

Ü b u n g s b l a t t 11

Mit * gekennzeichnete Aufgaben können zum Sammeln von Bonuspunkten verwendet werden. Lösungen sind per Web-Formular unter <http://math-www.upb.de/~walter> (→ Lehre SS 02 → Übungen) bis spätestens Do, 4.7.02, abzuliefern.

Aufgabe 77: (Differentiation)

Sind die Funktionen

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}, \quad b) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

am Nullpunkt differenzierbar?

Aufgabe 78*: (Differentiation von Umkehrfunktionen. 1 Bonuspunkt)

Seien M_1, \dots, M_7 die üblichen Ziffern der Matrikelnummer. Finde eine Formel, um die zweite Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} einer invertierbaren Funktion f an einer Stelle x durch Ableitungen von f an der Stelle $y = f^{-1}(x)$ auszudrücken. Berechne $(f^{-1})''(M_2 + M_3)$ für

$$f(y) = M_1 \cdot y + M_2 + M_3 \cdot e^{M_4 \cdot y}.$$

Aufgabe 79: (Mittelwertsatz)

Sei $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, die $f'(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$ erfüllt. Zeige, dass f konstant ist.

Aufgabe 80: (Taylor-Reihen)

Bestimme die ersten 4 Koeffizienten c_0, \dots, c_3 der Taylor-Entwicklung

$$e^{\sin(x)} = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + c_3 \cdot x^3 + O(x^4).$$

MuPAD-Funktion zur Kontrolle: `taylor`.

Aufgabe 81: (Taylor-Reihen)

Betrachte $f(x) = 1/(1-x)$.

- Bestimme eine Formel für $f^{(n)}(x)$.
- Bestimme hiermit die Taylor-Reihe von f um den Nullpunkt.
- Für welche x wird $f(x)$ durch die Taylor-Reihe dargestellt?

Aufgabe 82: (Taylor-Reihen)

Betrachte $f(x) = \arctan(x)$.

- Bestimme die Taylor-Reihe von $f'(x)$.

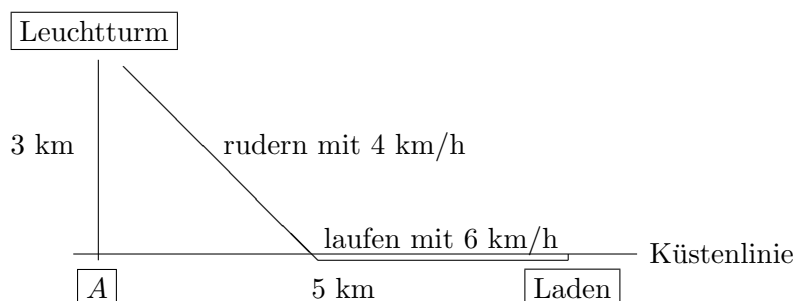
b) Für welche x wird $f'(x)$ durch die Taylor-Reihe dargestellt?

c) Stelle eine Vermutung auf, wie die Taylor-Reihe von $f(x)$ aussieht.

Anleitung: a) Die Konstruktion über Ableitungen ist mühsam. Betrachte stattdessen eine geeignete geometrische Reihe. c) Integration von $f'(x)$ und der Taylor-Reihe von $f'(x)$. (Integration als Vorkenntnisse aus der Schule vorausgesetzt).

Aufgabe 83: (Extremwerte)

Ein Leuchtturm liegt 3 km vor der Küste, direkt gegenüber einem Punkt A der geraden Küstenlinie. Vom Punkt A aus liegt in 5 km Entfernung parallel zur Küstenlinie ein Laden. Der Leuchtturmwärter kann mit 4 km/h rudern und mit 6 km/h laufen. Welchen Punkt sollte er vom Leuchtturm aus startend ansteuern, um den Laden so schnell wie möglich zu erreichen?



MuPAD-Funktionen zur Kontrolle: `diff`, `solve`.

Aufgabe 84*: (Extremwerte. 1 Bonuspunkt)

Seien M_1, \dots, M_7 die üblichen Ziffern der Matrikelnummer. Betrachte einen Quader, bei dem die Seiten a, b der Grundfläche das Verhältnis $a/b = (M_1 + M_2)/(M_1 + M_3)$ aufweisen. Bestimme die Höhe c des Quaders, wenn das Volumen

$$a \cdot b \cdot c = (M_1 + M_4 + M_5 + M_6 + M_7)^3$$

gegeben ist und die Quaderoberfläche minimal werden soll.