Meine persönliche Einschätzung der Aufgaben der Klausur vom 30.9.02:

1a)–h)	Einige leicht, andere Standard, einige zum (kurzen) Nachdenken.
2)	Standard. Vergleiche Aufgabe 29, Bonusaufgabe 30
3a)	Standard. Vergleiche Aufgabe 45, Bonusaufgabe 46, Aufgabe 109
3b)	Leicht. Vergleiche Bonusaufgabe 35
3c)	Standard. Vergleiche Aufgabe Bonusaufgabe 36, Bonusaufgabe 37
4)	Standard. Vergleiche Bonusaufgabe 10.
5)	Sehr leicht (eine Matrixmultiplikation, wenn per Induktion; sonst Rechnerei)
6)	Leicht (Schulstoff), aber etwas Rechnerei
7)	Anspruchsvoll. Vergleiche Aufgabe 75, Bonusaufgabe 76, Aufgabe 116
8)	Standard.
9a)	Standard. Vergleiche Aufgabe 92d.
9b)	Standard.
10)	Standard.

W. Oevel

Klausur

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ	Bonus	Σ
max Punkte:	16	11	12	8	6	10	9	6	12	10	100	(10)	
erreichte Punkte:													

Note:

Kontrollieren Sie diese Klausur auf Vollständigkeit: sie sollte 10 Seiten haben (Aufgaben 1–10). Tragen Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer **auf allen Seiten** ein. Lösungswege und Lösungen sind in die Klausurvorlage (evtl. auf die Rückseiten) einzutragen. Sollte der Platz nicht ausreichen, so stellt die Klausuraufsicht zusätzliches Papier zur Verfügung. **Die Klammerung der Klausur nicht lösen!**

Nicht mit Bleistift und nicht in Rot schreiben!

Dauer: 120 Minuten
Zulässige Hilfsmittel: 4 handschriftliche Seiten + nichtprogrammierbarer Taschenrechner

---

Aufgabe 1: (Quickies, jeweils 2 oder 0 oder −2 Teilpunkte)
Hier sind keine Begründungen erforderlich, nur 'ja', 'nein' oder gar nichts ankreuzen! **Falsche Antworten ergeben negative Punkte!**

a) Jedes Polynom vom Grad n hat n verschiedene komplexe Nullstellen.	∘ ja	∘ **<u>nein</u>**
b) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1}$ konvergiert gegen einen endlichen Wert.	∘ ja	∘ **<u>nein</u>**
c) Für $f(x) = \frac{x-2}{\lvert x-2\rvert}$ gilt: $\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2+0} f(x) = 1.$	∘ ja	∘ **<u>nein</u>**
d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 0.$	∘ ja	∘ **<u>nein</u>**
e) Es gilt $\sin(x) = O(x)$ im Limes $x \to 0$.	∘ **<u>ja</u>**	∘ nein
f) Die Funktion $x \mapsto \lvert x\rvert^3$ ist am Punkt $x = 0$ stetig.	∘ **<u>ja</u>**	∘ nein
g) Die Funktion $x \mapsto \sqrt{1+\lvert x\rvert}$ ist am Punkt $x = 0$ differenzierbar	∘ ja	∘ **<u>nein</u>**
h) Für (glatte) Funktionen f gilt stets $\int_0^1 f'(e^x)\cdot e^x\,dx = f(e) - f(1).$	∘ **<u>ja</u>**	∘ nein

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Hier sind Begründungen und nachvollziehbare Rechnungen erforderlich! Aus der Vorlesung oder den Übungen bekannte Sachverhalte können natürlich verwendet werden. **Tragen Sie das Endergebnis im 'Ergebnisfeld' ein!**

Aufgabe 2: (Folgen, 2 + 4 + 2 + 3 Punkte)
Betrachten Sie die durch die Rekursion $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, $x_0 = 1$ definierte Folge (x_n).
a) Zeigen Sie, dass die Folge nach oben beschränkt ist.
b) Zeigen Sie, dass die Folge streng monoton wächst.
c) Zeigen Sie, dass die Folge konvergiert.
d) Berechnen Sie den Grenzwert.

Lösung:
a) Durch Induktion wird gezeigt: $x_n < 2$.
Start: $x_0 = 1 < 2$, OK.
Schritt $n \to n+1$:

$$x_n < 2 \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} < \sqrt{2+2} = 2.$$

b) Mit $x_n < 2$ ergibt sich

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} > \sqrt{x_n + x_n} = \sqrt{2 \cdot x_n}.$$

Für alle x mit $0 < x < 2$ gilt aber $0 < x < 2 \ \Rightarrow \ x^2 < 2 \cdot x \ \Rightarrow \ x < \sqrt{2 \cdot x}$. Wegen $1 \leq x_n < 2$ ergibt das insgesamt:

$$x_{n+1} > \sqrt{2 \cdot x_n} > x_n.$$

c) Eine monotone beschränkte Folge ist stets konvergent. Damit folgt c) aus a) und b).
d) Der Grenzwert x^* muss die Gleichung $x^* = \sqrt{2 + x^*}$ erfüllen:

$$x^* = \sqrt{2 + x^*} \ \Rightarrow \ (x^*)^2 = 2 + x^* \ \Rightarrow \ (x^*)^2 - x^* - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \ x^* = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \left\{ \begin{array}{r} 2, \\ -1. \end{array} \right.$$

Es kommt nur der positive Wert $\boxed{x^* = 2}$ in Frage.

Bei Bedarf auf der Rückseite weiterschreiben

Ergebnis: d) Grenzwert =

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Hier sind Begründungen und nachvollziehbare Rechnungen erforderlich! Aus der Vorlesung oder den Übungen bekannte Sachverhalte können natürlich verwendet werden. **Tragen Sie das Endergebnis im 'Ergebnisfeld' ein!**

Aufgabe 3: (Reihen, 5 + 3 + 4 Punkte)

a) Berechnen Sie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)\cdot(k+3)}$.

b) Bestimmen Sie eine explizite Darstellung von $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^{2\cdot k+1}$ ($|x|$ hinreichend klein).

c) Welche rationale Zahl wird durch die Dezimalzahl $1.23454545... = 1.23\overline{45}$ dargestellt?

Lösung:

a) Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{(k+2)\cdot(k+3)} = \frac{a}{k+2} + \frac{b}{k+3} = \frac{a\cdot(k+3)+b\cdot(k+2)}{(k+2)\cdot(k+3)} = \frac{(a+b)\cdot k + (3\cdot a + 2\cdot b)}{(k+2)\cdot(k+3)}$$

$$\Rightarrow \quad a+b=0\ , \quad 3\cdot a + 2\cdot b = 1 \quad \Rightarrow \quad a=1, \quad b=-1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(k+2)\cdot(k+3)} = \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)\cdot(k+3)} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \cdots = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

b) Die geometrische Reihe konvergiert für $x^2 < 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{2\cdot k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2\cdot k}\cdot x = x\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(x^2)^k = \boxed{\frac{x}{1-x^2}}.$$

c)

$$1.23\overline{45} = 1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{4}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{4}{10^6} + \frac{5}{10^6} + \cdots$$

$$= \frac{123}{100} + \frac{45}{10^4} + \frac{45}{10^6} + \frac{45}{10^8} + \cdots = \frac{123}{100} + \frac{45}{10^4}\cdot\left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \cdots\right)$$

$$= \frac{123}{100} + \frac{45}{10^4}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{100^k} = \frac{123}{100} + \frac{45}{10^4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{123}{100} + \frac{45}{10^4}\cdot\frac{100}{99}$$

$$= \frac{123}{100} + \frac{45}{99\cdot 100} = \frac{123}{100} + \frac{5}{11\cdot 100} = \boxed{\frac{679}{550}}.$$

Bei Bedarf auf der Rückseite weiterschreiben

Ergebnis: a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)\cdot(k+3)} =$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^{2\cdot k+1} =$ c) $1.23\overline{45} =$

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Hier sind Begründungen und nachvollziehbare Rechnungen erforderlich! Aus der Vorlesung oder den Übungen bekannte Sachverhalte können natürlich verwendet werden. **Tragen Sie das Endergebnis im 'Ergebnisfeld' ein!**

Aufgabe 4: (Polynomwurzeln, 8 Punkte)
Bestimmen Sie alle (komplexen) Wurzeln des Polynoms $z^4 - 2 \cdot z^3 + 3 \cdot z^2 - 2 \cdot z + 2$. (Hinweis: Eine der Wurzeln ist $i = \sqrt{-1}$).

Lösung:
Da bei reellen Polynomen Wurzeln immer in konjugiert komplexen Paaren auftauchen, ist neben $z_1 = i$ auch $z_2 = -i$ eine Wurzel. Damit läßt sich der quadratische Faktor $(z-i)\cdot(z+i) = z^2 + 1$ per Polynomdivision abspalten:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
(& z^4 & - & 2\cdot z^3 & + & 3\cdot z^2 & - & 2\cdot z & + & 2 &) & : & (z^2+1) & = & z^2 - 2\cdot z + 2. \\
 & z^4 & & & + & z^2 & & & & & & & & & \\
\hline
 & & - & 2\cdot z^3 & + & 2\cdot z^2 & - & 2\cdot z & + & 2 & & & & & \\
 & & - & 2\cdot z^3 & & & - & 2\cdot z & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & 2\cdot z^2 & & & + & 2 & & & & & \\
 & & & & - & 2\cdot z^2 & & & - & 2 & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & & 0 & & & & &
\end{array}
$$

Also: $z^4 - 2 \cdot z^3 + 3 \cdot z^2 - 2 \cdot z + 2 = (z^2 + 1) \cdot (z^2 - 2 \cdot z + 2)$.
Die Wurzeln des zweiten Faktors ergeben sich aus der Standardformel für quadratische Gleichungen:

$$z_{3,4} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i.$$

Damit haben wir alle Wurzeln: $\boxed{z_1 = i, \quad z_2 = -i, \quad z_3 = 1 + i, \quad z_4 = 1 - i.}$

Bei Bedarf auf der Rückseite weiterschreiben

Ergebnis: $z_1 = i$, $z_2 =$ $z_3 =$ $z_4 =$

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Hier sind Begründungen und nachvollziehbare Rechnungen erforderlich! Aus der Vorlesung oder den Übungen bekannte Sachverhalte können natürlich verwendet werden. **Tragen Sie das Endergebnis im 'Ergebnisfeld' ein!**

Aufgabe 5: (Matrizen, einfacher Beweis, 6 Punkte)

Beweisen Sie die folgende Matrixidentität: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \dfrac{3^n+1}{2} & \dfrac{3^n-1}{2} \\ \dfrac{3^n-1}{2} & \dfrac{3^n+1}{2} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$

(Hinweis: Diagonalisierung führt zum Ziel, es geht aber auch einfacher.)

Lösung:
Man kann die Formel über Diagonalisierung herleiten:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3^n+1}{2} & \frac{3^n-1}{2} \\ \frac{3^n-1}{2} & \frac{3^n+1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Da die Formel aber vorgegeben ist, geht es auch wesentlich einfacher. Es bietet sich als Beweis eine einfache Induktion zur Verifikation der Formel an:
Start $n = 1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^1 \overset{(?)}{=} \begin{pmatrix} \frac{3^1+1}{2} & \frac{3^1-1}{2} \\ \frac{3^1-1}{2} & \frac{3^1+1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{(OK)}.$$

Schritt $n \to n+1$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{n+1} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3^n+1}{2} & \frac{3^n-1}{2} \\ \frac{3^n-1}{2} & \frac{3^n+1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{3^n+1}{2} + \frac{3^n-1}{2} & 2 \cdot \frac{3^n-1}{2} + \frac{3^n+1}{2} \\ \frac{3^n+1}{2} + 2 \cdot \frac{3^n-1}{2} & \frac{3^n-1}{2} + 2 \cdot \frac{3^n+1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \cdot 3^n + \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \cdot 3^n - \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \cdot 3^n - \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \cdot 3^n + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3^{n+1}+1}{2} & \frac{3^{n+1}-1}{2} \\ \frac{3^{n+1}-1}{2} & \frac{3^{n+1}+1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bei Bedarf auf der Rückseite weiterschreiben

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Hier sind Begründungen und nachvollziehbare Rechnungen erforderlich! Aus der Vorlesung oder den Übungen bekannte Sachverhalte können natürlich verwendet werden. **Tragen Sie das Endergebnis im 'Ergebnisfeld' ein!**

Aufgabe 6: (Extremwerte, 10 Punkte)
Ein Kegel der Höhe h und des Grundradius r hat die Oberfläche $A = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$ und das Volumen $V = \pi \cdot r^2 \cdot h/3$. Bestimmen Sie das Verhältnis h/r des Kegels, der bei gegebener Fläche A das maximale Volumen hat.

Lösung:
Mittels $A = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$ ergibt sich h als Funktion von r:

$$\frac{A - \pi \cdot r^2}{\pi \cdot r} = \sqrt{r^2 + h^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{\pi \cdot r} - r = \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{A}{\pi \cdot r} - r\right)^2 = h^2 + r^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = \frac{A^2}{\pi^2 \cdot r^2} - \frac{2 \cdot A}{\pi}.$$

Das Volumen V ist zu maximieren. Wir maximieren V^2:

$$V^2(r) = \frac{\pi^2}{9} \cdot r^4 \cdot h^2 = \frac{\pi^2}{9} \cdot r^4 \cdot \left(\frac{A^2}{\pi^2 \cdot r^2} - \frac{2 \cdot A}{\pi}\right) = \frac{A}{9} \cdot \left(A \cdot r^2 - 2 \cdot \pi \cdot r^4\right).$$

Das Maximum ergibt sich als Nullstelle der Ableitung:

$$0 \overset{(!)}{=} \frac{d}{dr}\left(A \cdot r^2 - 2 \cdot \pi \cdot r^4\right) = 2 \cdot A \cdot r - 8 \cdot \pi \cdot r^3 \quad \Rightarrow \quad r^2 = \frac{A}{4 \cdot \pi}.$$

Einsetzen in h^2 liefert: $h^2 = \frac{A^2}{\pi^2 \cdot r^2} - \frac{2 \cdot A}{\pi} = \frac{4 \cdot A}{\pi} - \frac{2 \cdot A}{\pi} = \frac{2 \cdot A}{\pi}.$

Das Verhältnis h/r ergibt sich damit zu: $\frac{h^2}{r^2} = \frac{2 \cdot A/\pi}{A/(4 \cdot \pi)} = 8 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{h}{r} = \sqrt{8}}$

Bei Bedarf auf der Rückseite weiterschreiben

Ergebnis: $h/r =$

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Hier sind Begründungen und nachvollziehbare Rechnungen erforderlich! Aus der Vorlesung oder den Übungen bekannte Sachverhalte können natürlich verwendet werden. **Tragen Sie das Endergebnis im 'Ergebnisfeld' ein!**

Aufgabe 7: (Differentiation von Umkehrfunktionen, 2 + 3 + 4 Punkte)
Sei $g = f^{-1}$ die Umkehrfunktion der Funktion $f(x) = x + e^x$. Bestimmen Sie:

$$a) \quad g(1), \qquad b) \quad g'(1), \qquad c) \quad g''(1).$$

Lösung:
a) Durch Einsetzen findet man $f(0) = 1$, also $\boxed{g(1) = 0}$.
b) Nach Vorlesung gilt mit $y = f(x)$, $x = g(y)$:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{g(y)}} \quad \stackrel{(g(1)=0)}{\Rightarrow} \quad g'(1) = \frac{1}{1+e^{g(1)}} = \frac{1}{1+e^0} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

c)

$$g''(y) = \frac{d}{dy}\, g'(y) = \frac{d}{dy}\, \frac{1}{1+e^{g(y)}} = -\frac{1}{(1+e^{g(y)})^2} \cdot \frac{d}{dy} e^{g(y)}$$

$$= -\frac{1}{(1+e^{g(y)})^2} \cdot e^{g(y)} \cdot \frac{d}{dy} g(y) = -\frac{1}{(1+e^{g(y)})^2} \cdot e^{g(y)} \cdot \frac{1}{1+e^{g(y)}} = -\frac{e^{g(y)}}{(1+e^{g(y)})^3}$$

$$\Rightarrow \quad g''(1) = -\frac{e^{g(1)}}{(1+e^{g(1)})^3} = -\frac{e^0}{(1+e^0)^3} = \boxed{-\frac{1}{8}}.$$

Bei Bedarf auf der Rückseite weiterschreiben

Ergebnis: a) $g(1) =$ b) $g'(1) =$ c) $g''(1) =$

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Hier sind Begründungen und nachvollziehbare Rechnungen erforderlich! Aus der Vorlesung oder den Übungen bekannte Sachverhalte können natürlich verwendet werden. **Tragen Sie das Endergebnis im 'Ergebnisfeld' ein!**

Aufgabe 8: (Grenzwerte, 6 Punkte)
Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot (e^{1/x} - 1)$.

Lösung:
Mit der Umformulierung

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot (e^{1/x} - 1) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x}$$

ergibt sich eine $\frac{0}{0}$–Situation für $x \to \infty$, auf die l'Hospital anwendbar ist:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}\,(e^{1/x} - 1)}{\frac{d}{dx}\,\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-e^{1/x}}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} e^{1/x} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}} = e^0 = \boxed{1}.$$

Bei Bedarf auf der Rückseite weiterschreiben

Ergebnis: Grenzwert =

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Hier sind Begründungen und nachvollziehbare Rechnungen erforderlich! Aus der Vorlesung oder den Übungen bekannte Sachverhalte können natürlich verwendet werden. **Tragen Sie das Endergebnis im 'Ergebnisfeld' ein!**

Aufgabe 9: (Unbestimmte Integration, 4 + 8 Punkte)
Bestimmen Sie folgende Stammfunktionen:

$$a) \quad \int \frac{\cos(\ln(x))}{x}\,dx, \qquad b) \quad \int \sin(x)\cdot\cos(x)\cdot e^{\sin(x)}\,dx.$$

Lösung:
a) Substitution $y = \ln(x)$, $dy/dx = 1/x$, $dy = dx/x$:

$$\int \frac{\cos(\ln(x))}{x}\,dx = \int \cos(y)\,dy = \sin(y) + c = \boxed{\sin(\ln(x)) + c}.$$

b) Substitution: $y = \sin(x)$, $dy = \cos(x)\,dx$:

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\cdot e^{\sin(x)}\,dx = \int y\cdot e^y\,dy.$$

Partielle Integration:

$$\int \underbrace{y}_{f(y)}\cdot\underbrace{e^y}_{g'(y)}\,dx = \underbrace{y}_{f(y)}\cdot\underbrace{e^y}_{g(y)} - \int \underbrace{1}_{f'(y)}\cdot\underbrace{e^y}_{g(y)}\,dx = y\cdot e^y - \int e^y\,dy = y\cdot e^y - e^y + c.$$

Rücksubstitution: $$\boxed{\int \sin(x)\cdot\cos(x)\cdot e^{\sin(x)}\,dx = \sin(x)\cdot e^{\sin(x)} - e^{\sin(x)} + c.}$$

Probe:

$$\frac{d}{dx}\Big(\sin(x)\cdot e^{\sin(x)} - e^{\sin(x)} + c\Big) = \cos(x)\cdot e^{\sin(x)} + \sin(x)\cdot\cos(x)\cdot e^{\sin(x)} - \cos(x)\cdot e^{\sin(x)}$$

$$= \sin(x)\cdot\cos(x)\cdot e^{\sin(x)} \quad \text{(OK)}.$$

Bei Bedarf auf der Rückseite weiterschreiben

Ergebnis: a) $\int \frac{\cos(\ln(x))}{x}\,dx =$

b) $\int \sin(x)\cdot\cos(x)\cdot e^{\sin(x)}\,dx =$

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Hier sind Begründungen und nachvollziehbare Rechnungen erforderlich! Aus der Vorlesung oder den Übungen bekannte Sachverhalte können natürlich verwendet werden. **Tragen Sie das Endergebnis im 'Ergebnisfeld' ein!**

Aufgabe 10: (Bestimmte Integration, uneigentliche Integrale, 2 + 4 + 4 Punkte)
Betrachten Sie $I_n := \int_0^\infty 2 \cdot x^{2\cdot n+1} \cdot e^{-x^2}\, dx$ mit $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.
a) Zeigen Sie: $I_n = \int_0^\infty y^n \cdot e^{-y}\, dy$.
b) Leiten Sie eine Rekursionsformel her, die I_n auf I_{n-1} zurückführt.
c) Ermitteln Sie einen expliziten Ausdruck für I_n.

Lösung:
a) Substitution: $y = x^2$, $dy = 2 \cdot x \cdot dx$, $x = 0 \Rightarrow y = 0$, $x = \infty \Rightarrow y = \infty$:

$$I_n = \int_0^\infty 2 \cdot x^{2\cdot n+1} \cdot e^{-x^2}\, dx = \int_0^\infty (x^2)^n \cdot e^{-x^2} \cdot \underbrace{2 \cdot x\, dx}_{dy} = \int_0^\infty y^n \cdot e^{-y}\, dy.$$

b) Partielle Integration (für $n \neq 0$):

$$I_n = \int_0^\infty \underbrace{y^n}_{f(y)} \cdot \underbrace{e^{-y}}_{g'(y)}\, dy = \Big[\underbrace{y^n}_{f(y)} \cdot \underbrace{(-e^{-y})}_{g(y)}\Big]_{y=0}^{y=\infty} - \int_0^\infty \underbrace{n \cdot y^{n-1}}_{f'(y)} \cdot \underbrace{(-e^{-y})}_{g(y)}\, dy$$

$$= n \cdot \int_0^\infty y^{n-1} \cdot e^{-y}\, dy = \boxed{n \cdot I_{n-1}}.$$

c) Mit b) folgt:

$$I_n = n \cdot I_{n-1} = n \cdot (n-1) \cdot I_{n-2} = \ldots = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \cdot I_0. = n! \cdot I_0.$$

Offensichtlich gilt: $I_0 = \int_0^\infty e^{-y}\, dy = \Big[-e^{-y}\Big]_{y=0}^{y=\infty} = -0 - (-1) = 1.$

Endergebnis: $\boxed{I_n = n!}$

Bei Bedarf auf der Rückseite weiterschreiben

Ergebnis: b) $I_n =$ c) $I_n =$