MATHE II FÜR INFORMATIKER — Sommersemester 02
WALTER OEVEL — 20. 6. 2002

Übungsblatt 10

Mit $*$ gekennzeichnete Aufgaben können zum Sammeln von Bonuspunkten verwendet werden. Lösungen sind per Web-Formular unter `http://math-www.upb.de/~walter` ($\longrightarrow$ Lehre SS 02 $\longrightarrow$ Übungen) bis spätestens Do, 4.7.02, abzuliefern.

Aufgabe 71: (Differentiation)
Berechne die Ableitung von

$$a)\quad \frac{1+x^2}{2+x^2}, \qquad b)\quad \sin(x^2), \qquad c)\quad \cos(\pi - x^3),$$

$$c)\quad \sin(x^2 \cdot e^x), \qquad d)\quad \sin^2(x) + \cos^2(x).$$

Aufgabe 72*: (Differentiation. 1 Bonuspunkt)
Seien $M_1, \ldots, M_7$ die üblichen Ziffern der Matrikelnummer. Berechne die Ableitung von

$$f(x) = \frac{M_2 + e^{M_3 \cdot x}}{M_1 + e^{-x^2}} + \sin(x + M_5 \cdot e^{M_6 \cdot x}).$$

Aufgabe 73: (Differentiation)
In Aufgabe 66 wurde $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ sowie die Umkehrfunktion $\arctan(x)$ eingeführt.
a) Zeige: $\frac{d}{dx}\tan(x) = 1 + \tan^2(x)$.
b) Berechne die Ableitung von $\arctan(x)$.
c) Berechne die Ableitung von $\arctan(x) + \arctan(1/x)$. Erklärung?

Aufgabe 74: (Die Produktregel)
Seien $f(x)$ und $g(x)$ genügend oft differenzierbar. Beweise durch Induktion nach n:

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) \cdot g(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x)$$

mit den durch

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}, \quad k = 1, \ldots, n$$

definierten Binomialkoeffizienten des Pascalschen Dreiecks.

Aufgabe 75: (Implizite Differentiation)
Eine Funktion $y = f(x)$ ist als Lösung der Gleichung

$$y^3 + x^2 \cdot y = e^{(x^2)}$$

definiert. Offensichtlich gilt $f(0) = 1$. Bestimme $f'(0)$.
Anleitung: differenziere die Identität $f(x)^3 + x^2 \cdot f(x) = e^{(x^2)}$ nach x. Es ergibt sich eine Gleichung für $f'(x)$.

Aufgabe 76*: (Implizite Differentiation. 1 Bonuspunkt)
Seien $M_1, \ldots, M_7$ die üblichen Ziffern der Matrikelnummer. Betrachte die durch die Gleichung

$$e^{(M_1+M_2)\cdot(y-M_3)} + M_4 \cdot y = 1 + M_3 \cdot M_4 \cdot e^{x-M_5}$$

definierte Funktion $y = f(x)$. Berechne $f(M_5)$ und $f'(M_5)$.
Anleitung: siehe Aufgabe 75.