Mathe II für Informatiker — Sommersemester 02
Walter Oevel — 4. 7. 2002

Ü b u n g s b l a t t 12

Mit $*$ gekennzeichnete Aufgaben können zum Sammeln von Bonuspunkten verwendet werden. Lösungen sind per Web-Formular unter `http://math-www.upb.de/~walter` ($\longrightarrow$ Lehre SS 02 $\longrightarrow$ Übungen) bis spätestens Do, 11.7.02, abzuliefern.

Aufgabe 85: (Trigonometrische Funktionen)
Zeige

$$\sin\Big(\frac{\varphi}{2}\Big) = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\Big(1-\cos(\varphi)\Big)}, \quad \cos\Big(\frac{\varphi}{2}\Big) = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\Big(1+\cos(\varphi)\Big)}$$

für $\varphi \in [0,\pi]$. Berechne $\sin(\frac{\pi}{4})$, $\cos(\frac{\pi}{4})$, $\sin(\frac{\pi}{8})$, $\cos(\frac{\pi}{8})$.

Aufgabe 86: (de l'Hospital)
Berechne mittels der de l'Hospitalschen Regel $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$.

Aufgabe 87: (de l'Hospital)
Berechne den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x$.
Anleitung: $x^x = e^{x\cdot\ln(x)}$. Forme $x\cdot\ln(x)$ so um, dass sich für $x=0$ eine $\frac{\infty}{\infty}$–Situation ergibt.

Aufgabe 88*: (de l'Hospital. 1 Bonuspunkt)
Seien $M_1, \ldots, M_7$ die üblichen Ziffern der Matrikelnummer. Berechne den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0+0}\left(\sin((M_1+M_2)\cdot x)^{(M_1+M_3)\cdot x} + \frac{\arctan((M_1+M_4)\cdot x^2)}{(M_1+M_5)\cdot x^2\cdot(1+M_6+x)}\right).$$

Anleitung: siehe auch Aufgabe 87. Die Ableitung von arctan war in Aufgabe 73 zu bestimmen.

Aufgabe 89: (Das Newton-Verfahren. Technisch anspruchsvoller.)
Betrachte eine mehrfach differenzierbare Funktion $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ mit einer Nullstelle x^*, für die $f'(x^*)\neq 0$ gelte. Zur numerischen Suche nach der Nullstelle betrachte die Iteration

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

mit einem Startpunkt x_0 in der Nähe von x^* („das **Newton-Verfahren**").

a) Sei $N(x) = x - f(x)/f'(x)$. Zeige:

$$N(x) - x^* = \frac{f''(x^*) + O(x-x^*)}{2\cdot f'(x^*) + O(x-x^*)}\cdot(x-x^*)^2$$

und folgere, dass es eine Umgebung von x^* gibt, sodass für alle x aus dieser Umgebung $|N(x)-x^*| \le C\cdot|x-x^*|^2$ gilt mit einer geeigneten Konstanten C.

Anleitung: Taylor-Entwicklung von $f(x)$ und $f'(x)$ um x^*.

b) Folgere $|N(x) - x^*| \leq \dfrac{|x - x^*|}{2}$ und $|N(x) - x^*| \leq \frac{1}{2 \cdot C}$, falls $|x - x^*| \leq \frac{1}{2 \cdot C}$ gilt.

c) Folgere $x_i \to x^*$ für die aus einem Startpunkt x_0 entstehende Newton-Folge (x_i), falls $|x_0 - x^*| \leq \frac{1}{2 \cdot C}$ gilt.

Interpretation: die Newton-Folge (x_i) konvergiert gegen eine Nullstelle, wenn nur der Startpunkt x_0 hinreichend nahe bei der Nullstelle liegt.

Aufgabe 90*: (Das Newton-Verfahren. 1 Bonuspunkt)
Seien $M_1, \ldots, M_7$ die üblichen Ziffern der Matrikelnummer. Finde über das Newton-Verfahren aus Aufgabe 89 eine numerische Approximation von

$$\left(\frac{10 \cdot M_1 + M_2 + M_3}{13 \cdot M_1 + M_5 + M_6}\right)^{\frac{1}{3}}$$

indem nach einer Nullstelle von $f(x) = x^3 - \frac{10 \cdot M_1 + M_2 + M_3}{13 \cdot M_1 + M_5 + M_6}$ gesucht wird. Wähle als Startpunkt $x_0 = \texttt{float}\left(\frac{M_1 + M_2}{M_1 + M_3}\right)$. Abzuliefern ist x_5 mit mindestens 9 Nach„komma"stellen.