Mathe II für Informatiker — Sommersemester 02
Walter Oevel — 6. 6. 2002

Übungsblatt 8

Mit $*$ gekennzeichnete Aufgaben können zum Sammeln von Bonuspunkten verwendet werden. Lösungen sind per Web-Formular unter `http://math-www.upb.de/~walter` ($\longrightarrow$ Lehre SS 02 $\longrightarrow$ Übungen) bis spätestens Do, 27.6.02, abzuliefern.

Aufgabe 48: (Stetigkeit. Einfacher Beweis)

Beweise formal, dass die Betragsfunktion $z \in \mathbb{C} \to |z|$ überall auf $\mathbb{C}$ stetig ist.
Anleitung: leite aus der Dreiecksungleichung zunächst die „umgekehrte Dreiecksungleichung“ $\Big||z_1| - |z_2|\Big| \leq |z_1 - z_2|$ für beliebige komplexe Zahlen z_1, z_2 her.

Aufgabe 49: (Stetigkeit)

Zeige, dass folgende Funktion am Nullpunkt stetig ist: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{(x^2)} - 1 - x^2}{x^3} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

Aufgabe 50: (Stetigkeit)

An welchen Stellen $x \in \mathbb{R}$ ist die folgende (reelle) Funktion stetig: $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{1 + x^{2n}}$?

Aufgabe 51: (Stetigkeit, Rechenregeln)

Seien f und g am Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetige reelle Funktionen. Zeige, dass die Funktionen

$$M(x) = \max(f(x), g(x)) \quad \text{und} \quad m(x) = \min(f(x), g(x))$$

am Punkt x stetig sind.
Anleitung: $M(x) = \frac{1}{2} \cdot (f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|)$, $m(x) = \frac{1}{2} \cdot (f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|)$.

Aufgabe 52: (Stetigkeit)

An welchen Stellen $x \in \mathbb{R}$ ist die folgende (reelle) Funktion stetig?

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \text{ rational ist,} \\ 1 - x & \text{falls } x \text{ irrational ist.} \end{cases}$$

Anleitung: zu jeder reellen Zahl x gibt es eine Folge rationaler Zahlen sowie eine Folge irrationaler Zahlen, die gegen x konvergiert.

Aufgabe 53: (Stetigkeit. Technisch sehr anspruchsvoll. Für Ehrgeizige.)

Die eindeutige „Normalform“ einer rationalen Zahl $x \neq 0$ sei $x = \frac{m}{n}$ mit *teilerfremden* ganzen Zahlen m, n und $n > 0$. Zeige, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{für } x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \text{ mit der Normalform } x = \dfrac{m}{n}, \\ 1 & \text{für } x = 0, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

in allen irrationalen Punkten stetig und in allen rationalen Punkten unstetig ist.

Anleitung: Verwende, dass es zu jeder irrationalen Zahl x eine Folge rationaler Zahlen gibt, die gegen x konvergiert. Die Zähler und Nenner dieser rationalen Zahlen werden immer größer. Ebenso gibt es zu jeder rationalen Zahl x eine Folge rationaler Zahlen, die gegen x konvergiert, wobei die Zähler und Nenner der Folgenglieder immer größer werden.

Aufgabe 54: (Funktionsgrenzwerte)
Betrachte die reelle Funktion $f(x) = \frac{|x|}{x}$ für $x \neq 0$. Bestimme den links- und rechtsseitigen Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0 \pm 0} f(x)$. Läßt sich f im Punkt $x = 0$ stetig ergänzen?

Aufgabe 55: (Funktionsgrenzwerte)
Bestimme den Grenzwert $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n - 1}{x^m - 1}$ für $m, n \in \mathbb{N}$. Anleitung: Aufgabe 8.

Aufgabe 56*: (Funktionsgrenzwerte. 1 Bonuspunkt)
Seien M_1, ..., M_7 die üblichen Ziffern der Matrikelnummer. Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^{M_1+M_2} - x^{-M_4-M_5}}{x^{M_1+M_3} - x^{-M_4-M_5}}.$$

Anleitung: vergleiche mit Aufgabe 55. MuPAD-Funktion zur Kontolle: `limit`.

Aufgabe 57: (Funktionsgrenzwerte)
Bestimme den Grenzwert $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$.

Aufgabe 58: (Funktionsgrenzwerte)
Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 10 \cdot x + 16}{|x-2| + |x^2 - 4|}$?

Aufgabe 59: (Zwischenwertsatz)
Zeige, dass jedes reelle Polynom ungeraden Grades mindestens eine reelle Nullstelle besitzt.

Aufgabe 60*: (Zwischenwertsatz, Intervallhalbierung. 1 Bonuspunkt)
Seien M_1, ..., M_7 die üblichen Ziffern der Matrikelnummer. Finde per Bisektion eines geeigneten Startintervalls ein Intervall $[a, b]$ mit $b - a \leq 10^{-2}$, das den Wert

$$\Big(\frac{10 \cdot M_1 + M_2 + M_3}{13 \cdot M_1 + M_5 + M_6}\Big)^{\frac{1}{3}}$$

enthält.

Aufgabe 61: (Zwischenwertsatz)
Sei T die Funktion, die jedem Punkt des Äquators die dort herrschende Temperatur zuordnet (diese Funktion sei stetig). Zeige, dass es mindestens einen Punkt auf dem Äquator gibt, an dem die gleiche Temperatur herrscht wie an seinem antipodalen (gegenüberliegenden) Punkt.