

Ü b u n g s b l a t t 11

Mit \* gekennzeichnete Aufgaben können zum Sammeln von Bonuspunkten verwendet werden. Lösungen sind per Web-Formular unter <http://math-www.upb.de/~walter> (→ Lehre SS 02 → Übungen) bis spätestens Do, 4.7.02, abzuliefern.

**Aufgabe 77:** (Differentiation)

Sind die Funktionen

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}, \quad b) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

am Nullpunkt differenzierbar?

**Aufgabe 78\*:** (Differentiation von Umkehrfunktionen. 1 Bonuspunkt)

Seien  $M_1, \dots, M_7$  die üblichen Ziffern der Matrikelnummer. Finde eine Formel, um die zweite Ableitung der Umkehrfunktion  $f^{-1}$  einer invertierbaren Funktion  $f$  an einer Stelle  $x$  durch Ableitungen von  $f$  an der Stelle  $y = f^{-1}(x)$  auszudrücken. Berechne  $(f^{-1})''(M_2 + M_3)$  für

$$f(y) = M_1 \cdot y + M_2 + M_3 \cdot e^{M_4 \cdot y}.$$

**Aufgabe 79:** (Mittelwertsatz)

Sei  $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion, die  $f'(x) = 0$  für alle  $x \in [a, b]$  erfüllt. Zeige, dass  $f$  konstant ist.

**Aufgabe 80:** (Taylor-Reihen)

Bestimme die ersten 4 Koeffizienten  $c_0, \dots, c_3$  der Taylor-Entwicklung

$$e^{\sin(x)} = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + c_3 \cdot x^3 + O(x^4).$$

MuPAD-Funktion zur Kontrolle: `taylor`.

**Aufgabe 81:** (Taylor-Reihen)

Betrachte  $f(x) = 1/(1-x)$ .

- Bestimme eine Formel für  $f^{(n)}(x)$ .
- Bestimme hiermit die Taylor-Reihe von  $f$  um den Nullpunkt.
- Für welche  $x$  wird  $f(x)$  durch die Taylor-Reihe dargestellt?

**Aufgabe 82:** (Taylor-Reihen)

Betrachte  $f(x) = \arctan(x)$ .

- Bestimme die Taylor-Reihe von  $f'(x)$ .

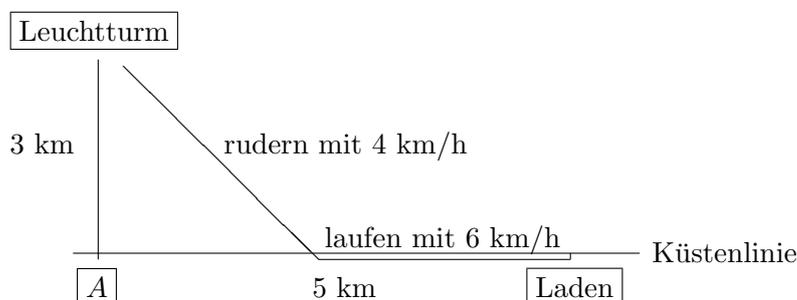
b) Für welche  $x$  wird  $f'(x)$  durch die Taylor-Reihe dargestellt?

c) Stelle eine Vermutung auf, wie die Taylor-Reihe von  $f(x)$  aussieht.

Anleitung: a) Die Konstruktion über Ableitungen ist mühsam. Betrachte stattdessen eine geeignete geometrische Reihe. c) Integration von  $f'(x)$  und der Taylor-Reihe von  $f'(x)$ . (Integration als Vorkenntnisse aus der Schule vorausgesetzt).

**Aufgabe 83:** (Extremwerte)

Ein Leuchtturm liegt 3 km vor der Küste, direkt gegenüber einem Punkt  $A$  der geraden Küstenlinie. Vom Punkt  $A$  aus liegt in 5 km Entfernung parallel zur Küstenlinie ein Laden. Der Leuchtturmwärter kann mit 4 km/h rudern und mit 6 km/h laufen. Welchen Punkt sollte er vom Leuchtturm aus startend ansteuern, um den Laden so schnell wie möglich zu erreichen?



MuPAD-Funktionen zur Kontrolle: `diff`, `solve`.

**Aufgabe 84\*:** (Extremwerte. 1 Bonuspunkt)

Seien  $M_1, \dots, M_7$  die üblichen Ziffern der Matrikelnummer. Betrachte einen Quader, bei dem die Seiten  $a, b$  der Grundfläche das Verhältnis  $a/b = (M_1 + M_2)/(M_1 + M_3)$  aufweisen. Bestimme die Höhe  $c$  des Quaders, wenn das Volumen

$$a \cdot b \cdot c = (M_1 + M_4 + M_5 + M_6 + M_7)^3$$

gegeben ist und die Quaderoberfläche minimal werden soll.