Kapitel 3

Reihen

Es geht nun um spezielle Folgen, deren Glieder durch Summation entstehen. Für diese „Reihen“ gibt es spezielle Konvergenzkriterien.

3.1 Definitionen, Beispiele, Sätze

Definition 3.1: (Reihen)

Die einer komplexen Folge (z_n) *zugeordnete* **„Reihe“** *ist die Folge* (S_n) *der* **„Partialsummen“**

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k .$$

Existiert ein Grenzwert der Partialsummen, so nennt man ihn den Wert der **„unendlichen Reihe“** *und schreibt auch* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} z_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$. *Eine Reihe heißt* **„absolut konvergent“**, *wenn der Grenzwert* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |z_k|$ *existiert.*

Beispiel 3.2: Die sogenannte **„arithmetische Reihe“** besitzt eine explizite Darstellung:

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} k &= 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \Big(1 + 2 + \cdots + (n-1) + n \\ &\qquad n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 \Big) \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \Big(\underbrace{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ Summanden}} \Big) \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1). \end{aligned}$$

Halten wir fest:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.}$$

Die arithmetische Reihe konvergiert damit uneigentlich gegen ∞.

Beispiel 3.3: Sei $z \in \mathbb{C}$. Eine **„geometrische Reihe“** ist von der Form

$$S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \sum_{k=0}^{n} z^k \, .$$

Auch in diesem Fall kann man eine explizite Formel für S_n angeben:

$$\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} \, .}$$

Dies ist leicht nachzuvollziehen:

$$\begin{aligned} (1-z) \cdot S_n &= (1-z) \cdot (1 + z + z^2 + \cdots + z^n) \\ &= \quad 1 \quad \cdot (1 + z + z^2 + \cdots + z^n) \\ &\quad\; -z \quad \cdot (1 + z + z^2 + \cdots + z^n) \\ &= 1 + z + z^2 + \cdots + z^n \\ &\qquad - z - z^2 - \cdots - z^n - z^{n+1} \\ &= 1 - z^{n+1}. \end{aligned}$$

Mit der expliziten Summenformel ist die Konvergenz geometrischer Reihen leicht zu überprüfen. Für $|z| < 1$ konvergiert z^{n+1} gegen 0 (Beispiel 2.10):

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \quad \text{für } |z| < 1 \, .}$$

Diese Reihe konvergiert absolut, denn mit denselben Argumenten konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} |z|^k = \frac{1}{1-|z|} \quad \text{für } |z| < 1 \, .$$

Beispiel 3.4: Einige Berechnungen mit MuPAD. Für die symbolische Berechnung von Summen ist die Funktion `sum` zuständig:

```
>> sum(k, k = 1..n)
                                  2
                              n   n
                              - + --
                              2   2
```

Durch Faktorisierung mittels `factor` ergibt sich oft eine einfachere Form:

```
>> factor(%)
                           1/2 n (n + 1)
```

Die geometrische Reihe:

```
>> sum(z^k, k = 0..n)
                                n
                              z z  - 1
                              --------
                               z - 1
>> assume(0 < z < 1):
>> sum(z^k, k = 0..infinity)
                                  1
                               - -----
                                 z - 1
```

Beispiel 3.5: Die periodische Dezimaldarstellung $0\,.\,\overline{d_1 d_2 d_3}$ mit Dezimalziffern $d_k \in \{0,1,\ldots,9\}$ steht für $0\,.\,d_1 d_2 d_3 \; d_1 d_2 d_3 \; d_1 d_2 d_3 \ldots$. Solche zyklischen Dezimalentwicklungen sind rationale Zahlen. Sei $n = „d_1 d_2 d_3“ = d_1 \cdot 100 + d_2 \cdot 10 + d_3 \in \{0,\ldots,999\}$:

$$0\,.\,\underbrace{d_1 d_2 d_3}_{n}\;\underbrace{d_1 d_2 d_3}_{n}\;\underbrace{d_1 d_2 d_3}_{n}\;\ldots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \frac{d_1}{10^4} + \frac{d_2}{10^5} + \frac{d_3}{10^6} + \cdots$$

$$= \frac{d_1 \cdot 100 + d_2 \cdot 10 + d_3}{10^3} + \frac{d_1 \cdot 100 + d_2 \cdot 10 + d_3}{10^6} + \cdots$$

$$= \frac{n}{1000} + \frac{n}{1000^2} + \frac{n}{1000^3} + \cdots = n \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1000^k}$$

$$= n \cdot \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1000^k} \; - \; 1 \Big) = n \cdot \Big(\frac{1}{1 - \frac{1}{1000}} - 1 \Big) = n \cdot \Big(\frac{1000}{999} - 1 \Big) = \frac{n}{999}.$$

Bemerkung: statt der formalen Rechnung kann man die Beweisidee für die Summenformel der geometrischen Reihe explizit nachvollziehen, was in diesem Fall als "Rechentrick" sogar ganz einfach zu merken ist:

$$\begin{array}{rrcl} & 1000 \cdot x & = & d_1 d_2 d_3 \, . \, d_1 d_2 d_3 \; d_1 d_2 d_3 \; \ldots \\ - & x & = & 0 \, . \, d_1 d_2 d_3 \; d_1 d_2 d_3 \; \ldots \\ \hline & 999 \cdot x & = & \underbrace{d_1 d_2 d_3}_{n} . \, 000\,000 \; \ldots \qquad \Rightarrow \quad x = \dfrac{n}{999}. \end{array}$$

Das Cauchy-Kriterium (Definition 2.31 und Satz 2.32) liefert folgendes Konvergenzkriterium für Reihen:

Satz 3.6: (Das Cauchy-Kriterium für Reihen)

Die Reihe $\sum_k z_k$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon)$ gibt, so dass $\Big| \sum\limits_{k=n}^{m} z_k \Big| \leq \epsilon$ gilt für alle $m \geq n \geq N(\epsilon)$.

Beweis: Nach dem Cauchy-Kriterium konvergiert die Folge $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon)$ gibt, so dass

$$|S_m - S_n| \leq \epsilon \text{ für alle } m, n \geq N(\epsilon).$$

Hierbei ist $S_m - S_n = \sum_{k=n+1}^{m} z_k$ für $m > n$. Ersetzt man n durch $n - 1$ ergibt sich das angegebene Kriterium.

Q.E.D.

Als Folgerung ergibt sich, dass absolut konvergente Reihen konvergieren:

Satz 3.7: (Absolute Konvergenz impliziert Konvergenz)

Wenn $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |z_k|$ konvergiert, dann auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$.

Beweis: Die Dreiecksungleichung liefert $\Big| \sum\limits_{k=n}^{m} z_k \Big| \leq \sum\limits_{k=n}^{m} |z_k|$. Erfüllt $\sum_k |z_k|$ das Cauchy-Kriterium 3.6, so ist dieses Kriterium automatisch auch für $\sum_k z_k$ erfüllt.

Q.E.D.

Nur Reihen über Nullfolgen können konvergieren:

Satz 3.8:

Wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ *konvergiert, dann ist* (z_k) *eine Nullfolge.*

Beweis: Das Cauchy-Kriterium 3.6 mit $m = n$ besagt, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon)$ gibt, so dass

$$\Big| \sum_{k=n}^{n} z_k \Big| = |z_n| \le \epsilon$$

für alle $n \ge N(\epsilon)$ gilt. Dies ist die Konvergenz $(z_n) \to 0$.

Q.E.D.

Dies ist kein Konvergenz- sondern ein Divergenzkriterium: bilden die Summanden keine Nullfolge, muß die Reihe divergieren!

Beispiel 3.9: Die Reihe $\sum_k \frac{k}{k+1}$ konvergiert nicht, da die Summanden $\frac{k}{k+1}$ nicht gegen 0 konvergieren (sie konvergieren gegen 1).

Die Umkehrung gilt nicht: bilden die Summanden eine Nullfolge, so kann man nicht darauf schließen, dass die Reihe konvergiert. Ein Gegenbeispiel:

Beispiel 3.10: Die sogenannte **„harmonische Reihe“** $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ ist unbeschränkt, d.h., sie divergiert.

Beweis: Betrachte die Teilfolge (S_{2^m}):

$$S_{2^m} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}}_{> \frac{2^2}{2^3} = \frac{1}{2}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2^{m-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^m}}_{> \frac{2^{m-1}}{2^m} = \frac{1}{2}}$$

$$\ge 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{m \text{ Terme}} = 1 + \frac{m}{2}.$$

Da (S_n) monoton wächst, konvergiert (S_n) uneigentlich gegen ∞.

Q.E.D.

Auf dieses Argument kommen wir später beim „Kondensationskriterium“ 3.20 zurück.

Der Satz 2.28 liefert für reelle Reihen folgendes Konvergenzkriterium:

Satz 3.11: (Reihenkonvergenz bei positiven Summanden)

Sei (x_n) *eine reelle Nullfolge mit* $x_n \ge 0$. *Die Reihe* $\sum_k x_k$ *konvergiert dann und genau dann, wenn die Partialsummen* $\sum_{k=1}^{n} x_k$ *nach oben beschränkt sind.*

Beweis: Wegen $x_k \geq 0$ ist die Partialsummenfolge $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$ monoton steigend. Ist sie beschränkt, konvergiert sie nach Satz 2.28. Konvergiert sie, ist sie selbstverständlich beschränkt.

Q.E.D.

Wir erinnern an Beispiel 2.29:

Beispiel 3.12: Mit $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k \geq 2^{k-1}$ sind die folgenden Partialsummen nach oben beschränkt:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \underbrace{\frac{1}{1!}}_{=\frac{1}{2^0}} + \underbrace{\frac{1}{2!}}_{=\frac{1}{2^1}} + \underbrace{\frac{1}{3!}}_{<\frac{1}{2^2}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{n!}}_{<\frac{1}{2^{n-1}}}$$

$$\leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \leq 3.$$

Damit konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ gegen einen Wert ≤ 3 (es ist die Eulersche Zahl 2.718...).

3.2 Rechenregeln und das Cauchy-Produkt

17.5.02↓

Die Rechenregeln 2.13 liefern sofort:

Satz 3.13: (Rechenregeln)

a) Wenn $\sum_k z_k$ konvergiert, dann auch $\sum_k c \cdot z_k$ für jedes $c \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot z_k = c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} z_k.$$

b) Wenn $\sum_k z_k$ und $\sum_k \tilde{z}_k$ konvergieren, dann auch $\sum_k (z_k \pm \tilde{z}_k)$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (z_k \pm \tilde{z}_k) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{z}_k.$$

Beweis: Satz 2.13 a) + b) angewendet auf die Partialsummen.

Q.E.D.

Es macht Sinn, Reihen miteinander zu multiplizieren. Da das Distributivgesetz aus dem Produkt zweier Partialsummen eine endliche Doppelsumme

$$(a_1 + \cdots + a_n) \cdot (b_1 + \cdots + b_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i \cdot b_j$$

ergibt, muss man die Summanden zunächst gezielt zusammenfassen, um zu einer Folge von Partialsummen für das Produkt zu kommen. Wir führen eine „Anordnung“ ein, indem wir einen formalen Ordnungsparameter ζ einführen:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \zeta^k{}_{|\,\zeta = 1} .$$

Das Produkt ordnen wir dann nach Potenzen von ζ:

$$(a_1 \cdot \zeta + a_2 \cdot \zeta^2 + \cdots) \cdot (b_1 \cdot \zeta + b_2 \cdot \zeta^2 + \cdots)$$

$$= a_1 \cdot b_1 \cdot \zeta^2 + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) \cdot \zeta^3 + (a_1 \cdot b_3 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_1) \cdot \zeta^4 + \cdots .$$

Die einzelnen ζ-Potenzen liefern die Summanden der Partialsummen. Dies motiviert die folgende Definition:

Definition 3.14: (Das Cauchy-Produkt von Reihen)

Das **„Cauchy-Produkt“** *(die* **„Faltung“***) zweier Reihen* $\sum_k a_k$, $\sum_k b_k$ *ist die Reihe* $\sum_k c_k$ *mit*

$$c_k = \sum_{\substack{i,j \\ i+j=k}} a_i \cdot b_j .$$

Satz 3.15: (Konvergenz des Cauchy-Produkts)

Sind die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *absolut konvergent, so auch das Cauchy-Produkt* $\sum_{k=2}^{\infty} c_k$. *Es gilt* $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} c_k = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\Big) \cdot \Big(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\Big)$.

Beweis: (Für technisch Interessierte) Für die Partialsummen des Cauchy-Produkts gilt

$$\sum_{k=2}^{n} |c_k| = \sum_{k=2}^{n} \Big| \sum_{\substack{i,j \\ i+j=k}} a_i \cdot b_j \Big| \le \sum_{k=2}^{n} \sum_{\substack{i,j \\ i+j=k}} |a_i| \cdot |b_j|$$

$$\le \sum_{\substack{i,j \\ i \le n, j \le n}} |a_i| \cdot |b_j| = \Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i| \Big) \cdot \Big(\sum_{j=1}^{n} |b_j| \Big).$$

Da die rechte Seite für $n \to \infty$ konvergiert, ist die rechte Seite beschränkt. Nach Satz 3.11 liefert dies die Konvergenz von $\sum_k |c_k|$, also die absolute Konvergenz

des Cauchy-Produkts.
Das Cauchy-Produkt konvergiert gegen das Produkt der einzelnen Summen:

$$\Big|\underbrace{\Big(\sum_{i=1}^{2\,n} a_i\Big)}_{S_{2n}^{(a)}} \cdot \underbrace{\Big(\sum_{j=1}^{2\,n} b_j\Big)}_{S_{2n}^{(b)}} - \underbrace{\sum_{k=2}^{2\,n} c_k}_{S_{2n}^{(c)}}\Big| = \Big|\sum_{i=1}^{2\,n}\sum_{j=1}^{2\,n} a_i \cdot b_j - \sum_{k=2}^{2\,n} \sum_{\substack{i,j\\ i+j=k}} a_i \cdot b_j\Big|$$

$$= \Big|\sum_{\substack{i,j\\ i\le 2n, j\le 2n\\ i+j>2n}} a_i \cdot b_j\Big| \le \sum_{\substack{i,j\\ i\le 2n, j\le 2n\\ i+j>2n}} |a_i| \cdot |b_j|$$

$$\le \max(|a_n|, \ldots, |a_{2\,n}|) \cdot \sum_{j=n+1}^{2\,n} |b_j| \;+\; \max(|b_n|, \ldots, |b_{2\,n}|) \cdot \sum_{i=n+1}^{2\,n} |a_i|.$$

Da (a_n), (b_n) Nullfolgen sind, ist der letzte Ausdruck eine Nullfolge. Für die Partialsummen folgt

$$S_{2\,n}^{(c)} = S_{2\,n}^{(a)} \cdot S_{2\,n}^{(b)} + \text{Nullfolge}_n,$$

was zur Behauptung $S_n^{(c)} \to (\sum_i a_i) \cdot (\sum_j b_j)$ führt.

Q.E.D.

3.3 Spezielle Konvergenzkriterien

Es gibt eine Anzahl spezieller Kriterien für die Konvergenz/Divergenz von Reihen:

Satz 3.16: (Majorantenkriterium)

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ eine konvergente Reihe mit reellen Summanden $x_k \ge 0$. Sei (z_n) eine komplexe Folge. Gilt für alle bis auf endlich viele Indizes $|z_k| \le x_k$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ absolut.
Bezeichung: $\sum_k x_k$ heißt **„konvergente Majorante“** *für $\sum_k z_k$.*

Beweis: Die Partialsummen von $\sum_k |z_k|$ sind beschränkt (o.B.d.A. nehmen wir an, $|z_k| \le x_k$ gilt für alle Indizes):

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k| \le \sum_{k=1}^{n} x_k \le \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

Nach Satz 3.11 konvergiert $\sum_k |z_k|$, d.h., die Reihe $\sum_k z_k$ konvergiert absolut.

Q.E.D.

Satz 3.17: (Minorantenkriterium)

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ eine divergente Reihe mit reellen Summanden $x_k \geq 0$ Sei (y_n) eine reelle Folge. Gilt für alle bis auf endlich viele Indizes $x_k \leq y_k$, so divergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ (genauer: sie konvergiert uneigentlich gegen ∞).

Bezeichung: $\sum_k x_k$ heißt **„divergente Minorante"** *für $\sum_k y_k$.*

Beweis: Würde die Reihe $\sum_k y_k$ konvergieren, wäre sie eine konvergente Majorante für $\sum_k x_k$, und nach Satz 3.16 müßte $\sum_k x_k$ konvergieren.

Q.E.D.

Satz 3.18: (Quotientenkriterium)

Sei (z_n) eine komplexe Folge. Gilt für alle bis auf endlich viele Indizes $\frac{|z_{k+1}|}{|z_k|} \leq c$ mit einem Wert $c \in (0, 1)$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ absolut.

Beweis: Aus der Abschätzung folgt

$$|z_k| \leq c \cdot |z_{k-1}| \leq c^2 \cdot |z_{k-2}| \leq \ldots \leq c^{k-1} \cdot |z_1|.$$

Die geometrische Reihe $\sum_k |z_1| \cdot c^{k-1}$ konvergiert nach Beispiel 3.3 für $c \in (0, 1)$ und ist damit eine konvergente Majorante für $\sum_k z_k$.

Q.E.D.

Satz 3.19: (Wurzelkriterium)

Sei (z_n) eine komplexe Folge. Gilt für alle bis auf endlich viele Indizes $\sqrt[k]{|z_k|} \leq c$ mit einem Wert $c \in (0, 1)$, so konvergiert die komplexe Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ absolut.

Beweis: Aus der Abschätzung folgt $|z_k| \leq c^k$. Damit ist die geometrische Reihe $\sum_k c^k$ für $c \in (0, 1)$ eine konvergente Majorante für $\sum_k z_k$.

Q.E.D.

Satz 3.20: (Kondensationskriterium)

Ist (x_n) eine monoton fallende Folge positiver reeller Zahlen, so konvergiert $\sum_k x_k$ dann und genau dann, wenn die Reihe

$$\sum_{m}^{\infty} 2^m \cdot x_{2^m}$$

konvergiert.

Beweis: Nach Satz 3.11 ist zu entscheiden, ob die Partialsummen $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ beschränkt sind. Betrachte

$$S_{2^{n+1}-1} = \underbrace{x_1}_{=1\cdot x_1} + \underbrace{x_2 + x_3}_{\leq 2\cdot x_2} + \underbrace{x_4 + \cdots + x_7}_{\leq 4\cdot x_4} + \cdots + \underbrace{x_{2^n} + \cdots + x_{2^{n+1}-1}}_{\leq 2^n \cdot x_{2^n}}$$

$$\leq \sum_{m=0}^{n} 2^m \cdot x_{2^m}.$$

Konvergiert $\sum_m 2^m \cdot x_{2^m}$, so sind alle Partialsummen S_n beschränkt und $\sum_k x_k$ konvergiert. Umgekehrt gilt:

$$S_{2^n} = x_1 + \underbrace{x_2}_{=1\cdot x_2} + \underbrace{x_3 + x_4}_{\geq 2\cdot x_4} + \underbrace{x_5 + \cdots + x_8}_{\geq 4\cdot x_8} + \cdots + \underbrace{x_{2^{n-1}+1} + \cdots + x_{2^n}}_{\geq 2^{n-1}\cdot x_{2^n}}$$

$$\geq x_1 + \sum_{m=1}^{n} 2^{m-1} \cdot x_{2^m} \geq \frac{1}{2} \cdot \sum_{m=1}^{n} 2^m \cdot x_{2^m}.$$

Divergiert $\sum_m 2^m \cdot x_{2^m}$, so sind alle Partialsummen unbeschränkt und $\sum_k x_k$ divergiert.

Q.E.D.

23.5.02↓ Hier eine Reihe von Beispielen zu den diversen Kriterien:

Beispiel 3.21: Wir setzen das Majorantenkriterium 3.16 ein, um zu zeigen, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert. Dazu machen wir eine Anleihe beim kommenden Beispiel 3.31, wo die Konvergenz

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = 1$$

gezeigt wird. Dazu schätzen wir $x_k = \frac{1}{k^2}$ gegen $\tilde{y}_k = \frac{1}{k\cdot(k+1)}$ ab ($\sum_k \tilde{y}_k$ soll als konvergente Majorante für $\sum_k x_k$ dienen). Es gilt zwar nicht unmittelbar $|x_k| = x_k \leq \tilde{y}_k$, aber mit

$$k^2 \geq \frac{k \cdot (k+1)}{2}$$

($\Leftrightarrow\ 2 \cdot k^2 \geq k^2 + k\ \Leftrightarrow k^2 \geq k$; dies ist für alle $k \geq 1$ erfüllt) folgt

$$x_k = \frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{k \cdot (k+1)} = 2 \cdot \tilde{y}_k =: y_k.$$

Mit Beispiel 3.31 folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} y_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k \cdot (k+1)} = 2.$$

Das Majorantenkriterium garantiert hiermit die Konvergenz von $\sum_k \frac{1}{k^2}$. Welchen Wert diese Reihe hat, haben wir damit allerdings nicht herausbekommen.

Beispiel 3.22: Die in Beispiel 3.21 betrachtete Summe wird mit MuPAD berechnet:

```
>> sum(1/k^2, k = 1..infinity)
                                    2
                                  PI
                                  ---
                                   6
```

Hierbei ist `PI` $= \pi = 3.1415....$ Zur Kontrolle vergleichen wir diesen Wert mit einer langen, aber endlichen Summe:

```
>> float(%)
                              1.644934067

>> sum(1.0/k^2, k = 1..1000)

                              1.643934567
```

(Das passt einigermaßen.) Einige weitere Summen, z.B. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k \cdot (k+2) \cdot (k+5)}$:

```
>> sum((k + 1)/k/(k + 2)/(k + 5), k = 1..infinity)

                                323/900
```

Oder auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$:

```
>> sum(1/k^3, k = 1..infinity)

                                zeta(3)
```

Dieser Reihenwert hat keine elementare Darstellung. Stattdessen stellt MuPAD ihn mittels der (unter Mathematikern) berühmten speziellen Funktion `zeta` (die sogenannte Riemannsche Zeta-Funktion) dar. Das nützt uns hier relativ wenig, da wir mit dieser Funktion nicht näher vertraut sind. Zumindestens kann man hiermit aber bequem Gleitpunktnäherungen berechnen:

```
>> float(%)
                              1.202056903
```

Die Web-Seite `mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunction.html` liefert weitere Informationen zur Zeta-Funktion.

Beispiel 3.23: Die Reihe $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ konvergiert nicht für $n \to \infty$: zwar konvergieren die Summanden $x_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$ gegen 0, aber „nicht schnell genug“:

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{k}} = 18.5896... \,, \quad \sum_{k=1}^{1000} \frac{1}{\sqrt{k}} = 61.8010... \,, \quad \sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}} = 198.5446... \,.$$

Genauer gesagt: die Reihe „konvergiert uneigentlich gegen ∞“. Beweis: die nach Beispiel 3.10 divergierende harmonische Reihe ist eine divergente Minorante:

$$\frac{1}{k} \le \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Beispiel 3.24: Betrachte die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$, wo z eine beliebige feste komplexe Zahl ist (beachte: $0! = 1$). Diese Reihe konvergiert nach dem Quotientenkriterium. Mit $z_k = \dfrac{z^k}{k!}$ ist der Quotient zweier aufeinander folgender Summanden

$$\frac{|z_{k+1}|}{|z_k|} = \frac{\frac{|z|^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{|z|^k}{k!}} = \frac{|z|^{k+1} \cdot k!}{|z|^k \cdot (k+1)!} = \frac{|z|^k \cdot |z| \cdot k!}{|z|^k \cdot (k+1) \cdot k!} = \frac{|z|}{k+1}.$$

Für hinreichend große k (nämlich $k \ge 2 \cdot |z|$) gilt

$$\frac{|z_{k+1}|}{|z_k|} \le \frac{|z|}{2 \cdot |z| + 1} < \frac{|z|}{2 \cdot |z|} = \frac{1}{2} =: c < 1,$$

womit das Quotientenkriterium erfüllt ist.

Der Grenzwert heißt **„Exponentialfunktion“** e^z bzw. $\exp(z)$. In der Tat stimmt die Reihe mit der in Satz 2.20 benutzten Definition überein (was noch zu zeigen wäre):

$$\boxed{e^z = \exp(z) = \lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{z}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots \,.}$$

Die Reihendarstellung der exp-Funktion bietet einige Vorteile. Für kleine Argumente z gilt z.B. die Näherung

$$\exp(z) = 1 + \underbrace{z}_{\text{klein}} + \underbrace{\frac{z^2}{2!}}_{\text{noch kleiner}} + \underbrace{\frac{z^3}{3!}}_{\text{noch viel kleiner}} + \cdots \quad \approx \quad 1 + z + \frac{z^2}{2} \,.$$

Wir ersparen uns hier den Beweis für

$$\lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{z}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

der einigen technischen Abschätzungsaufwand erfordert.

Beispiel 3.25: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ konvergiert genau dann, wenn $p > 1$ gilt.

Beweis: für festes $p > 0$ ist die Folge $x_k = 1/k^p$ monoton falled. Das Kondensationskriterium liefert die Konvergenz, wenn

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^m \cdot x_{2^m} = \sum_{m=1}^{\infty} 2^m \cdot \frac{1}{(2^m)^p} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2^m)^{p-1}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{p-1})^m}$$

konvergiert. Diese geometrische Reihe konvergiert, wenn $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$ gilt, d.h., für $p > 1$. Für $p \leq 1$ ist die harmonische Reihe $\sum_k \frac{1}{k}$ eine divergierende Minorante.

3.4 Bedingte Konvergenz, Umordnungen

Es gibt einen Spezialfall, wo die Tatsache, dass die Summanden eine Nullfolge bilden, für die Konvergenz der Reihe ausreicht: alternierende Reihen:

Satz 3.26: (Das Leibniz–Kriterium für alternierende Reihen)

Eine reelle Folge (x_n) heißt **“alternierend“**, *wenn für jeden Index x_n und x_{n+1} unterschiedliche Vorzeichen haben. Ist zusätzlich $|x_n|$ monoton fallend und (x_n) eine Nullfolge, so konvergiert die zugeordnete „alternierende Reihe“ $\sum_k x_k$.*

Beweis: Fixiere ein beliebiges n. Durch Induktion nach m ist leicht zu zeigen, dass

$$\Big| \sum_{k=n}^{m} x_k \Big| \leq |x_n|$$

für alle $m \geq n$ gilt. Da $|x_n|$ eine Nullfolge bildet, ist das Cauchy-Kriterium 3.6 erfüllt.

Q.E.D.

Beispiel 3.27: Die **„alternierende harmonische Reihe“**

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

erfüllt das Leibniz-Kriterium und konvergiert (der Grenzwert ist $\ln(2)$).

Die alternierende harmonische Reihe konvergiert, aber sie konvergiert nicht absolut (die harmonische Reihe ist bekanntlich divergent). Für solche „bedingt“ (= nicht absolut) konvergente Reihen ist höchste Vorsicht geboten: die Reihenfolge der Summation ist wichtig!

Beobachtung 3.28:

Für die alternierende harmonische Reihe des letzten Beispiels gilt:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc} S & = & 1 & - & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{3} & - & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{5} & - & \frac{1}{6} & + & \frac{1}{7} & - & \frac{1}{8} & + & \ldots \\ \frac{S}{2} & = & & & \frac{1}{2} & & & - & \frac{1}{4} & & & + & \frac{1}{6} & & & - & \frac{1}{8} & + & \ldots \\ \hline \frac{3\cdot S}{2} & = & 1 & & & + & \frac{1}{3} & - & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{5} & & & + & \frac{1}{7} & - & \frac{1}{4} & + & \ldots \end{array}$$

Man kann sich leicht überlegen, dass in der letzten Reihe der Kehrwert jeder natürlichen Zahl genau einmal auftaucht. In der Tat erhält sie alle Summanden der alterniernenden Reihe S, nur dass die Summanden anders angeordnet sind:

> *„Nehme 2 positive Summanden von S, dann einen negativen, dann die beiden nächsten positiven, dann den nächsten negativen usw."*

Diese Umordnung hat den Grenzwert verändert!

Erstaunlicherweise kann man durch eine geeignete Umsummation *jeden beliebigen* Grenzwert erreichen:

Satz 3.29: (Riemannscher Umordnungssatz für bedingt konvergente Reihen)

Sei $\sum_k x_k$ eine konvergierende reelle Reihe, die nicht absolut konvergiert: $\sum_k |x_k| = \infty$. Dann gibt es zu jedem $S \in \mathbb{R}$ eine bijektive Abbildung $P : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (eine **"Permutation" von** $\mathbb{N}$*), so dass*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{P(k)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_{P(k)} = S$$

gilt.

Die **Beweisidee** ist sehr einfach, der Beweis ist konstruktiv. Sei

$$N^+ = \{n \in \mathbb{N}, x_n \geq 0\}, \quad N^- = \{n \in \mathbb{N}, x_n < 0\}.$$

Man überlegt sich, dass die Divergenz von $\sum_k |x_k|$ zusammen mit der Konvergenz von $\sum_k x_k$ bedeutet, dass $\sum_{k\in N^+} x_k$ gegen ∞ und $\sum_{k\in N^-} x_k$ gegen $-\infty$ konvergiert. Zu gegebenem S wähle solange Indizes in N^+, bis die Summe über die entsprechenden positiven x_k zum ersten Mal S überschreitet (wegen $\sum_{k\in N^+} x_k = \infty$ wird dies sicherlich irgendwann geschehen). Dann wähle solange Indizes in N^-, bis durch Hinzuaddieren der entsprechenden negativen x_k zum ersten Mal S unterschritten wird (wegen $\sum_{k\in N^-} x_k = -\infty$ wird dies sicherlich irgendwann geschehen). Dann wähle wieder Indizes auf N^+, bis S überschritten wird usw. Die Differenz zwischen S und der überschreitenden bzw. unterschreitenden Zwischensumme ist jeweils kleiner als das letzte Folgenelement, das addiert bzw. subtrahiert wurde. Die Folgenglieder sind aber eine Nullfolge, da $\sum_k x_k$ konvergiert. Damit konvergieren die konstruierten Zwischensummen gegen S. Details: siehe z.B. Chr. Blatter, Analysis 1, Springer.

Q.E.D.

Glücklicherweise ergibt sich dieses Umordnungsproblem bei absolut konvergierenden Reihen nicht. Jede Umordnung der Reihenglieder liefert die selbe Summe:

Satz 3.30: (Umordnungssatz für absolut konvergente Reihen)

Sei $\sum_k z_k$ eine (komplexe) absolut konvergierende Reihe. Dann konvergiert $\sum_k z_{P(k)}$ für jede Permutation P absolut gegen den selben Grenzwert.

Beweis: siehe z.B. Chr. Blatter, Analysis 1, Springer.

3.5 Summation per Partialbruchzerlegung

↓24.5.02

Es gibt einige Situationen, wo man (endliche) Reihen explizit berechnen kann. Der Reihenwert ergibt sich als Grenzwert des expliziten Ausdrucks:

Beispiel 3.31: Betrachte $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\cdot(k+1)}$. Die entscheidende Beobachtung ist:

$$\frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

(man bringe $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ auf den Hauptnenner). Hiermit ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\cdot(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{n} \\ &\quad - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} - \cdots - \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1} \\ &= 1 - \tfrac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Man nennt so eine Summe auch „Teleskopsumme“: sie läßt sich zu einigen wenigen Termen „zusammenschieben“, da sich fast alle Summanden aufheben. Es folgt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\cdot(k+1)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\cdot(k+1)} = \lim_{n\to\infty}\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big) = 1.$$

Der im obigen Beispiel angewendete Trick läßt sich systematisch anwenden:

Rezept (Summation durch „Partialbruchzerlegung") 3.32:

Betrachte die Summe $\sum_k a_k$ über einen „rationalen" Ausdruck in k:

$$a_k = \frac{c_0 + c_1 \cdot k + \cdots + c_p \cdot k^p}{d_0 + d_1 \cdot k + \cdots + d_q \cdot k^q}$$

mit $p + 2 \leq q$ (für $p + 2 > q$ divergiert die Reihe $\sum_k a_k$).

- *Schritt 1: Bestimme die Nullstellen $k_1, k_2, \ldots, k_q$ des Nennerpolynoms $P(k) = d_0 + d_1 \cdot k + \cdots + d_q \cdot k^q = d_q \cdot (k - k_1) \cdot \ldots \cdot (k - k_q)$.*
- *Schritt 2: Sind alle Nullstellen einfach, so kann man den Ausdruck stets folgendermaßen additiv zerlegen: es gibt Werte $e_1, e_2, \ldots, e_q$, so dass*

$$a_k = \frac{c_0 + c_1 \cdot k + \cdots + c_p \cdot k^p}{d_0 + d_1 \cdot k + \cdots + d_q \cdot k^q} = \frac{e_1}{k - k_1} + \frac{e_2}{k - k_2} + \cdots + \frac{e_q}{k - k_q} \ .$$

  Finde diese Werte $e_1, \ldots, e_q$! Man bringt dazu die rechte Seite dieses Ansatzes auf den Hauptnenner (das ergibt nach Konstruktion das Nennerpolynom $P(k)$). Das Zählerpolynom muss mit dem Zähler der linken Seite übereinstimmen. Vergleiche in den Zählern die Koeffizienten der k-Potenzen, die einzeln übereinstimmen müssen. Dies führt zu einem (stets lösbaren) **linearen Gleichungssystem** *für $e_1, \ldots, e_q$.*
- *Schritt 3: Es gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{e_1}{k - k_1} + \frac{e_2}{k - k_2} + \cdots + \frac{e_q}{k - k_q} \Big)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{e_1}{k - k_1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{e_2}{k - k_2} + \cdots + \sum_{k=1}^{n} \frac{e_2}{k - k_q}.$$

  Unterscheiden sich die Nullstellen um ganze Zahlen, so läßt sich diese Summe von Summen als „Teleskopsumme" zu einem expliziten Ausdruck in n vereinfachen.

Beispiel 3.33: Betrachte $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{k}{k^3 - 2 \cdot k^2 - k + 2}$.

Schritt 1: Die Nullstellen des Nennerpolynoms sind $k_1 = 1$, $k_2 = -1$, $k_3 = 2$:

$$k^3 - 2 \cdot k^2 - k + 2 = (k - 1) \cdot (k + 1) \cdot (k - 2).$$

Schritt 2: Mache den Ansatz:

$$\frac{k}{k^3 - 2 \cdot k^2 - k + 2} = \frac{e_1}{k-1} + \frac{e_2}{k+1} + \frac{e_3}{k-2}.$$

Bringe die rechte Seite auf den Hauptnenner und ordne den Zähler nach k-Potenzen:

$$\begin{aligned}
&\frac{e_1}{k-1} + \frac{e_2}{k+1} + \frac{e_3}{k-2} \\
&\quad = \frac{e_1 \cdot (k+1) \cdot (k-2) + e_2 \cdot (k-1) \cdot (k-2) + e_3 \cdot (k-1) \cdot (k+1)}{(k-1) \cdot (k+1) \cdot (k-2)} \\
&\quad = \frac{e_1 \cdot (k+1) \cdot (k-2) + e_2 \cdot (k-1) \cdot (k-2) + e_3 \cdot (k-1) \cdot (k+1)}{(k-1) \cdot (k+1) \cdot (k-2)} \\
&\quad = \frac{e_1 \cdot k^2 - e_1 \cdot k - 2 \cdot e_1 + e_2 \cdot k^2 - 3 \cdot e_2 \cdot k + 2 \cdot e_2 + e_3 \cdot k^2 - e_3}{(k-1) \cdot (k+1) \cdot (k-2)} \\
&\quad = \frac{(e_1 + e_2 + e_3) \cdot k^2 + (-e_1 - 3 \cdot e_2) \cdot k + (-2 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 - e_3)}{(k-1) \cdot (k+1) \cdot (k-2)}.
\end{aligned}$$

Dies muß als Polynom in k mit dem Zähler der Summanden der Reihe übereinstimmen, also

$$k = 0 \cdot k^2 + 1 \cdot k + 0 = \underbrace{(e_1 + e_2 + e_3)}_{=0} \cdot k^2 + \underbrace{(-e_1 - 3 \cdot e_2)}_{=1} \cdot k + \underbrace{(-2 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 - e_3)}_{=0}.$$

Durch Vergleich der k-Potenzen ergibt sich:

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad -e_1 - 3 \cdot e_2 = 1, \quad -2 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 - e_3 = 0.$$

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems ist

$$e_1 = -\frac{1}{2}, \quad e_2 = -\frac{1}{6}, \quad e_3 = \frac{2}{3},$$

also

$$\frac{k}{k^3 - 2 \cdot k^2 - k + 2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k-1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{k+1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k-2}.$$

Schritt 3: Reduktion der Teleskopsumme. Beachte, dass eine der Gleichungen $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ war. Deshalb ist es kein Zufall, dass sich in der Tat eine Teleskopsumme ergibt:

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{k}{k^3 - 2 \cdot k^2 - k + 2} = \sum_{k=3}^{n} \frac{(-1/2)}{k-1} + \sum_{k=3}^{n} \frac{(-1/6)}{k+1} + \sum_{k=3}^{n} \frac{(2/3)}{k-2}$$

$$\begin{aligned}
= {} & \tfrac{(-1/2)}{2} + \tfrac{(-1/2)}{3} + \tfrac{(-1/2)}{4} + \cdots + \tfrac{(-1/2)}{n-2} + \tfrac{(-1/2)}{n-1} \\
& \tfrac{(-1/6)}{4} + \cdots + \tfrac{(-1/6)}{n-2} + \tfrac{(-1/6)}{n-1} + \tfrac{(-1/6)}{n} + \tfrac{(-1/6)}{n+1} \\
& + \tfrac{(2/3)}{1} + \tfrac{(2/3)}{2} + \tfrac{(2/3)}{3} + \underbrace{\tfrac{(2/3)}{4}}_{0} + \underbrace{\cdots}_{0} + \underbrace{\tfrac{(2/3)}{n-2}}_{0} \\
= {} & \tfrac{(-1/2)}{2} + \tfrac{(-1/2)}{3} + \tfrac{(-1/2)}{n-1} \\
& + \tfrac{(-1/6)}{n-1} + \tfrac{(-1/6)}{n} + \tfrac{(-1/6)}{n+1} \\
& + \underbrace{\tfrac{(2/3)}{1} + \tfrac{(2/3)}{2} + \tfrac{(2/3)}{3}} \\
= {} & \tfrac{29}{36} + \tfrac{(-2/3)}{n-1} + \tfrac{(-1/6)}{n} + \tfrac{(-1/6)}{n+1}.
\end{aligned}$$

Der Grenzwert für $n \to \infty$ liefert

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{k}{k^3 - 2 \cdot k^2 - k + 2} = \frac{29}{36}.$$

Beispiel 3.34: In MuPAD ist die Funktion `partfrac` („partial fraction") für die Partialbruchzerlegung zuständig:

```
>> partfrac(k/(k^3 - 2*k^2 - k + 2))

                    2           1           1
                --------- - --------- - ---------
                3 (k - 2)   6 (k + 1)   2 (k - 1)
```
