Übungsblatt 7

Mit $*$ gekennzeichnete Aufgaben können zum Sammeln von Bonuspunkten verwendet werden. Lösungen sind per Web-Formular unter `http://math-www.upb.de/~walter` ($\longrightarrow$ Lehre SS 02 $\longrightarrow$ Übungen) bis spätestens Do, 6.6.02, abzuliefern.

Aufgabe 45: (Summation durch Partialbruchzerlegung)
Bestimme den Reihenwert von

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2 - k}{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)\cdot(k+4)}.$$

Anleitung: Rezept 3.32, Beispiel 3.33 der Vorlesung.

Aufgabe 46*: (Summation durch Partialbruchzerlegung. 1 Bonuspunkt)
Seien $M_1, \ldots, M_7$ die üblichen Ziffern der Matrikelnummer. Bestimme den Reihenwert

$$\sum_{k=2\cdot M_1+M_4}^{\infty} \frac{k - M_6 - M_7}{k^3 + (M_2+M_3-M_4)\cdot k^2 - (M_1+M_2+M_3)\cdot(M_1+M_4)\cdot k}$$

Anleitung: wie Aufgabe 45, rechenintensiver.
MuPAD-Funktionen zur Kontrolle: `partfrac, sum`.

Aufgabe 47*: (Summation durch Partialbruchzerlegung. 1 Bonuspunkt für c.)
In Rezept 3.32 und Beispiel 3.33 der Vorlesung wurde nur der Fall diskutiert, dass in

$$\sum_k \frac{c_0 + c_1\cdot k + \cdots + c_p\cdot k^p}{d_0 + d_1\cdot k + \cdots + d_q\cdot k^q}$$

das Nennerpolynom $d_0 + d_1\cdot k + \cdots + d_q\cdot k^q$ nur einfache Nullstellen hat.

a) Benutze MuPADs `partfrac`, um die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{1}{k^2\cdot(k+1)^2}, \quad \frac{1}{(k+1)^3\cdot(k+2)}, \quad \frac{1}{(k+1)^4\cdot(k+2)^3\cdot(k+3)^2}$$

zu bestimmen.

b) Betrachte den allgemeinen Fall

$$\sum_k \frac{c_0 + c_1\cdot k + \cdots + c_p\cdot k^p}{(k-k_1)^{n_1}\cdot(k-k_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(k-k_r)^{n_r}},$$

in dem das Nennerpolynom Nullstellen k_i der Vielfachheiten n_i hat. Es gelte $p \le n_1 + \cdots + n_r - 2$. Stelle eine Vermutung auf, wie der allgemeine Ansatz für die Partialbruchzerlegung zu lauten hat.

c*) Seien $M_1, \ldots, M_7$ die üblichen Ziffern der Matrikelnummer. Berechne die Partialbruchzerlegung von $\dfrac{k - M_1 - M_3 - M_5 - M_7}{k^3 \cdot (k+1)^2}$.

d) Gelingt es mit c), die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k - M_1 - M_3 - M_5 - M_7}{k^3 \cdot (k+1)^2}$$

explizit aufzusummieren? Siehe auch Beispiel 3.22 der Vorlesung.