Kapitel 5

Einige spezielle Funktionen: exp, ln, sin, cos.

5.1 Exponentialfunktion und Logarithmus

↓7.6.02

Die überaus wichtige Exponentialfunktion soll nun etwas genauer diskutiert werden. Die ursprüngliche Definition 2.20 ist für die Diskussion zu unhandlich. Die in Beispiel 3.24 eingeführte Reihendarstellung ist wesentlich nützlicher. Wir haben sie bereits benutzt, um in Satz 4.11 die Stetigkeit über ganz $\mathbb{C}$ zu beweisen. Wir betrachten die Exponentialfunktion nun zunächst im Reellen genauer:

Satz 5.1: (Eigenschaften der reellen Exponentialfunktion)

Die Exponentialfunktion $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots$ *ist für* $x \in \mathbb{R}$ *streng monoton steigend. Es gilt*

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \to \infty} e^x = \infty.$$

Der Wertebereich ist $(0, \infty)$.

Beweis: Für $0 \leq x < y$ ist $e^x < e^y$ offensichtlich, denn die Summanden der Partialsummen sind streng monoton wachsend:

$$e^y - e^x = \Big(1 + y + \frac{y^2}{2} + \cdots\Big) - \Big(1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots\Big) = \underbrace{y - x}_{>0} + \underbrace{\frac{y^2 - x^2}{2}}_{>0} + \cdots > 0.$$

Für $x < y < 0$ folgt die Monotonie aus der Funktionalgleichung 2.22: $e^x = 1/e^{-x} < 1/e^{-y} = e^y$. Nach Beispiel 4.33 wächst e^x (stärker als jede positive x-Potenz) gegen ∞ für $x \to \infty$. Wegen $e^x = 1/e^{-x}$ fällt e^x gegen 0 für $x \to -\infty$. Damit ist der Wertebereich $(0, \infty)$.

Q.E.D.

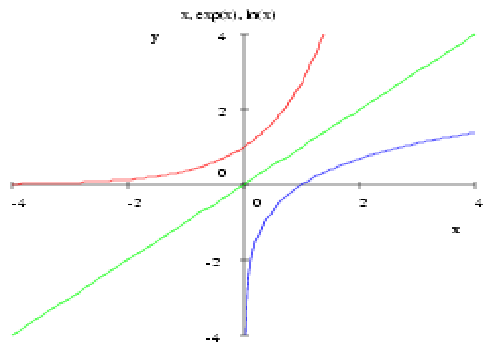
Definition 5.2: (Der **natürliche Logarithmus**)

Wegen der strengen Monotonie der reellen Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \mapsto (0, \infty)$ *gibt es eine Umkehrfunktion, die man den* **„natürlichen Logarithmus"** $\ln : (0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ *nennt:*

$$\ln(\exp(x)) = x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\ , \quad \exp(\ln(y)) = y \text{ für alle } y \in (0, \infty).$$

Beispiel 5.3: Durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden ergibt sich sofort der Graph von ln aus dem Graphen von exp:

```
>> plotfunc2d(x, exp(x), ln(x), x = -4..4,
              ViewingBox = [-4..4, -4..4])
```



Da die Exponentialfunktion nach Satz 4.11 monoton und stetig ist, ist mit Satz 4.30 auch der Logarithmus monoton und stetig:

Merke 5.4:

- $\exp$ *und* $\ln$ *sind stetig und streng monoton wachsend.*
- *Es gilt* $e^x > 1$ *für alle* $x > 0$, *es gilt* $\ln(y) > 0$ *für alle* $y > 1$.
- *Es gilt* $e^0 = 1$ *und* $\ln(1) = 0$.
- *Es gilt* $e^x < 1$ *für alle* $x < 0$ *und* $\ln(y) < 0$ *für alle* y *mit* $0 < y < 1$.

Bemerkung 5.5: *Es ist klar, was mit* x^y *gemeint ist, wenn* $x \in \mathbb{R}$ *positiv und* y *eine ganze oder eine rationale Zahl ist (z.B.* $x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$*). Was aber ist* $x^{\sqrt{2}}$*? Betrachte eine rationale Potenz* $y = p/q$ *mit* $p, q \in \mathbb{N}$, *dann ist* $a = x^y = x^{p/q} > 0$ *als die (eindeutige) positive Lösung von* $a^q = x^p$ *definiert. Setzen wir* $x = e^{\ln(x)}$, *so folgt mit den Funktionalgleichungen 2.22:*

$$a^q = x^p = (e^{\ln(x)})^p = e^{p \cdot \ln(x)} = \left(e^{\frac{p}{q} \cdot \ln(x)}\right)^q.$$

Die einzige reelle positive Lösung a dieser Gleichung ist offensichtlich

$$x^{\frac{p}{q}} = a = e^{\frac{p}{q}\cdot\ln(x)}.$$

Also: für jedes rationale y gilt

$$\boxed{x^y = e^{y\cdot\ln(x)} \text{ für jedes } x > 0.}$$

Man benutzt die obige Formel, um Potenzen von $x > 0$ auch für nicht-rationale reelle Werte y zu **definieren**, *was nach obiger Überlegung mit der intuitiven „Wurzeldefinition“ für rationales y verträglich ist. Z. B.:*

```
>> float(2^PI) = float(exp(PI*ln(2)))

                  8.824977827 = 8.824977827
```

Satz 5.6: (Rechenregeln für exp und ln)
Für beliebiges $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\boxed{e^{x+y} = e^x \cdot e^y, \quad (e^x)^y = e^{x\cdot y}, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}.}$$

Für beliebiges $x > 0, y > 0$ gilt:

$$\boxed{\ln(x\cdot y) = \ln(x) + \ln(y), \quad \ln(x^y) = y\cdot\ln(x), \quad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x).}$$

Beweis: Die Funktionalgleichungen $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\cdot e^{z_2}$ und $e^{-z} = 1/e^z$ waren schon in Satz 2.22 über $\mathbb{C}$ gezeigt worden. Sind $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, folgt durch Logarithmieren

$$z_1 + z_2 = \ln\left(e^{z_1}\cdot e^{z_2}\right).$$

Mit $x = e^{z_1}$, $y = e^{z_2}$, also $z_1 = \ln(x)$, $z_2 = \ln(y)$, folgt $\ln(x) + \ln(y) = \ln(x\cdot y)$. Für $y = 1/x$ ergibt sich $\ln(x) + \ln(1/x) = \ln(1) = 0$. Nach Definition beliebiger reeller Potenzen gemäß Bemerkung 5.5 ergibt sich

$$(e^x)^y = e^{y\cdot\ln(e^x)} = e^{y\cdot x}.$$

Durch Logarithmieren folgt für beliebiges reelles $z = e^x > 0$:

$$\ln(z)^y = y\cdot x = y\cdot\ln(z).$$

Q.E.D.

Beispiel 5.7: Die Regel $\ln(x^y) = y \cdot \ln(x)$ ist nützlich, um Gleichungen aufzulösen, wo die gesuchte Größe in einem Exponenten auftaucht. Z.B.:

$$2^x = 8 \quad \Rightarrow \quad \ln(2^x) = \ln(8) \quad \Rightarrow \quad x \cdot \ln(2) = \ln(8)$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\ln(8)}{\ln(2)} = \frac{\ln(2^3)}{\ln(2)} = \frac{3 \cdot \ln(2)}{\ln(2)} = 3.$$

Bemerkung 5.8: *Aus der Schulzeit mag man gewöhnt sein, statt mit dem natürlichen Logarithmus mit dem Zehner-Logarithmus* $\log_{10}$ *umzugehen. Bei Informatikern ist (aus naheliegenden Gründen) der Logarithmus* $\log_2$ *zur Basis 2 populär. Hier ist der Zusammenhang zwischen dem natürlichen Logarithmus und dem Logarithmus zu einer beliebigen (positiven) Basis* $b \neq 1$*:*

$$x = \log_b(y) \ \Leftrightarrow \ y = b^x \ \Leftrightarrow \ \ln(y) = \ln(b^x) = x \cdot \ln(b) \ \Leftrightarrow \ x = \frac{\ln(y)}{\ln(b)},$$

also

$$\boxed{\log_b(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(b)} \quad \textit{für alle } y > 0, \ b > 0, \ b \neq 1.}$$

Beispiel 5.9: Neben dem natürlichen Logarithmus `ln` hat MuPAD Logarithmen `log(b, y)` zu beliebigen positiven Basen `b` $\neq 1$:

```
>> log(10, 25.0) = ln(25.0)/ln(10.0)

                    1.397940009 = 1.397940009

>> log(2, 25.0) = ln(25.0)/ln(2.0)

                     4.64385619 = 4.64385619
```

5.2 Die trigonometrische Funktionen

In der Schule waren im Kontext „Geometrie“ die Winkelfunktionen sin und cos eingeführt worden. Hier unsere Versionen:

Satz und Definition 5.10:

Die folgenden Reihen konvergieren für jeden Wert $z \in \mathbb{C}$. Die Reihenwerte heißen $\sin(z)$ *bzw.* $\cos(z)$ *(die* **„trigonometrischen Funktionen"** *Sinus und Cosinus):*

$$\begin{aligned} \sin(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot z^{2\cdot k+1}}{(2\cdot k+1)!} &&= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \pm \cdots , \\ \cos(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot z^{2\cdot k}}{(2\cdot k)!} &&= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} \pm \cdots . \end{aligned}$$

Beweis: Es ist zu zeigen, dass die definierenden Reihen konvergieren. In der Tat konvergieren sie absolut, was analog zu Beispiel 3.24 aus dem Quotientenkriterium folgt. Für die sin-Reihe:

$$\begin{aligned} \Big| \frac{(-1)^{k+1} \cdot z^{2\cdot k+3}/(2\cdot k+3)!}{(-1)^k \cdot z^{2\cdot k+1}/(2\cdot k+1)!} \Big| &= \frac{|z|^2 \cdot (2\cdot k+1)!}{(2\cdot k+3)!} \\ &= \frac{|z|^2}{(2\cdot k+2)\cdot(2\cdot k+3)} \leq \frac{|z|^2}{4\cdot k^2} \leq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

für $k \geq |z|$. Die Konvergenz der cos-Reihe folgt analog.

Q.E.D.

Das folgende Zusammenhang ist eine der wichtigsten Formeln überhaupt für exp, sin und cos:

Satz 5.11: (Die Euler-Formel)

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt folgende Beziehung zwischen der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen:

$$\boxed{e^{i\cdot z} = \cos(z) + i \cdot \sin(z).}$$

Für $x \in \mathbb{R}$ folgt $\cos(x) = \Re(e^{i\cdot x})$, $\sin(x) = \Im(e^{i\cdot x})$.

Beweis:

$$\begin{aligned} &\cos(z) + i \cdot \sin(z) \\ &\quad = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} \pm \cdots \\ &\qquad + i\cdot z - \frac{i\cdot z^3}{3!} + \frac{i\cdot z^5}{5!} \mp \cdots \\ &\quad = 1 + i\cdot z + \frac{(i\cdot z)^2}{2!} + \frac{(i\cdot z)^3}{3!} + \frac{(i\cdot z)^4}{4!} + \frac{(i\cdot z)^5}{5!} + \cdots . \end{aligned}$$

Q.E.D.

Satz 5.12:

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ *gilt* $\sin(z) = \dfrac{e^{i\cdot z} - e^{-i\cdot z}}{2\cdot i}$, $\cos(z) = \dfrac{e^{i\cdot z} + e^{-i\cdot z}}{2}$.

Beweis:

$$e^{i\cdot z} \pm e^{-i\cdot z} = \cos(z) + i\cdot\sin(z) \pm \cos(-z) \pm i\cdot\sin(-z)$$

$$= \cos(z) + i\cdot\sin(z) \pm \cos(z) \mp i\cdot\sin(z) = \begin{cases} 2\cdot\cos(z) & \text{für } +, \\ 2\cdot i\cdot\sin(z) & \text{für } -\,. \end{cases}$$

Q.E.D.

Satz 5.13: (Stetigkeit der trigonometrischen Funktion)

Die trigonometrischen Funktionen sin *und* cos *sind auf* $\mathbb{C}$ *stetig.*

Beweis: Da die Exponentialfunktion auf $\mathbb{C}$ stetig ist, folgt dies über die Rechenregeln 4.7 für Stetigkeit aus den Darstellungen in Satz 5.12.

Q.E.D.

Satz 5.14: (Die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen)

Für beliebiges $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *gilt:*

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1)\cdot\cos(z_2) + \cos(z_1)\cdot\sin(z_2),$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\cdot\cos(z_2) - \sin(z_1)\cdot\sin(z_2).$$

Beweis: Für $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ sind wegen $\cos(x) = \Re(e^{i\cdot x})$, $\sin(x) = \Im(e^{i\cdot x})$ die Additionstheoreme nichts Anderes als die Funktionalgleichung für exp:

$$\cos(z_1 + z_2) = \Re(e^{i\cdot(z_1+z_2)}) = \Re(e^{i\cdot z_1}\cdot e^{i\cdot z_2})$$

$$= \Re\Big((\cos(z_1) + i\cdot\sin(z_1))\cdot(\cos(z_2) + i\cdot\sin(z_2))\Big)$$

$$= \cos(z_1)\cdot\cos(z_2) - \sin(z_1)\cdot\sin(z_2).$$

Das Additiontheorem für den reellen Sinus folgt analog über $\sin(z_1 + z_2) = \Im(e^{i\cdot(z_1+z_2)})$.

Für beliebiges $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ nehme man die Darstellung aus Satz 5.12, um die Additionstheoreme auf $e^{i\cdot(z_1+z_2)} = e^{i\cdot z_1}\cdot e^{i\cdot z_2}$ zurückzuführen.

Q.E.D.

13.6.02↓

Satz 5.15: (Symmetrien der trigonometrischen Funktionen)

Für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ *gilt:* $\sin(-z) = -\sin(z)$, $\cos(-z) = \cos(z)$.

Beweis: Die Sinus-Reihe enthält nur ungerade Potenzen: $(-z)^{2\cdot k+1} = -z^{2\cdot k+1}$. Die Cosinus-Reihe enthält nur gerade Potenzen: $(-z)^{2\cdot k} = z^{2\cdot k}$.

Q.E.D.

Satz 5.16: (Der Satz des Pythagoras)

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt: $\boxed{\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1}$.

Beweis: Dies ist das Additionstheorem des Cosinus für $z_1 = z$, $z_2 = -z$ zusammen mit $\cos(0) = 1$:

$$1 = \cos(z - z) = \cos(z) \cdot \cos(-z) - \sin(z) \cdot \sin(-z) = \cos^2(z) + \sin^2(z).$$

Q.E.D.

Wir brauchen die Kreiszahl π. Da wir hier keine Geometrie treiben und π über das Verhältnis von Kreisumfang zu Kreisdurchmesser einführen können, müssen wir π anders definieren:

Satz und Definition 5.17:

Auf der positiven reellen Achse besitzt der Cosinus mindestens eine Nullstelle. Sei $x_1 = \inf\{x \in \mathbb{R};\ \cos(x) = 0;\ x > 0\}$ die kleinste positive Nullstelle des Cosinus. Definiere $\pi = 2 \cdot x_1 \approx 3.1415...$.

Beweis: Die Summanden der Cosinus-Reihe $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \mp \cdots$ haben wechselnde Vorzeichen. Für kleines $|x|$ sind die Summanden monoton fallend. Damit gilt $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + f(x)$, wobei speziell für $|x| \leq 2$ gilt:

$$0 \leq f(x) = \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \cdots \leq \frac{x^4}{4!}.$$

Es folgt

$$\cos(1) = 1 - \frac{1}{2!} + f(1), \quad 0 \leq f(1) \leq \frac{1}{24},$$
$$\cos(2) = 1 - \frac{4}{2!} + f(2), \quad 0 \leq f(2) \leq \frac{16}{24},$$

also

$$\cos(1) \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0, \quad \cos(2) \leq 1 - \frac{4}{2} + \frac{16}{24} = -\frac{1}{3} < 0.$$

Der Zwischenwertsatz 4.19 für stetige Funktionen garantiert (mindestens) eine Nullstelle im Intervall $(1, 2)$. Damit ist die Menge $\{x \in \mathbb{R};\ \cos(x) = 0;\ x > 0\}$ nicht leer und besitzt ein Infimum.

Q.E.D.

Über die Additionstheoreme und Pythagoras folgt nun eine Vielzahl von speziellen Resultaten, z.B.:

$$\sin(2\cdot x) = 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x) \quad\Rightarrow\quad \sin(\pi) = 2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\cos(2\cdot x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cdot\cos^2(x) - 1$$

$$\Rightarrow\quad \cos(\pi) = 2\cdot\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 = -1,$$

$$\sin(x+\pi) = \sin(x)\cdot\underbrace{\cos(\pi)}_{-1} + \cos(x)\cdot\underbrace{\sin(\pi)}_{0} = -\sin(x),$$

$$\cos(x+\pi) = \cos(x)\cdot\overbrace{\cos(\pi)} - \sin(x)\cdot\overbrace{\sin(\pi)} = -\cos(x)$$

etc. Hieraus folgt dann weiterhin die Periodizität

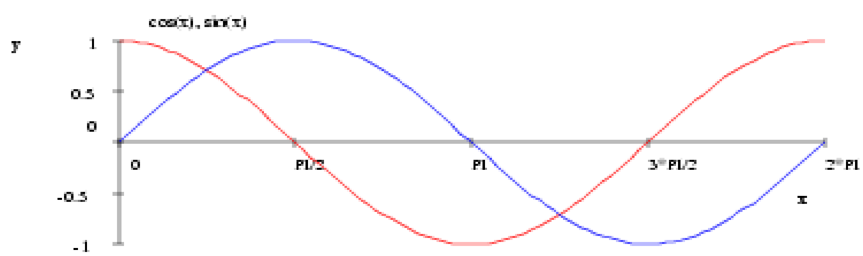
$$\sin(x+2\cdot\pi) = \sin(x), \quad \cos(y+2\cdot\pi) = \cos(x).$$

Die Einzelergebnisse aus Satz 5.11 bis Satz 5.16 werden zusammengefaßt:

Merke 5.18:

Graphisch:

```
>> plotfunc2d(cos(x), sin(x), x=0..2*PI,
              Ticks = [[0 = "0", PI/2 = "PI/2", PI = "PI",
                        3*PI/2 = "3*PI/2", 2*PI = "2*PI"],
```



Einige spezielle Werte:

$$\sin(0) = 0\ , \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad \sin(\pi) = 0, \quad \sin\left(\frac{3\cdot\pi}{2}\right) = -1,$$

$$\cos(0) = 1, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \cos(\pi) = -1, \quad \cos\left(\frac{3\cdot\pi}{2}\right) = 0\ .$$

Periodizität (man braucht die Funktionen nur auf $[0, 2\cdot\pi)$ *zu kennen):*

$$\sin(x+2\cdot\pi) = \sin(x), \quad \cos(y+2\cdot\pi) = \cos(x).$$

Additionstheoreme:

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cdot\cos(y) + \cos(x)\cdot\sin(y),$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cdot\cos(y) - \sin(x)\cdot\sin(y).$$

Symmetrieeigenschaften:

$$\sin(-x) = -\sin(x), \quad \cos(-x) = \cos(x).$$

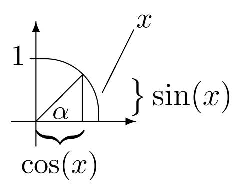
Pythagoras: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$

Euler-Formel: $e^{i\cdot x} = \cos(x) + i\cdot\sin(x).$

Bemerkung 5.19: *Vielleicht ist man aus der Schule noch gewohnt, die Argumente der trigonometrischen Funktion in Winkelgraden $\alpha = 0^0, \ldots, 360^o$ anzugeben. Mathematiker nehmen statt des Winkels α die zugehörige Bogenlänge x auf dem Einheitskreis (Einheit: „Radian"), der Zusammenhang ist*

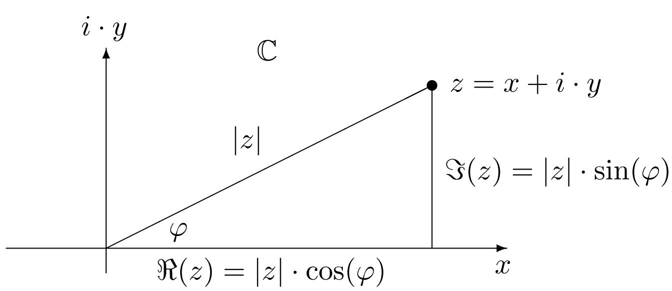
$$x = \frac{\pi}{180}\cdot\alpha,$$

d.h., $90^o \mathrel{\widehat{=}} \frac{\pi}{2}$, $180^o \mathrel{\widehat{=}} \pi$, $360^o \mathrel{\widehat{=}} 2\cdot\pi$:



5.3 Die komplexe Exponentialfunktion, Polardarstellungen

In der Geometrischen Interpretation 1.8 der komplexen Zahlen



war die **Polardarstellung**

$$z = |z|\cdot\Big(\cos(\varphi) + i\cdot\sin(\varphi)\Big), \quad \varphi\in[0, 2\cdot\pi)$$

komplexer Zahlen eingeführt worden. Mit der Euler-Formel 5.11 ergibt sich die kompakte Polardarstellung:

$$\boxed{z = |z| \cdot e^{i \cdot \varphi}, \quad \varphi \in [0, 2 \cdot \pi).}$$

Man beachte, dass Polarwinkel nur bis auf ganzzahlige Vielfache von $2 \cdot \pi$ bestimmt ist (Periodizität von Sinus und Cosinus):

$$e^{i \cdot (\varphi + k \cdot 2 \cdot \pi)} = e^{i \cdot \varphi} \cdot e^{i \cdot k \cdot 2 \cdot \pi} = e^{i \cdot \varphi} \cdot (\underbrace{e^{i \cdot 2 \cdot \pi}}_{1})^k = e^{i \cdot \varphi} \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

Wir vereinbaren, dass unsere Polarwinkel im Intervall $[0, 2 \cdot \pi)$ liegen.

Geometrische Interpretation der komplexen Multiplikation 5.20:

Mit $z_1 = |z_1| \cdot e^{i \cdot \varphi_1}$, $z_2 = |z_2| \cdot e^{i \cdot \varphi_2}$, $\frac{1}{z_2} = \frac{1}{|z_2|} \cdot e^{-i \cdot \varphi_2}$ gilt

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i \cdot (\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Also: die Multiplikation mit einer Zahl mit dem Polarwinkel φ dreht einen komplexen Vektor um den Winkel φ gegen den Uhrzeigersinn, die Division durch diese Zahl dreht den Vektor um den Winkel φ im Uhrzeigersinn. Multiplikation mit i bzw. Division durch i dreht speziell um 90^o. Das ist leicht zu merken:

> *Ein Mathematiker ruft an und hört: „Die gewählte Nummer ist imaginär. Bitte drehen Sie ihren Apparat um 90^o!“*

Bemerkung 5.21: *Für Potenzen von $z = |z| \cdot e^{i \cdot \varphi}$ folgt*

$$z^n = |z|^n \cdot e^{i \cdot n \cdot \varphi}.$$

Damit sind wir nun in der Lage, komplexe Wurzeln zu berechnen. Die Aufgabe sei: finde alle Lösungen von $z^n = a$.

Schritt 1: *Stelle a in Polarkoordinaten dar: $a = |a| \cdot e^{i \cdot \alpha}$ mit $\alpha \in [0, 2 \cdot \pi)$.*
Schritt 2: *Ansatz für die Wurzeln: $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$ mit $\varphi \in [0, 2 \cdot \pi)$. Vergleiche*

$$z^n = r^n \cdot e^{i \cdot n \cdot \varphi} = |a| \cdot e^{i \cdot \alpha}.$$

Vergleich der Beträge ergibt die reelle Gleichung $r^n = |a|$, d.h. $r = \sqrt[n]{|a|}$. (Dies ist eine reelle Wurzel, deren Bedeutung klar ist.) Es verbleibt, den Polarwinkel φ der komplexen Wurzeln aus der verbleibenden Gleichung

$$e^{i \cdot n \cdot \varphi} = e^{i \cdot \alpha}$$

zu bestimmen. Da Polarwinkel nur bis auf ganzzahlige Vielfache von $2 \cdot \pi$ bestimmt sind, folgt nicht $n \cdot \varphi = \alpha$, sondern (mit φ_k statt φ):

$$n \cdot \varphi_k = \alpha + k \cdot 2 \cdot \pi, \; k \in \mathbb{Z},$$

also

$$\varphi_k = \frac{\alpha}{n} + \frac{k}{n} \cdot 2 \cdot \pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Hierbei brauchen nur die n Werte $k = 0, 1, \ldots, n-1$ betrachtet zu werden, für die $\varphi_k \in [0, 2 \cdot \pi)$ gilt (sofern $\alpha \in [0, 2 \cdot \pi)$ gilt). Alle anderen Winkel φ_k liegen außerhalb von $[0, 2 \cdot \pi)$ und stimmen bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von $2 \cdot \pi$ mit einem dieser „Basiswinkel“ $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ überein.

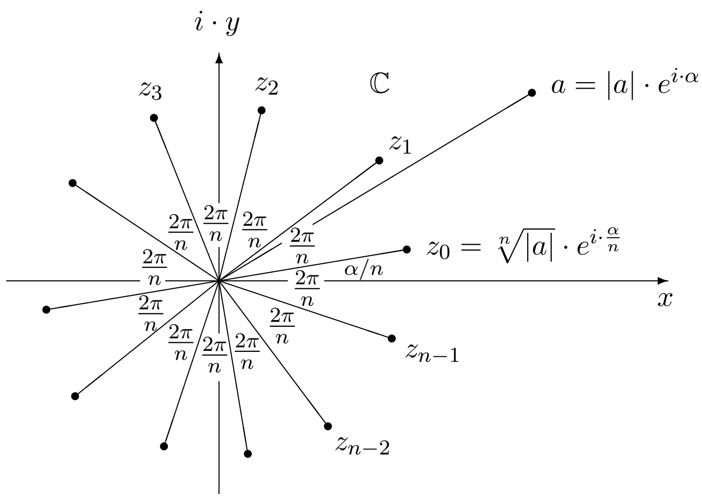
Schritt 3: *Ergebnis: die n verschiedenen Lösungen von $z^n = a = |a| \cdot e^{i \cdot \alpha}$ sind:*

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i \cdot \varphi_k} = \sqrt[n]{|a|} \cdot \Big(\cos(\varphi_k) + i \cdot \sin(\varphi_k) \Big)}$$

mit

$$\boxed{\varphi_k = \frac{\alpha + k \cdot 2 \cdot \pi}{n}, \ k = 0, 1, \ldots, n-1.}$$

Geometrisch: *die Wurzeln liegen alle gleichmäßig auf dem Kreis mit dem Radius $\sqrt[n]{|a|}$ verteilt:*



Beispiel 5.22: Die n-ten „Einheitswurzeln“ der Gleichung $z^n = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ sind

$$z_k = \cos\left(\frac{k \cdot 2 \cdot \pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{k \cdot 2 \cdot \pi}{n}\right), \ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Z.B. für $n = 4$;

$$z_k = \cos\left(\frac{k \cdot \pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0, \\ i & \text{für } k = 1, \\ -1 & \text{für } k = 2, \\ -i & \text{für } k = 3. \end{cases}$$

Für $n = 6$:

$$z_k = \cos\left(\frac{k \cdot \pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{3}\right) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0, \\ \frac{1+i\cdot\sqrt{3}}{2} & \text{für } k = 1, \\ \frac{-1+i\cdot\sqrt{3}}{2} & \text{für } k = 2, \\ -1 & \text{für } k = 3, \\ \frac{-1-i\cdot\sqrt{3}}{2} & \text{für } k = 4, \\ \frac{1-i\cdot\sqrt{3}}{2} & \text{für } k = 5. \end{cases}$$

Beispiel 5.23: In Beispiel 1.24 hatten wir für Potenzen von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

gefunden:

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot (1+i)^n + \frac{1}{2} \cdot (1-i)^n & \frac{i}{4} \cdot (1+i)^n - \frac{i}{4} \cdot (1-i)^n \\ -i \cdot (1+i)^n + i \cdot (1-i)^n & \frac{1}{2} \cdot (1+i)^n + \frac{1}{2} \cdot (1-i)^n \end{pmatrix}.$$

Es fehlt noch eine einfache Darstellung von $(1 \pm i)^n$, mit der (hoffentlich) ersichtlich wird, dass A^n eine reelle Matrix ist. Über die Polardarstellungen

$$1 \pm i = \sqrt{2} \cdot e^{\pm i \cdot \frac{\pi}{4}}$$

ergibt sich mit $|1 \pm i| = \sqrt{2}$ und den Polarwinkeln $\pm\frac{\pi}{4}$:

$$(1 \pm i)^n = 2^{n/2} \cdot e^{\pm n \cdot i \cdot \frac{\pi}{4}} = 2^{n/2} \cdot \Big(\cos\Big(n \cdot \frac{\pi}{4}\Big) \pm i \cdot \sin\Big(n \cdot \frac{\pi}{4}\Big)\Big).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} (A^n)_{11} &= \tfrac{1}{2} \cdot (1+i)^n + \tfrac{1}{2} \cdot (1-i)^n &&= 2^{n/2} \cdot \cos(n \cdot \tfrac{\pi}{4}), \\ (A^n)_{12} &= \tfrac{i}{4} \cdot (1+i)^n - \tfrac{i}{4} \cdot (1-i)^n &&= -2^{n/2-1} \cdot \sin(n \cdot \tfrac{\pi}{4}), \\ (A^n)_{21} &= -i \cdot (1+i)^n + i \cdot (1-i)^n &&= 2^{n/2+1} \cdot \sin(n \cdot \tfrac{\pi}{4}), \\ (A^n)_{22} &= \tfrac{1}{2} \cdot (1+i)^n + \tfrac{1}{2} \cdot (1-i)^n &&= 2^{n/2} \cdot \cos(n \cdot \tfrac{\pi}{4}). \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also in der Tat die in Beispiel 1.24 gefragte explizite (und nun recht einfache) reelle Darstellung beliebiger Potenzen von A:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^{\frac{n}{2}} \cdot \cos(n \cdot \frac{\pi}{4}) & -2^{\frac{n}{2}-1} \cdot \sin(n \cdot \frac{\pi}{4}) \\ 2^{\frac{n}{2}+1} \cdot \sin(n \cdot \frac{\pi}{4}) & 2^{\frac{n}{2}} \cdot \cos(n \cdot \frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}.$$
