *Ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung*

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y) \; ; \quad y \in \mathbb{R}^N \; ; \qquad f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$$

heißt ***dynamisches System*** *auf dem* ***Phasenraum*** $\mathbb{R}^N$*. Der Parameter t wird die* ***Zeit*** *genannt. Das* ***Vektorfeld*** $f(t,y)$ *heißt* ***autonom****, wenn es nicht explizit von der Zeit abhängt: $dy/dt = f(y)$.*

Bemerkung 3.2: *Mit $z := (t,y)^T \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, $dz/dt = g(z) := (1, f(t,y))^T$ läßt sich jedes System durch Vergrößerung des Phasenraums autonom machen:*

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ f(t,y) \end{pmatrix} .$$

Bemerkung 3.3: *Eine Differentialgleichung höherer Ordnung*

$$\frac{d^k y}{dt^k} = f\Big(t, y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}}\Big) \; ; \quad y \in \mathbb{R}^n \qquad (\#)$$

läßt sich als dynamisches System auf einem größeren Phasenraum interpretieren:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} t \\ z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{k-2} \\ z_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{k-1} \\ f(t, z_0, \dots, z_{k-1}) \end{pmatrix} \in \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{1+nk}} .$$

Setzt man $z_0 = y$, so folgt $z_i = d^i y/dt^i \in \mathbb{R}^n$, $i = 0, \dots, k-1$. Der letzte Block $dz_{k-1}/dt = dy^k/dt^k = f(t, z_0, \dots, z_{k-1})$ repräsentiert dann (#).

Damit reicht es, numerische Verfahren zu Lösung von $dy/dt = f(y)$ zu entwickeln, die für beliebiges (glattes) f auf beliebigen Phasenräumen funktionieren. Es geht hier um das **Anfangswertproblem** (AWP)

$$\frac{dy}{dt} = f(y) \; ; \quad y(t_0) = y_0 \; . \tag{\#}$$

Randwertaufgaben (Vorgabe von Daten zu verschiedenen Zeiten) erfordern andere Methoden.

Existenz und Eindeutigkeit für $dy/dt = f(t,y)$ auf dem $\mathbb{R}^N$ sind unter minimalen Voraussetzungen an das Vektorfeld garantiert:

Satz 3.4: (Existenzsatz von Peano)

Sei $f(t,y)$ stetig auf einem offenem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, sei $(t_0, y_0) \in \Omega$. Dann hat das AWP (#) mindestens eine Lösung, die sich bis zum Rand von Ω fortsetzen läßt.

Beweis: siehe z.B. [W. Walter, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Springer, Kap. II.10].

Bemerkung 3.5: *Es können die Fälle auftreten:*

a) *die Lösungen existieren für alle* $t \in [t_0, \infty)$,

b) $\lim\limits_{t \to T-0} \|y(t)\| = \infty$ *für* $t_0 \le t < T < \infty$,

c) $\lim\limits_{t \to T-0} \mathit{dist}\Big((t, y(t)) \, , \, \partial\Omega \Big) = 0$ *für* $t_0 \le t < T < \infty$
(mit dist = Abstand zum Rand $\partial\Omega$).

Beispiele für diese Fälle sind z.B. in [Deuflhard & Bornemann] zu finden. Analoges gilt für Zeiten $t \le t_0$.

Satz 3.6: (Eindeutigkeit der Lösung)

Sei $f(t,y)$ stetig auf einem offenem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ und Lipschitz-stetig bzgl. y, d.h., es existiert L mit

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \;\le\; L \, |y_1 - y_2| \quad \forall \; (t,y_1), (t,y_2) \in \Omega.$$

Dann ist die Lösung aus Satz 3.4 eindeutig.

Beweis: siehe z.B. [W. Walter].

Bemerkung 3.7: *<u>Lokale</u> Lipschitz-Stetigkeit reicht für Eindeutigkeit: zu jedem $(t, y) \in \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ existiere eine Umgebung $U(t, y)$ und eine Lipschitz-Konstante $L = L(t, y)$, so daß*

$$|f(t, y_1) - f(x, y_2)| \ \leq \ L\,|y_1 - y_2| \quad \forall\ (t, y_1), (t, y_2) \in U(t, y)\ .$$

Zusammenfassung: Sei $f(t, y)$ stetig und stetig differenzierbar bezüglich y (und damit lokal Lipschitz-stetig in y). Dann existiert lokal, d.h., für hinreichend kleine h, eine eindeutige Lösung $y(t_0 + h)$ des AWP (#).

Bemerkung 3.8: *Für spezielle Gebiete gelten weitergehende Aussagen, z.B.: Sei $\Omega = [t_0, t_1] \ \times \ \mathbb{R}^N$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ stetig und global Lipschitz-stetig bzgl. y (d.h., die L-Konstante ist global gültig auf Ω). Dann existiert die Lösung $y(t)$ $\forall\ t \in [t_0, t_1]$. Vergleiche z.B. [Walter, II.10, Satz VII].*

Im folgenden wird $f(t, y)$ als hinreichend glatt (mindestens stetig differenzierbar) vorausgesetzt.

Definition 3.9:

Sei $y(t; t_0, y_0)$ die Lösung des AWP $dy/dt = f(t, y)$; $y(t_0) = y_0$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} F_{t,t_0} :\ & \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N \\ & y_0 \to y(t; t_0, y_0) \end{aligned}$$

*heißt **Fluß** des dynamischen Systems (auch "**Zeitschritt**" $t_0 \to t$ genannt).*

Satz 3.10: (Gruppenstruktur des Flusses)

Es gilt $F_{t,t_1} \circ F_{t_1 t_0} = F_{t,t_0}$ für alle Zeiten $t_0, t_1, t \in \mathbb{R}$, für welche die Flüsse definiert sind.

Beweis: Sei $u(t) = (F_{t,t_1} \circ F_{t_1,t_0})(y_0) = y(t; t_1, y(t_1; t_0, y_0))$. Diese Funktion erfüllt

$$\frac{du}{dt} = f(t, u) \quad \text{ und } \quad u(t_1) = y(t_1; t_0, y_0)\ .$$

Sei $v(t) = F_{t,t_0}(y_0) = y(t; t_0, y_0)$. Diese Funktion erfüllt

$$\frac{dv}{dt} = f(t, v) \quad \text{ und } \quad v(t_1) = y(t_1; t_0, y_0)\ .$$

Also: u und v sind beide Lösungen des AWP $dz/dt = f(t, z)$; $z(t_1) = y(t_1; t_0, y_0)$. Aus der Eindeutigkeit von Lösungen folgt $u = v$.

Q.E.D.

Satz 3.11: (Gruppenstruktur autonomer Systeme)
Für autonome Differentialgleichungen $dy/dt = f(y)$ *hängt* F_{t,t_0} *nur von der Differenz* $t - t_0$ *ab:*

$$F_{t_0+h,t_0} = F_{t_1+h,t_1} \quad \forall\ t_0, t_1, h \in \mathbb{R}\ .$$

Mit der Notation $F_h \equiv F_{t_0+h,t_0}$ *(unabhängig von* t_0*) gilt*

$$F_0 = id\ ,$$

$$F_{h_2} \circ F_{h_1} = F_{h_1} \circ F_{h_2} = F_{h_1+h_2}\ , \qquad (\text{“Gruppenstruktur des Flusses”})$$

$$F_h \circ F_{-h} = F_{-h} \circ F_h = id\ .$$

Beweis: Seien

$$u(h) = F_{t_0+h,t_0}(y_0) = y(t_0 + h; t_0, y_0)\ ,\ v(h) = F_{t_1+h,t_1}(y_0) = y(t_1 + h; t_1, y_0)\ .$$

Beide Funktionen erfüllen dieselbe Differentialgleichung:

$$\frac{du}{dh} = f(u)\ , \quad \frac{dv}{dh} = f(v)\ .$$

Außerdem gilt $u(0) = y(t_0; t_0, y_0) = y_0 = y(t_1; t_1, y_0) = v(0)$. Mit der Eindeutigkeit von Anfangswertproblemen folgt $u = v$. Zur Gruppenstruktur:

- $F_0 = F_{t_0,t_0} = id$ ist klar ,
- $F_{h_2} \circ F_{h_1} \equiv F_{t_0+h_1+h_2,t_0+h_1} \circ F_{t_0+h_1,t_0} \overset{(3.10)}{=} F_{t_0+h_1+h_2,t_0} \equiv F_{h_1+h_2}$,
- $F_h \circ F_{-h} = F_{h-h} = F_0 = id$.

Q.E.D.

Bemerkung 3.12: *Sei* $y(t) = y(t; t_0, y_0)$ *die Lösung des AWP* $dy/dt = f(y)$, $y(t_0) = y_0$. *Mit*

$$F_h(y(t)) = (F_{t+h,t} \circ F_{t,t_0})(y_0) = F_{t+h,t_0}(y_0) = y(t + h)$$

wirkt F_h *auf Lösungskurven als Zeitverschiebung* $F_h : y(t) \to y(t + h)$.

Bemerkung 3.13: *Sei* F_h *der Fluß von* $dy/dt = f(y)$ *und* $\widetilde{F}_h$ *sei der Fluß von* $dy/dt = -f(y)$. *Dann gilt* $F_h \circ \widetilde{F}_h = \widetilde{F}_h \circ F_h = id$, *also* $\widetilde{F}_h = (F_h)^{-1} = F_{-h}$.

Beweis: Sei

$$y(t; t_0, y_0) \quad \text{die Lösung des AWP} \quad \frac{dy}{dt} = f(y)\ ;\ y(t_0) = y_0$$

und

$$\widetilde{y}(t; t_0, y_0) \quad \text{die Lösung des AWP} \quad \frac{dy}{dt} = -f(y);\ y(t_0) = y_0\ .$$

Es gilt $\widetilde{y}(t; t_0, y_0) = y(2\,t_0 - t; t_0, y_0)$, denn diese Funktion löst das zweite AWP, Eindeutigkeit. Damit folgt $F_{t_0-t} \equiv F_{2\,t_0-t,t_0} = \widetilde{F}_{t,t_0} \equiv \widetilde{F}_{t-t_0}$.

Q.E.D.

Beispiele 3.14:

a) *Eine lineare Differentialgleichung* $dy/dt = Ay$ *mit einer konstanten Matrix* A *hat die Lösung* $y(t) = e^{(t-t_0)A}y_0$, *also* $F_{t,t_0} = F_{t-t_0} = e^{(t-t_0)A}$.

b) *Das skalare System* $dy/dt = y^2$, $y(t) \in \mathbb{R}$, *hat die Lösung*

$$y(t) = \frac{y(t_0)}{1-(t-t_0)\,y(t_0)} \ .$$

Damit ist der Fluß die Abbildung

$$F_h : y \to \frac{y}{1-hy} \ , \qquad \textit{definiert für} \quad \begin{cases} h \in (-\infty, \frac{1}{y}) & \textit{für} \ \ y > 0 \ , \\ h \in (\frac{1}{y}, \infty) & \textit{für} \ \ y < 0 \ , \\ h \in (-\infty, \infty) & \textit{für} \ \ y = 0 \ . \end{cases}$$

Zusammenfassung: "Lösen" eines autonomen Systems $dy/dt = f(y)$ auf $\mathbb{R}^N$ heißt: finde die 1-parametrige Abbildungsschar $F_h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, welche

$$F_0 = id \ , \quad F_{h_2} \circ F_{h_1} = F_{h_2+h_1} \ , \quad F_{-h} = F_h^{-1}$$

erfüllt. Numerisch: finde Approximationen von F_h. Ein numerischer Integrator $I_h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ ist eine 1-parametrige Schar von Abbildungen mit möglichst kleinem "Verfahrensfehler" $F_h - I_h$.

Numerisches Lösungsverfahren 3.15: *Zur Lösung des AWP*

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \ y(t_0) = y_0$$

wähle Stützwerte $t_0, \ t_1 = t_0 + h_0, \ t_2 = t_1 + h_1, \ \ldots$ *mit* ***"Schrittweiten"*** h_i *und berechne iterativ*

$$y_{k+1} = I_{h_k}(y_k) \ \ \textit{mit dem Start} \ \ y_0 \ ,$$

also

$$\begin{aligned} y_{exakt}(t_0 + h_0 + h_1 + \cdots + h_n) \ &= \ F_{h_n} \circ F_{h_{n-1}} \circ \ldots \circ F_{h_0}(y_0) \\ &\approx \ I_{h_n} \circ I_{h_{n-1}} \circ \ldots \circ I_{h_0}(y_0) \end{aligned}$$

Ziel: finde I_h, so daß $I_h - F_h$ klein ist für kleines h (systematische Konstruktionen von I_h folgen später). Problem: schon ein einzelner Schritt $y_0 \to y_1 = I_{h_0}(y_0)$ führt auf eine Nachbartrajektorie. Damit ist zu klären: wie weit können benachbarte Trajektorien im Laufe der Zeit auseinander laufen?

Bemerkung 3.16: *Das AWP $dy/dt = f(y)$, $y(t_0) = y_0$ ist äquivalent zur Integralgleichung*

$$y(t) \;=\; y_0 \;+\; \int_{t_0}^{t} f(y(t))\, dt \;.$$

Lemma 3.17: (Gronwall)

Sei $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig und es gelte

$$g(t) \le g(0) + L \int_0^t g(h)\, dh \quad \forall\, t \in [0,\infty)$$

mit einer Konstanten $L \ge 0$. Dann folgt $g(t) \le g(0)\, e^{tL}\ \forall\, t \in [0,\infty]$.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Zeige $g(t) \le (g(0)+\epsilon)\, e^{tL}$ (womit die behauptete Abschätzung folgt, da für jedes t ein beliebig kleines ϵ gewählt werden kann). Angenommen,

$$T := \inf\{\ h \in [0,\infty)\ ;\ g(h) \ge (g(0)+\epsilon)\, e^{hL}\ \}\ ,$$

existiert. Es gilt

$$g(h) \;<\; (g(0)+\epsilon)\ e^{hL} \quad \forall\ h \in [0,T)$$

und damit

$$g(T) \;=\; \lim_{h\to T-0} g(h) \;\le\; (g(0)+\epsilon)\, e^{TL}\ .$$

Wäre $g(T) < (g(0)+\epsilon)\, e^{TL}$, so gälte auch $g(h) < (g(0)+\epsilon)\, e^{hL}$ auf einer Umgebung von T im Widerspruch zu $T = \inf\{...\}$. Also gilt

$$g(T) \;=\; (g(0)+\epsilon)\, e^{TL}\ .$$

Es folgt der Widerpruch

$$\begin{aligned} g(T) \;&\le\; g(0) \;+\; L \int_0^T g(h)\, dh \\ &<\; g(0)+\epsilon \;+\; L \int_0^T (g(0)+\epsilon)\, e^{h\,L}\, dh \;=\; (g(0)+\epsilon)\, e^{T\,L}\,. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Hiermit ergibt sich der folgende

Satz 3.18: (Abhängigkeit der Lösung von den Anfangsdaten)

Der Fluß F_h des Systems $dy/dt = f(y)$ mit Lipschitz-stetigem Vektorfeld $\|f(y_0) - f(z_0)\| \le L\, \|y_0 - z_0\|$ ist wieder Lipschitz-stetig mit

$$\|F_h(y_0) - F_h(z_0)\| \;\le\; e^{hL}\, \|y_0 - z_0\|\ , \quad h \ge 0\ .$$

Beweis: Es seien $y(t_0 + h) = F_h(y_0)$ und $z(t_0 + h) = F_h(z_0)$ die Lösungen zu den Anfangswerten y_0 bzw. z_0 zum Zeitpunkt t_0. Mit Bemerkung 3.16 gilt

$$\begin{aligned} F_h(y_0) &= y_0 + \int_{t_0}^{t_0+h} \frac{dy(t)}{dt}\, dt &= y_0 + \int_0^h f(y(t_0+\tau))\, d\tau \\ F_h(z_0) &= z_0 + \int_{t_0}^{t_0+h} \frac{dz(t)}{dt}\, dt &= z_0 + \int_0^h f(z(t_0+\tau))\, d\tau \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} \|F_h(y_0) - F_h(z_0)\| &\leq \|y_0 - z_0\| + \int_0^h \|f(y(t_0+\tau)) - f(z(t_0+\tau))\|\, d\tau \\ &\leq \|y_0 - z_0\| + L \int_0^h \|y(t_0+\tau)) - z(t_0+\tau))\|\, d\tau\ . \end{aligned}$$

Das Gronwall-Lemma mit $g(h) = \|F_h(y_0) - F_h(z_0)\|$, $g(0) = \|y_0 - z_0\|$ liefert sofort die Behauptung.

Q.E.D.

Interpretation:

+ Der Fluß $F_h(y)$ ist Lipschitz-stetig in y (auch glatter, wenn $f(y)$ glatter ist).

– Die Lipschitz-Konstante e^{hL} wächst <u>exponentiell</u> mit der Zeit h:

Langzeitintegration ist numerisch <u>prinzipiell</u> ein Problem für solche Systeme, für welche die Abschätzung aus Satz 3.18 realistisch ist ("instabile Differentialgleichungen").