Übungsblatt 5

Mit $*$ gekennzeichnete Aufgaben können zum Sammeln von Bonuspunkten verwendet werden. Lösungen sind per Web-Formular unter `http://math-www.upb.de/~walter` ($\longrightarrow$ Lehre SS 02 $\longrightarrow$ Übungen) bis spätestens Do, 23.5.02, abzuliefern.

Aufgabe 32: (Folgen, Konvergenz. Das geometrisch-arithmetische Mittel)
Sei $0 < x < y$.

a) Zeige $x < \sqrt{x \cdot y} < \dfrac{x+y}{2} < y$.

Definiere $x_1 = x$, $y_1 = y$ und dann rekursiv $x_{n+1} = \sqrt{x_n \cdot y_n}$, $\quad y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$.

b) Zeige, dass (x_n) streng monoton steigend und dass (y_n) streng monoton fallend ist.

c) Zeige, dass $(y_n - x_n)$ eine Nullfolge ist.

d) Folgere, dass (x_n) und (y_n) gegen den selben Grenzwert konvergieren.

Man nennt diesen Grenzwert das **„geometrisch-arithmetische Mittel"** von x und y.

e) Berechne für $x = 1$, $y = 2$ die ersten 5 Intervalle $[x_n, y_n]$. Wie schnell nehmen die Intervalllängen $y_n - x_n$ ab?

f) (Etwas anspruchsvoller) Sei $x \geq 1$.
   i) Zeige: $\sqrt{x_n} + \sqrt{y_n} \geq 1$ für alle n,
   ii) Folgere: $\sqrt{y_n} - \sqrt{x_n} \leq y_n - x_n$ für alle n,
   iii) Folgere: $y_{n+1} - x_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} \cdot (y_n - x_n)^2$.
   Wieso erklärt iii) die in e) beobachtete schnelle Konvergenz?

Aufgabe 33: (O–Kalkül)
Zeige: für $n \to \infty$ gilt

$$a)\quad \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n} = O\Big(\frac{1}{n^3}\Big), \qquad b)\quad \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n} = \frac{2}{n^3} + O\Big(\frac{1}{n^5}\Big).$$

Aufgabe 34: (O–Kalkül)
a) Zeige: wenn $f(n) = o(g(n))$ gilt, dann gilt auch $f(n) = O(g(n))$.
b) Sei $k \in \mathbb{Z}$. Wenn $f(n) = o(n^k)$ gilt, folgt dann automatisch $f(n) = O(n^{k-1})$?
c) Sei $k \in \mathbb{Z}$. Wenn $f(n) = o(n^k)$ gilt, folgt dann automatisch $f(n) = o(n^{k+1})$?
d) Seien $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Zeige $O(n^{k_1}) \cdot O(n^{k_2}) = O(n^{k_1+k_2})$.

Aufgabe 35*: (Geometrische Reihen, 1 Bonuspunkt)
Seien $M_1, \ldots, M_7$ die üblichen Ziffern der Matrikelnummer. Berechne

$$\sum_{k=M_6}^{\infty} \Big(\frac{M_1 + M_3}{2 \cdot M_1 + 3 \cdot M_3 + M_4} \Big)^{(M_1 - 2) \cdot k} .$$

Aufgabe 36: (Reihen, p-adische Darstellung)
Sei $p \in \{2, 3, 4, \ldots\}$. Mit der sogenannten „$p$-adischen Darstellung"

$$b_k \, b_{k-1} \, \ldots \, b_1 \, b_0 \, . \, b_{-1} \, b_{-2} \, b_{-3} \, \ldots$$

ist die Zahl $\sum\limits_{j \leq k} b_j \cdot p^j$ gemeint, wobei $b_j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ die „Ziffern zur Basis p" genannt werden. (Für $p = 10$ sind dies die wohlbekannten Dezimalziffern, für $p = 2$ die Binärziffern (Bits) $b_j \in \{0, 1\}$.)

a) Berechne die rationale Zahl, die im Binärsystem durch die periodische Entwicklung

$$1011 \, . \, 1100 \, \overline{10} \quad (= 1011 \, . \, 1100 \, 10 \, 10 \, 10 \, 10 \ldots)$$

gegeben ist.

b) (Erinnerung an die Mathe I) Gegeben sei eine reelle Zahl $0 < x < 1$. Gib einen Algorithmus, an, welcher die Ziffern von x zur Basis p berechnet. Verwende als Hilfsmittel nur die sogenannte „Gauss-Klammer" $\lfloor y \rfloor$ = die größte ganze Zahl $\leq y$. (In einigen Hochsprachen steht diese Funktion z.B. als `trunc` zur Verfügung.)

Aufgabe 37*: (p-adische Darstellung. 1 Bonuspunkt)
Seien $M_1, \ldots, M_7$ die üblichen Ziffern der Matrikelnummer. Welche rationale Zahl wird durch folgende periodische Hexadezimalzahl (Basis $p = 16$) dargestellt:

$$M_1 \, M_2 \, . \, M_3 \, M_4 \, \overline{M_6 \, M_7} \quad (= M_1 \, M_2 \, . \, M_3 \, M_4 \, M_6 \, M_7 \, M_6 \, M_7 \, M_6 \, M_7 \, \ldots) \, ?$$

Anleitung: Aufgabe 36.

Aufgabe 38*: (p-adische Darstellung. 1 Bonuspunkt)
Seien $M_1, \ldots, M_7$ die üblichen Ziffern der Matrikelnummer. Berechne die ersten 10 Ziffern $b_{-1}, \ldots, b_{-10} \in \{0, 1, \ldots, 6\}$ zur Basis $p = 7$ von

$$\frac{1}{\sqrt{M_1 + M_2 + \cdots + M_7}} = 0 \, . \, b_{-1} \, b_{-2} \, b_{-3} \, \ldots .$$

Anleitung: Aufgabe 36.b)
(MuPAD-Hilfsmittel: `trunc`. Für Schleifen siehe `for, repeat` oder `while`.)
Mit der MuPAD-Funktion `numlib::g_adic` kann das Ergebnis überprüft werden.