Da Gedächtnisprotokolle der Klausur im Internet zu finden sind, mache ich nun hiermit die Klausur vom 9.8.02 samt „Musterlösungen“ öffentlich.

Die Aufgaben der nächsten Klausur werden damit notwendigerweise recht disjunkt zu den Aufgaben der ersten Klausur ausfallen!

Meine Einschätzung der Aufgaben der Klausur vom 9.8.02:

1a)–i)	Einige leicht, andere Standard, einige zum (kurzen) Nachdenken.
2a)	Leicht
2b)	Anspruchsvoll
3)	Standard. Modifikation von Aufgabe 107, Blatt 15.
4)	Standard. Modifikation von Aufgabe 115, Blatt 15.
5a)–c)	Leicht, “Kurvendiskussion”, Schulstoff.
6a)	Leicht, Schulstoff. Modifikation von Aufgabe 118, Blatt 15.
6b)	Leicht, Schulstoff + Mathe I.
7)	Anspruchsvoll. Modifikation von Aufgabe 116, Blatt 15.
8)	Standard. Modifikation von Aufgabe 117, Blatt 15.
9a) +b)	Standard.
10)	Standard. Ähnlich Aufgabe 122, Blatt 15.

Meiner Erwartung nach hätte ein sehr guter Student in den gegebenen 2 Stunden etwa 8 der 10 Aufgaben schaffen sollen. Mit 40 erreichten Punkten wurde die Klausur als “deutlich bestanden” gewertet.

Vergleich mit den Klausuren von Prof. Bürgisser vom 28.7.2000 und 4.10.2000 (`math-www.uni-paderborn.de/~mif/infomath.html`):

Mit der Aufspaltung in Teilaufgaben waren die (3-stündigen) Bürgisser-Klausuren deutlich umfangreicher und die meisten Aufgaben waren etwas anspruchsvoller. Bestanden war ab 24 von 50 Punkten (also 48%). Seine Durchfallquote betrug 39% in der ersten Klausur bzw. 38% in beiden Klausuren zusammen.

Trotz der durchaus vergleichbaren Bedingungen liegt die Durchfallquote meiner ersten Klausur bei etwa 56%.

Für Erklärungen hierfür wäre ich dankbar.

Frustriert,

W. Oevel

Klausur

Name:	Vorname:	Matrikelnummer:

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ	Bonus	Σ
max Punkte:	18	11	6	7	8	8	11	9	14	8	100	(10)	
erreichte Punkte:													

Note:

Kontrollieren Sie diese Klausur auf Vollständigkeit: sie sollte 10 Seiten haben (Aufgaben 1–10). Tragen Sie Name und Matrikelnummer **auf allen Seiten** ein. Lösungswege und Lösungen sind in die Klausurvorlage (evtl. auf die Rückseiten) einzutragen. Sollte der Platz nicht ausreichen, so stellt die Klausuraufsicht zusätzliches Papier zur Verfügung. **Die Klammerung der Klausur nicht lösen!**

Nicht mit Bleistift und nicht in Rot schreiben!

Dauer: 120 Minuten
Zulässige Hilfsmittel: 4 handschriftliche Seiten + nichtprogrammierbarer Taschenrechner

---

Aufgabe 1: (Quickies, jeweils 2 oder 0 oder −2 Teilpunkte)
Hier sind keine Begründungen erforderlich, nur 'ja', 'nein' oder gar nichts ankreuzen! **Falsche Antworten ergeben negative Punkte!**

a) $\lim\limits_{n\mapsto\infty} \dfrac{2\cdot n-1}{n\cdot(n-1)} = 2.$	○ ja	○ **nein**
b) Jede reelle Folge (x_n) mit $x_n \geq x_{n+1} \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert.	○ **ja**	○ nein
c) Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2+1}$ konvergiert.	○ **ja**	○ nein
d) Für $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ gilt: $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = 4.$	○ **ja**	○ nein
e) Es gilt $x\cdot\cos(x) = o(x)$ im Limes $x\to 0$.	○ ja	○ **nein**
f) Jede stetige Funktion auf dem Intervall $[-1,1]$ hat ein Maximum.	○ **ja**	○ nein
g) Die Funktion $x \to \lvert x\rvert$ ist am Punkt $x=0$ differenzierbar.	○ ja	○ **nein**
h) Für alle $z\in\mathbb{C}$ gilt $\lvert e^z\rvert \leq e^{\lvert z\rvert}$.	○ **ja**	○ nein
i) Für (glatte) Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gilt stets: $\int f''(x)\cdot g(x)\,dx = f'(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g'(x)\,dx.$	○ **ja**	○ nein

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Hier sind Begründungen und nachvollziehbare Rechnungen erforderlich! Aus der Vorlesung oder den Übungen bekannte Sachverhalte können natürlich verwendet werden. **Tragen Sie das Endergebnis im 'Ergebnisfeld' ein!**

Aufgabe 2: (Folgen, 3 + 8 Punkte)
Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

$$a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2-(n-1)^2}{n}, \qquad b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{e^{1/n}-1}.$$

Lösung:
a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2-(n-1)^2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2\cdot n+1-(n^2-2\cdot n+1)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot n}{n} = 4.$$

b) Es gilt

$$\sqrt{n^2+1}-n = \frac{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\cdot\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{(n^2+1)-n^2}{n\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)} = \frac{1}{n\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)},$$

$$e^{1/n}-1 = \left(1+\frac{1}{n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)-1 = \frac{1}{n}\cdot\left(1+O\Big(\frac{1}{n}\Big)\right).$$

Es folgt

$$\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{e^{1/n}-1} = \frac{1}{n\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)}\cdot\frac{1}{\frac{1}{n}\cdot\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}\cdot\frac{1}{1+O\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{e^{1/n}-1} = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+O\left(\frac{1}{n}\right)}\right) = \frac{1}{2}.$$

Bei Bedarf auf der Rückseite weiterschreiben

Ergebnis: a) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2-(n-1)^2}{n} =$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{e^{1/n}-1} =$

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Hier sind Begründungen und nachvollziehbare Rechnungen erforderlich! Aus der Vorlesung oder den Übungen bekannte Sachverhalte können natürlich verwendet werden. **Tragen Sie das Endergebnis im 'Ergebnisfeld' ein!**

Aufgabe 3: (Reihen, 6 Punkte)

Für welche Werte von x konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot x^k}{k+1}$ absolut?

Lösung:

Wurzelkriterium für $\sum_k a_k$:

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \left(\frac{k \cdot |x|^k}{k+1}\right)^{\frac{1}{k}} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^{\frac{1}{k}} \cdot |x| \leq |x| \overset{(!)}{<} 1.$$

Beachte dabei

$$\left(\frac{k}{k+1}\right)^{1/k} \leq 1.$$

Für $|x| < 1$ ist damit das Wurzelkriterium erfüllt.

Für $|x| \geq 1$ ist die Folge $\frac{k \cdot x^k}{k+1}$ keine Nullfolge, denn $\frac{k}{k+1} \geq \frac{1}{2}$ und $|x|^k \to \infty$ für $k \to \infty$. Damit divergiert die Reihe für $|x| \geq 1$.

Bei Bedarf auf der Rückseite weiterschreiben

Ergebnis: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot x^k}{k+1}$ konvergiert absolut für alle x mit der Eigenschaft:

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Hier sind Begründungen und nachvollziehbare Rechnungen erforderlich! Aus der Vorlesung oder den Übungen bekannte Sachverhalte können natürlich verwendet werden. **Tragen Sie das Endergebnis im 'Ergebnisfeld' ein!**

Aufgabe 4: (Komplexe Wurzeln, 7 Punkte)
Bestimme alle komplexen Lösungen von $z^3 = i$ in möglichst expliziter *kartesischer* Darstellung. (Hinweis: $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.)

Lösung:
Die Polardarstellung von i ist $i = e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$. Die drei Wurzeln sind damit

$$z_k = e^{i \cdot (\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3})}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Die Polarwinkel $\arg(z_k)$ sind

$$\arg(z_0) = \frac{\pi}{6}, \quad \arg(z_1) = \frac{\pi}{6} + \frac{2 \cdot \pi}{3} = \frac{5 \cdot \pi}{6}, \quad \arg(z_2) = \frac{\pi}{6} + \frac{4 \cdot \pi}{3} = \frac{9 \cdot \pi}{6} = \frac{3 \cdot \pi}{2}.$$

Mit $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ ergeben sich die kartesische Darstellungen

$$z_0 = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3} + i}{2},$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos\left(\frac{5 \cdot \pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{5 \cdot \pi}{6}\right) = -\cos\left(\pi - \frac{5 \cdot \pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\pi - \frac{5 \cdot \pi}{6}\right) \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3} + i}{2}, \end{aligned}$$

$$z_2 = \cos\left(\frac{3 \cdot \pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \pi}{2}\right) = -i.$$

Bei Bedarf auf der Rückseite weiterschreiben

Ergebnis: $z_0 =$, $z_1 =$, $z_2 =$

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Hier sind Begründungen und nachvollziehbare Rechnungen erforderlich! Aus der Vorlesung oder den Übungen bekannte Sachverhalte können natürlich verwendet werden. **Tragen Sie das Endergebnis im 'Ergebnisfeld' ein!**

Aufgabe 5: (Kurvendiskussion, 4 + 2 + 2 Punkte)

a) Bestimmen Sie Lage und Art aller lokalen Extrema der Funktion $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

b) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

c) Fertigen Sie eine grobe Skizze des Graphen von $f(x)$ an!

Lösung:
a) Suche die Extrema:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{x}{1+x^2} = \frac{(1+x^2) - x\cdot(2\cdot x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \pm 1}.$$

Test auf Minimum/Maximum mittels zweiter Ableitung:

$$f''(x) = \frac{-2\cdot x\cdot(1+x^2)^2 - (1-x^2)\cdot(2\cdot x)\cdot 2\cdot(1+x^2)}{(1+x^2)^4}$$

$$\Rightarrow \quad f''(\pm 1) = \frac{\mp 2\cdot(1+1^2)^2 - 0\cdot(\ldots)}{(1+1^2)^4} = \mp\frac{1}{2}.$$

Damit ist $x = 1$ ein Maximum, $x = -1$ ist ein Minimum.
b) Die Grenzwerte sind

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1+x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$= \left(\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{1+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2}} = 0\cdot\frac{1}{1+0} = 0.$$

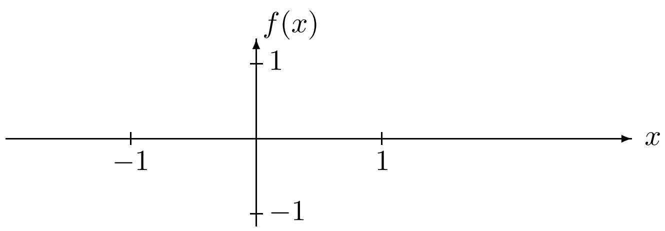
Bei Bedarf auf der Rückseite weiterschreiben

Ergebnis: a) Extrema: $x_1 =$, $x_2 =$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) =$

c) Skizze:



Name: Vorname: Matrikelnummer:

Hier sind Begründungen und nachvollziehbare Rechnungen erforderlich! Aus der Vorlesung oder den Übungen bekannte Sachverhalte können natürlich verwendet werden. **Tragen Sie das Endergebnis im 'Ergebnisfeld' ein!**

Aufgabe 6: (Extremwerte, 5 + 3 Punkte)
a) Bestimme den Punkt der Geraden $y = a \cdot x + b$ mit dem geringsten Abstand zum Ursprung. Wie groß ist dieser Abstand?
b) Zeige, dass der Ortsvektor dieses Punktes senkrecht auf der Geraden steht.

Lösung:
a) Der Quadrat des Abstands zum Ursprung ist

$$d^2 = x^2 + y^2 = x^2 + (a \cdot x + b)^2 = (1 + a^2) \cdot x^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot x + b^2.$$

Der Punkt mit dem kleinsten Abstand:

$$\frac{d}{dx}\, d^2 = 2 \cdot (1 + a^2) \cdot x + 2 \cdot a \cdot b = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = -\frac{a \cdot b}{1 + a^2}, \quad y = a \cdot x + b = -\frac{a^2 \cdot b}{1 + a^2} + b = \frac{b}{1 + a^2}.$$

Geometrisch ist klar, dass es sich um ein Minimum handeln muss. Der Abstand zum Nullpunkt ist

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{a^2 \cdot b^2 + b^2}{(1 + a^2)^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

b) Die Punkte $(0, b)$ und $(-b/a, 0)$ liegen auf der Geraden. Der Richtungsvektor der Geraden $(0, b) - (-b/a, 0) = (b/a, b)$ ist parallel zu $(1, a)$. Der Extrempunkt steht senkrecht darauf:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + a \cdot y = \frac{-a \cdot b + a \cdot b}{1 + a^2} = 0.$$

Bei Bedarf auf der Rückseite weiterschreiben

Ergebnis: Der Geradenpunkt ist: $x =$, $y =$
Der Abstand ist:

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Hier sind Begründungen und nachvollziehbare Rechnungen erforderlich! Aus der Vorlesung oder den Übungen bekannte Sachverhalte können natürlich verwendet werden. **Tragen Sie das Endergebnis im 'Ergebnisfeld' ein!**

Aufgabe 7: (Implizite Differentiation, 11 Punkte)
Sei $y = f(x)$ als Lösung der Gleichung $x^2 \cdot y + y^3 = 2 \cdot x$ definiert. Bestimme alle (reellen) Extrema von $f(x)$ und identifiziere sie als Minimum oder Maximum. Berechne dazu f'' an den Extremstellen.

Lösung:
Ableiten der Gleichung

$$x^2 \cdot f(x) + f(x)^3 = 2 \cdot x$$

liefert die Gleichung

$$2 \cdot x \cdot f(x) + (x^2 + 3 \cdot f(x)^2) \cdot f'(x) = 2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{2 - 2 \cdot x \cdot f(x)}{x^2 + 3 \cdot f(x)^2}. \qquad (\#)$$

Die Forderung $f'(x) = 0$ führt damit auf die beiden Gleichungen

$$x^2 \cdot y + y^3 = 2 \cdot x \quad \text{und} \quad 2 \cdot x \cdot y = 2$$

für x und y. Da $x = 0$ zum Widerspruch $0 = 2$ führt, muss $x \neq 0$ gelten. Einsetzen von $y = 1/x$ (Lösung der zweiten Gleichung) in die erste Gleichung liefert

$$\frac{x^2}{x} + \frac{1}{x^3} = 2 \cdot x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^3} = x \quad \Rightarrow \quad 1 = x^4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1.$$

Die dazu gehörenden Funktionswerte $y = 1/x$ sind $f(1) = 1$, $f(-1) = -1$.

Ableiten von (#) liefert

$$f''(x) = \frac{-2 \cdot f(x) - 2 \cdot x \cdot f'(x)}{x^2 + 3 \cdot f(x)^2} - \frac{(2 - 2 \cdot x \cdot f(x)) \cdot (2 \cdot x + 6 \cdot f(x) \cdot f'(x))}{(x^2 + 3 \cdot f(x)^2)^2}.$$

Mit $x = \pm 1$, $f(\pm 1) = \pm 1$, $f'(\pm 1) = 0$:

$$f''(1) = \frac{-2}{1 + 3 \cdot 1^2} = -\frac{1}{2}, \quad f''(-1) = \frac{2}{1 + 3 \cdot 1^2} = \frac{1}{2}$$

ist $x = 1$ ein Maximum und $x = -1$ ein Minimum.

Bei Bedarf auf der Rückseite weiterschreiben

Ergebnis: Die Extrema sind $x_1 =$, $x_2 =$
Der Extremwerte sind $f(x_1) =$, $f(x_2) =$
Es gilt $f''(x_1) =$, $f''(x_2) =$

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Hier sind Begründungen und nachvollziehbare Rechnungen erforderlich! Aus der Vorlesung oder den Übungen bekannte Sachverhalte können natürlich verwendet werden. **Tragen Sie das Endergebnis im 'Ergebnisfeld' ein!**

Aufgabe 8: (Taylor–Entwicklung, 9 Punkte)
Bestimme das Taylor–Polynom $T_3(x)$ vom Grad 3 der Funktion $\sin(x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Zeige, dass für alle $x \in [-1, 1]$ gilt:

$$|\sin(x) - T_3(x)| \leq \frac{|x|^5}{5!} < \frac{1}{100}.$$

Lösung:
Mit der bekannten Entwicklung $f(x) = \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots$ ist

$$T_3(x) = T_4(x) = x - \frac{x^3}{3!}.$$

Die Restgliedformel für $T_4(x)$ liefert:

$$\sin(x) - T_3(x) = \sin(x) - T_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} \cdot x^5$$

mit einem Zwischenpunkt ξ der $0 \leq |\xi| \leq |x|$ erfüllt. Mit $f^{(5)}(\xi) = \cos(\xi)$ folgt

$$|\sin(x) - T_3(x)| \leq \frac{|\cos(\xi)|}{5!} \cdot |x|^5 \leq \frac{|x|^5}{5!} \leq \frac{1}{5!} = \frac{1}{120} < \frac{1}{100}.$$

Bei Bedarf auf der Rückseite weiterschreiben

Ergebnis: $T_3(x) =$

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Hier sind Begründungen und nachvollziehbare Rechnungen erforderlich! Aus der Vorlesung oder den Übungen bekannte Sachverhalte können natürlich verwendet werden. **Tragen Sie das Endergebnis im 'Ergebnisfeld' ein!**

Aufgabe 9: (Unbestimmte Integration, 8 + 6 Punkte)
Bestimmen Sie folgende Stammfunktionen:

$$a) \quad \int x^3 \cdot \cos(x^2)\, dx, \qquad b) \quad \int \frac{x-3}{x\cdot(x^2-9)}\, dx.$$

Lösung:
a) Substitution $y = x^2$, $dy/dx = 2\cdot x$, $dx = dy/(2\cdot x)$:

$$\int x^3 \cdot \cos(x^2)\, dx = \int x^3 \cos(y) \cdot \frac{dy}{2\cdot x} = \frac{1}{2} \cdot \int x^2 \cdot \cos(y)\, dy = \frac{1}{2} \cdot \int y \cdot \cos(y)\, dy.$$

Partielle Integration:

$$\int x^3 \cdot \cos(x^2)\, dx = \frac{1}{2} \int \underbrace{y}_{f(y)} \cdot \underbrace{\cos(y)}_{g'(y)} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{y}_{f(y)} \cdot \underbrace{\sin(y)}_{g(y)} dy - \frac{1}{2} \cdot \int \underbrace{1}_{f'(y)} \cdot \underbrace{\sin(y)}_{g(y)} dy$$

$$= \frac{1}{2} \cdot y \cdot \sin(y) - \frac{1}{2} \cdot \int \sin(y)\, dy = \frac{y \cdot \sin(y) + \cos(y)}{2} + c = \frac{x^2 \cdot \sin(x^2) + \cos(x^2)}{2} + c.$$

b) Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x-3}{x\cdot(x^2-9)} = \frac{(x-3)}{x\cdot(x-3)\cdot(x+3)}$$

$$= \frac{1}{x\cdot(x+3)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+3} = \frac{a\cdot(x+3) + b\cdot x}{x\cdot(x+3)} = \frac{(a+b)\cdot x + 3\cdot a}{x\cdot(x+3)}$$

$$\Rightarrow \quad a + b = 0, \quad 3\cdot a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{3}, \quad b = -a = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{(x-3)}{x\cdot(x^2-9)}\, dx = \int \left(\frac{1/3}{x} - \frac{1/3}{x+3}\right) dx = \frac{1}{3} \cdot \ln(|x|) - \frac{1}{3} \cdot \ln(|x+3|) + c.$$

Bei Bedarf auf der Rückseite weiterschreiben

Ergebnis: a) $\int x^3 \cdot \cos(x^2)\, dx =$

b) $\int \frac{x-3}{x\cdot(x^2-9)}\, dx =$

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Hier sind Begründungen und nachvollziehbare Rechnungen erforderlich! Aus der Vorlesung oder den Übungen bekannte Sachverhalte können natürlich verwendet werden. **Tragen Sie das Endergebnis im 'Ergebnisfeld' ein!**

Aufgabe 10: (Bestimmte Integration, uneigentliche Integrale. 8 Punkte)
Berechne $\int_2^\infty \frac{1}{t \cdot \ln(t)^2}\, dt$.

Lösung:
Substitution: $y = \ln(t)$, $dy = dt/t$, $t = 2 \Rightarrow y = \ln(2)$, $t = \infty \Rightarrow y = \infty$:

$$\int_2^\infty \frac{1}{t \cdot \ln(t)^2}\, dt = \int_{\ln(2)}^\infty \frac{dy}{y^2} = \lim_{b\to\infty} \int_{\ln(2)}^b \frac{dy}{y^2} = \lim_{b\to\infty} \Big[-\frac{1}{y} \Big]_{y=\ln(2)}^{y=b}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \Big(-\frac{1}{b} + \frac{1}{\ln(2)} \Big) = \frac{1}{\ln(2)}.$$

Bei Bedarf auf der Rückseite weiterschreiben

Ergebnis: $\int_2^\infty \frac{1}{t \cdot \ln(t)^2}\, dt =$