Übungsblatt 9

Mit $*$ gekennzeichnete Aufgaben können zum Sammeln von Bonuspunkten verwendet werden. Lösungen sind per Web-Formular unter `http://math-www.upb.de/~walter` ($\longrightarrow$ Lehre SS 02 $\longrightarrow$ Übungen) bis spätestens Do, 27.6.02, abzuliefern.

Aufgabe 62: (O-Kalkül für Funktionen)
Zeige:

$$a)\quad \frac{\sin(x^2)}{x\cdot\cos(x^3)} = O(x) \text{ im Limes } x\to 0,$$

$$b)\quad \frac{e^x\cdot(1-\cos(x^2))}{x^4} = O(1) \text{ im Limes } x\to 0,$$

$$c)\quad \frac{\sin(x)}{x} = O\Big(\frac{1}{x}\Big) \text{ im Limes } x\to\infty.$$

Aufgabe 63*: (O-Kalkül für Funktionen. 1 Bonuspunkt)
Seien $M_1, \ldots, M_7$ die üblichen Ziffern der Matrikelnummer. Gilt

$$1-\cos(x^{M_2+M_3+M_4}) = O(x^{3\cdot M_4+4\cdot M_5-M_6}) \quad \text{im Limes } x\to 0\ ?$$

(Es gibt nur einen Abgabeversuch für die Antwort `richtig` oder `falsch`.)

Aufgabe 64: (O-Kalkül für Funktionen)
Zeige:

$$a)\quad x\cdot\ln(|x|) = o(1) \quad \text{im Limes } x\to 0, \qquad b)\quad \ln(x) = o(x) \quad \text{im Limes } x\to\infty.$$

Anleitung: Offensichtlich gilt $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{y\to y_0} f(g(y))$, wenn man die Existenz der Grenzwerte voraussetzt und $g(y)$ an der Stelle y_0 stetig ist. Weiterhin: Die Existenz des rechten Grenzwerts impliziert die Existenz des linken Grenzwerts, wenn zusätzlich g auf einer Umgebung von y_0 streng monoton ist. Das gilt auch für $x_0 = \pm\infty$ und/oder $y_0 = \pm\infty$. Benutze dies (ohne Beweis) und setze hier $x = e^{-y}$ bzw. $x = e^y$. Betrachte statt des Limes in x einen entsprechenden Limes in y.

Aufgabe 65: (Identitäten der trigonometrischen Funktionen)
a) Zeige für beliebiges $z\in\mathbb{C}$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right) = \cos(z), \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-z\right) = \sin(z).$$

b) Folgere $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

c) Zeige für beliebiges $x, y \in \mathbb{C}$:

$$\sin(x) \pm \sin(y) = 2 \cdot \cos\Big(\frac{x \mp y}{2}\Big) \cdot \sin\Big(\frac{x \pm y}{2}\Big).$$

Anleitung: Additionstheoreme.

Aufgabe 66: (Spezielle Funktionen: tan und arctan. Mühselige technische Puzzelei.)

a) Wir führen die Tangens-Funktion $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$ ein. Sie ist für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\cdot\pi}{2}, \pm\frac{5\cdot\pi}{2}, \ldots\}$ definiert (an diesen Stellen gilt $\cos(x) \neq 0$). Zeige, dass sie die Symmetrie $\tan(-x) = -\tan(x)$ und die Periode π hat: $\tan(x+\pi) = \tan(x)$. Zeige, dass das Additionstheorem

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \cdot \tan(y)}$$

für alle x, y mit $x, y, x+y \notin \{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\cdot\pi}{2}, \pm\frac{5\cdot\pi}{2}, \ldots\}$ gilt.

b) Zeige, dass für alle x, y im Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ gilt:

$$\tan(x) \cdot \tan(y) \begin{cases} = 1 & \text{für} \quad x + y = \pm\frac{\pi}{2}, \\ > 1 & \text{für} \quad x + y > \frac{\pi}{2} \text{ oder } x + y < -\frac{\pi}{2}, \\ > 1 & \text{für} \quad (x < 0 \text{ und } x + y < \frac{\pi}{2}) \text{ oder } (x > 0 \text{ und } x + y > -\frac{\pi}{2}), \\ < 1 & \text{für} \quad (x \geq 0 \text{ und } x + y < \frac{\pi}{2}) \text{ oder } (x \leq 0 \text{ und } x + y > -\frac{\pi}{2}). \end{cases}$$

Verwende hierzu ohne Beweis, dass $\tan(y)$ auf dem "Basisintervall" $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ streng monoton steigt.

c) Schränkt man $\tan(x)$ auf das Basisinterval $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ein, so ist der Tangens wegen der strengen Monotonie dort invertierbar. Die (wiederum streng monoton steigende) Umkehrfunktion wird als Arcus Tangens bezeichnet:

$$\arctan : \mathbb{R} \mapsto \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big).$$

Visualisiere MuPADs `arctan` mit MuPADs `plotfunc2d`. Bestimme $\arctan(0)$, $\arctan(\pm 1)$ und $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \arctan(x)$.

d) Zeige, dass die Identität

$$\arctan(X) + \arctan(Y) = \begin{cases} \arctan\Big(\frac{X+Y}{1-X\cdot Y}\Big) & \text{für} \quad X \cdot Y < 1, \\ \arctan\Big(\frac{X+Y}{1-X\cdot Y}\Big) + \pi & \text{für} \quad X \cdot Y > 1,\ X > 0,\ Y > 0, \\ \arctan\Big(\frac{X+Y}{1-X\cdot Y}\Big) - \pi & \text{für} \quad X \cdot Y > 1,\ X < 0,\ Y < 0 \end{cases}$$

für alle $X, Y \in \mathbb{R}$ mit $X \cdot Y \neq 1$ gilt. Welche Identität gilt für $Y = \frac{1}{X}$?

Anleitung: benutze b).

Aufgabe 67: (Spezielle Funktionen: Ableitung der Exponentialfunktion)
Zeige $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$ und folgere hieraus $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^{z+h} - e^z}{h} = e^z$ für jedes $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 68: (Spezielle Funktionen: Ableitung der trigonometrischen Funktionen)
Zeige

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1, \quad \lim_{h\to 0} \frac{1 - \cos(h)}{h} = 0$$

und folgere hieraus

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(z+h) - \sin(z)}{h} = \cos(z), \quad \lim_{h\to 0} \frac{\cos(z+h) - \cos(z)}{h} = -\sin(z)$$

für jedes $z \in \mathbb{C}$. Anleitung für den letzten Teil: Additionstheoreme.

Aufgabe 69: (Polarkoordinaten)
Bestimme die Polarkoordinaten (r, φ) der folgenden komplexen Zahlen:

$$1, \quad i, \quad -1, \quad -i, \quad 1+i, \quad -1+i, \quad -1-i, \quad 1-i.$$

Der Polarwinkel einer komplexen Zahl z wird auch „das Argument“ von z genannt. Die MuPAD-Funktion dazu: `abs` (= Absolutbetrag = Radius), `arg` (= Argument = Polarwinkel).

Aufgabe 70*: (Komplexe Wurzeln. 1 Bonuspunkt)
Seien $M_1, \ldots, M_7$ die üblichen Ziffern der Matrikelnummer. Bestimme die Polarkoordinaten von

$$a = \frac{M_2 + M_3}{M_1 + M_4 + M_5} + i \cdot \frac{M_2 + M_3}{M_1 + M_4 + M_5}$$

(der Polarwinkel läßt sich exakt ausdrücken). Bestimme alle komplexen Wurzeln

$$(i^{M_1 + M_6 + M_7} \cdot a)^{1/5},$$

also alle Lösungen z_0, z_1, z_2 etc. von $z^5 = i^{M_1+M_6+M_7} \cdot a$. Abzugeben ist die dritte Lösung z_2 (in der Nummerierung wie in Bemerkung 5.21 der Vorlesung). Sie ist über ihren Betrag und ihren Polarwinkel $\in [0, 2 \cdot \pi)$ anzugeben. Für π ist das MuPAD-Symbol `PI` zu verwenden.
Relevante MuPAD-Funktionen zur Kontrolle: `abs, arg, arctan, numeric::polyroots`.