Übungsblatt 4

Mit $*$ gekennzeichnete Aufgaben können zum Sammeln von Bonuspunkten verwendet werden. Lösungen sind per Web-Formular unter `http://math-www.upb.de/~walter` ($\longrightarrow$ Lehre SS 02 $\longrightarrow$ Übungen) bis spätestens Do, 16.5.02, abzuliefern.

Aufgabe 22: (Folgen, Grenzwerte. Einfacher Beweis.)
Sei (z_n) eine konvergente komplexe Folge. Zeige, dass die Menge $\{|z_n|, n \in \mathbb{N}\}$ nach oben beschränkt ist.

Aufgabe 23: (Folgen, Grenzwerte. Einfacher Beweis.)
Die komplexe Folge (z_n) konvergiere gegen z^*. Zeige, dass die komplex-konjugierte Folge $(\overline{z_n})$ gegen $\overline{z^*}$ konvergiert.

Aufgabe 24: (Folgen, Grenzwerte. Beweise.)
Seien (x_n) und (y_n) konvergente reelle Folgen mit den Grenzwerten x^* bzw. y^*.

a) Es gelte $x_n \leq y_n$ für alle Indizes. Zeige: $x^* \leq y^*$. (Indirekter Beweis.)

b) Es gelte $x_n < y_n$ für alle Indizes. Gilt immer $x^* < y^*$? (Finde ein Gegenbeispiel.)

Aufgabe 25: (Folgen, Grenzwerte. Einfacher Beweis)
Sie (z_n) eine konvergente Folge. Zeige durch einen formal sauberen Beweis, dass für jedes (fixierte) $k \in \mathbb{N}$ die „verschobenen“ Folgen (z_{n+k}) gegen den selben Grenzwert konvergieren.

Aufgabe 26: (Folgen, Grenzwerte)
Bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!}$.

Aufgabe 27: (Folgen, Grenzwerte. Intervallschachtelung)
Bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n}$.
Anleitung: Satz 2.17. Es gilt $5^n < 3^n + 5^n < 2 \cdot 5^n$. Anmerkung: `limit` in MuPAD 2.0 ist hier OK, hat in MuPAD 2.5 aber einen ganz üblen Bug.

Aufgabe 28*: (Intervallschachtelung, 1 Bonuspunkt)
Seien $M_1, \ldots, M_7$ die üblichen Ziffern der Matrikelnummer. Bestimme:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(M_1 + M_3)^n + \Big(\frac{M_1 + M_4}{M_1 + M_5}\Big)^n}.$$

Anleitung: Siehe Aufgabe 27.

Aufgabe 29: (Konvergenz monotoner Folgen)
Betrachte die durch $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$, $x_1 = 0$ definierte Folge.

a) Zeige, dass (x_n) streng monoton wachsend ist.

b) Zeige per Induktion: $0 \le x_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) Bestimme den Grenzwert von (x_n).

Aufgabe 30*: (Intervallschachtelung, 1 Bonuspunkt)
Sei $M \in \{3\,000\,000, 3\,000\,001, \ldots, 6\,999\,999\}$ die Matrikelnummer. Betrachte die durch $x_{n+1} = \sqrt{M + 2 \cdot x_n}$, $x_1 = 1$ definierte Folge. Ermittle eine obere Schranke für die Folgenglieder und berechne den Grenzwert.
Anleitung: siehe Aufgabe 29.

Aufgabe 31: (Die Fibonacci-Zahlen)
Die Fibonacci-Folge (F_n) ist durch

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad \text{mit} \quad F_0 = 0,\ F_1 = 1$$

definiert. Betrachte die Folge $x_n = F_{n+1}/F_n$, $n \in \mathbb{N}$. Diese Folge konvergiert.

a) Ermittle eine Gleichung für den Grenzwert von (x_n) und berechne ihn.

b) Berechne die ersten 25 Werte $x_1, \ldots, x_{25}$. Wie genau approximiert (rein experimentell) x_{25} den Grenzwert?

c) In welcher Größenordnung liegt F_{10^7} (wieviele Dezimalstellen hat diese Zahl ungefähr)? Eine grobe Abschätzung soll hier ausreichen.

Anleitung zu c): Man versuche erst gar nicht, F_{10^7} mittels MuPADs `numlib::fibonacci` exakt zu berechnen. Verwende $F_n = x_{n-1} \cdot F_{n-1} = x_{n-1} \cdot x_{n-2} \cdot F_{n-2} = \ldots$ zusammen mit a) für eine grobe Abschätzung.