Ü b u n g s b l a t t 3

Mit $*$ gekennzeichnete Aufgaben können zum Sammeln von Bonuspunkten verwendet werden. Lösungen sind per Web-Formular unter `http://math-www.upb.de/~walter` ($\longrightarrow$ Lehre SS 02 $\longrightarrow$ Übungen) bis spätestens Do, 9.5.02, abzuliefern.

Aufgabe 15: (Folgen und Grenzwerte)
Konvergieren die angegebenen Folgen für $n \to \infty$? Bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $x_n = 2 - \dfrac{3}{n}$, b) $x_n = \dfrac{2 \cdot n^2}{n^2+1}$, c) $x_n = \dfrac{n^3-1}{n^2+1}$,

d) $x_n = \dfrac{n^3-1}{n^3+1}$, e) $x_n = \dfrac{n^3-1}{n^4+1}$, f) $x_n = \Big(1 + \dfrac{2}{n}\Big)^{3 \cdot n}$,

g) $x_n = \dfrac{4 \cdot n^2 - 1}{2 \cdot n \cdot (n^2+1)}$, h) $x_n = \dfrac{4 \cdot n^3 - 1}{2 \cdot n \cdot (n^2+1)}$, i) $x_n = \sqrt{n} \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

Aufgabe 16: (MuPAD)
Lies die MuPAD–Hilfeseite zu `limit` (interaktiv durch `?limit` aufzurufen).

a) Überprüfe mit MuPAD die in Aufgabe 15 ermittelten Grenzwerte.

b) Bestimme den Grenzwert der Folge $x_n = \Big(1 + \frac{2}{n^3}\Big)^{2 \cdot n^2}$.

c) Lies mit `?!` die MuPAD–Hilfeseite zur (aus der Schule bekannten) Fakultätsfunktion $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$. Betrachte den Grenzwert der Folge $x_n = n^n/n!$ (den MuPAD nicht berechnen kann). Erzeuge Gleitpunktapproximationen (siehe `?float`) der ersten 10 Folgenglieder und stelle eine Vermutung über die Konvergenzeigenschaft dieser Folge auf!

Aufgabe 17*: (Grenzwerte, 1 Bonuspunkt)
Seien $M_1, \dots, M_7$ die üblichen Ziffern der Matrikelnummer. Berechne den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(M_1^2 + \Big(\frac{1+M_6}{n+M_5} + M_1 \cdot i \Big)^2 \right), \quad i = \sqrt{-1}.$$

Relevante MuPAD-Funktionen: `limit`.

Aufgabe 18: (Rechenregeln für Grenzwerte)
Gegeben seien Folgen (x_n) und (y_n). Die durch $z_n^+ = x_n + y_n$ bzw. $z_n^- = x_n - y_n$ definierten Folgen mögen gegen z^+ bzw. z^- konvergieren. Zeige, daß die Folge $(x_n \cdot y_n)$ konvergiert. Bestimme ihren Grenzwert.

Aufgabe 19: (Folgen und Grenzwerte)
Bestimme den Grenzwert von $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 20*: (Rechenregeln für Folgen und Grenzwerte, 1 Bonuspunkt)
Seien $M_1, \ldots, M_7$ die üblichen Ziffern der Matrikelnummer. Betrachte die rekursiv definierte Folge

$$x_{n+1} = \cfrac{1}{M_1 + \cfrac{1}{M_3 + \cfrac{1}{M_6 + x_n}}}$$

mit $x_0 = 1$. Benutze (ohne Beweis), dass diese Folge konvergiert. Bestimme den Grenzwert.
Anleitung: Die Rechenregeln für Grenzwerte liefern eine Gleichung für den Grenzwert.

Aufgabe 21: (Folgen und Grenzwerte, etwas anspruchsvoller)
Zeige: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
Anleitung: gehe ähnlich wie im Beweis von Beispiel 2.19 der Vorlesung vor und betrachte dabei in der Entwicklung von $(1 + h_n)^n$ einen zusätzlichen Term. Alternativ kann man zunächst die Folge $\sqrt[2\cdot n]{n} = \sqrt{\sqrt[n]{n}}$ betrachten, die ebenfalls gegen 1 konvergiert.