# Übungsblatt 6

Mit $*$ gekennzeichnete Aufgaben können zum Sammeln von Bonuspunkten verwendet werden. Lösungen sind per Web-Formular unter `http://math-www.upb.de/~walter` ($\longrightarrow$ Lehre SS 02 $\longrightarrow$ Übungen) bis spätestens Do, 30.5.02, abzuliefern.

**Aufgabe 39:** (Von Schnecken und Bäumen. Die harmonische Reihe)
Eine Schnecke beginnt, einen 1 Meter hohen Baum hochzukriechen, wobei sie jeden Tag die Strecke $\epsilon \in (0,1)$ schafft. In der Nacht ruht sie, während der Baum um einen Meter wächst (kurioserweise wächst dieser Baum nur nachts). Wird die Schnecke jemals die Baumspitze erreichen? Wie alt wird sie sein, wenn sie täglich nur 10 cm zurücklegt?

**Aufgabe 40:** (Reihen. Diverse Konvergenzkriterien)
Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$a)\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+\sqrt{k}}, \quad b)\quad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-\sqrt{k}}, \quad c)\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}}.$$

$$d)\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}}{k}, \quad e)\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{k^k}, \quad f)\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-k}}{e^{-2\cdot k}}, \quad g)\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-2\cdot k}}{e^{-k}}.$$

**Aufgabe 41:** (Konvergenz von Reihen. Quotientenkriterium)
Betrachte die Reihe $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k \cdot x^k$, wo $F_k$ die in Aufgabe 31 definierten Fibonacci–Zahlen sind.

a) Für welche Werte von $x$ konvergiert diese Reihe?
   Anleitung: Quotientenkriterium. Verwende das Ergebnis von Aufgabe 31.a).

b) Berechne $(1-x-x^2)\cdot f(x)$. Welche (rationale) Funktion wird auf dem Konvergenzbereich der Reihe durch $f(x)$ dargestellt?

**Aufgabe 42*:** (Wurzelkriterium. 1 Bonuspunkt)
Seien $M_1, \ldots, M_7$ die üblichen Ziffern der Matrikelnummer. Definiere die Folge $(c_n)$ rekursiv durch

$$c_n = \frac{2+M_2}{M_1+M_2+M_3} \cdot c_{n-1} + M_1 + M_4 + M_5 + M_6 + M_7, \quad c_0 = M_1.$$

Bestimme eine Konstante $r$, so dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k \cdot x^k}{(2+M_3+M_4+M_5)^k}$$

für alle $x$ mit $|x| < r$ konvergiert und für alle $x$ mit $|x| > r$ divergiert (man nennt $r$ den **„Konvergenzradius"** der Reihe).
Anleitung: Wurzelkriterium. Verwende ohne Beweis, dass die Folge $(c_n)$ gegen einen Grenzwert $c > 0$ konvergiert.

**Aufgabe 43:** (Die Exponentialreihe. Einfacher Beweis)
Beweise mit Hilfe des Cauchy-Produkts der Reihen für $e^x$ und $e^y$ die Funktionalgleichung $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ der Exponentialfunktion.
Hilfestellung: verwende den Binomischen Lehrsatz $(x+y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}$.

**Aufgabe 44:** (Die Exponentialreihe)
Es geht um die numerische Auswertung der Exponentialfunktion mittels Gleitpunktarithmetik.

a) (Technisch anspruchsvoll) Sei $x$ eine reelle Gleitpunktzahl mit $|x| \leq \frac{1}{2}$. Wieviele Reihenglieder der Exponentialreihe $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ müssen aufaddiert werden, damit $|e^x - S_n(x)| \leq \frac{|e^x|}{10^{16}}$ garantiert werden kann? (Diese Bedingung besagt, dass $S_n(x)$ die ersten 16 Dezimalstellen von $e^x$ korrekt approximiert.)

b) Berechne mittels MuPAD einige Partialsummen der Exponentialreihe für $x = -123.456$ mit `DIGITS` $= 16$ und vergleiche mit dem von der Systemfunktion `exp` gelieferten Wert. Gelingt es, durch die Partialsummen eine Approximation dieses Wertes zu erreichen? Erklärung?

   Relevante MuPAD Funktionen: `exp, _plus, $`.

c) Wie kann a) für $|x| > \frac{1}{2}$ verwendet werden? Benutze die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion, um trotz des Desasters in b) über die Exponentialreihe zu einer Approximation von $e^{-123.456}$ zu gelangen, in der die führenden Dezimalstellen korrekt sind.