Kapitel 2

Folgen und Grenzwerte

Die Grundlage der Analysis ist der Begriff des Grenzwertes. Er ist aus der Schule bekannt (bzw. sollte bekannt sein) und wird hier rekapituliert. Da es kaum einen Unterschied macht, Folgen und Grenzwerte in $\mathbb{R}$ oder in $\mathbb{C}$ zu betrachten, formulieren wir die folgenden Definitionen und Sätze in $\mathbb{C}$, was $\mathbb{R}$ als Spezialfall umschließt. In den Beispielen und Übungen werden hauptsächlich reelle Folgen betrachtet.

2.1 Definitionen, Beispiele, einige Sätze

Notation: $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Definition 2.1: (Folgen)

Eine **Folge** $(z_n) = (z_1, z_2, z_3 \ldots)$, *manchmal auch* $(z_n) = (z_0, z_1, z_2, \ldots)$, *ist eine Zuordnung (Funktion)*

$$\textit{Index } n \in \mathbb{N} \ (\textit{bzw. } \mathbb{N}_0) \longrightarrow \ \textit{Wert } z_n \in \mathbb{C}.$$

Beispiel 2.2:

a) $x_n = (-1)^n; n \in \mathbb{N}$. Die Folge (x_n) ist $(-1, 1, -1, 1, \ldots)$.

b) $x_n = \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}$. Die Folge (x_n) ist $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$.

c) $x_n = 1 - \frac{1}{n^2}; n \in \mathbb{N}$. Die Folge (x_n) ist $(0, \frac{3}{4}, \frac{8}{9}, \frac{15}{16}, \frac{24}{25}, \ldots)$.

d) $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n; n \in \mathbb{N}$. Die Folge (x_n) ist

$$\Big(2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \frac{625}{256}, \frac{7776}{3125}, \ldots\Big) \approx (2.0, 2.25, 2.3703..., 2.4414..., 2.4883..., \ldots).$$

Beispiel 2.3: Einige simple Berechnungen mit MuPAD. Folgen können z.B. als Funktionen definiert werden:

```
>> x := n -> (1 + 1/n)^n

                      n -> (1 +  1/n)^n
```

Der „Folgengenerator" `$` dient zur Erzeugung von Folgen:

```
>> x(n) $ n = 1..5

              2, 9/4, 64/27, 625/256, 7776/3125
```

Gleitpunktnäherungen werden durch `float` erzeugt:

```
>> float(x(n)) $ n = 1..5

          2.0, 2.25, 2.37037037, 2.44140625, 2.48832
```

Manchmal sind Monotonieeigenschaften von Folgen interessant. Da hierzu Folgenglieder verglichen werden müssen, kann Monotonie nur im Reellen betrachtet werden (auf $\mathbb{C}$ gibt es keine sinnvolle Begriffsbildung der Art $z_1 < z_2$).

Bezeichnung 2.4:

Eine reelle Folge (x_n) heißt **„monoton wachsend"** *bzw.* **„monoton fallend"**, *wenn $x_n \leq x_m$ bzw. $x_n \geq x_m$ gilt für alle Indexpaare n, m mit $n < m$. Bei $x_n < x_m$ bzw. $x_n > x_m$ spricht man von* **„streng monoton wachsend"** *bzw.* **„streng monoton fallend"**.

Zunächst die formale Definition von „Konvergenz" und „Grenzwert", die etwas abschreckend sein mag, aber (keine Angst!) später nur in (den hier nicht wirklich interessierenden) technischen Beweisen zum Einsatz kommt. Oft reicht es, einfache Vererbungsreglen wie z.B. aus Satz 2.13 zu benutzen, um Grenzwerte mittels Arithmetikregeln zu ermitteln.

Definition 2.5: (Grenzwerte von Folgen)

Eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ heißt **„konvergent"**, *wenn eine Zahl $z^* \in \mathbb{C}$ existiert, so dass sich (intuitiv) „alle Zahlen z_n für großes n dem Wert z^* beliebig genau annähern".*
Formal: zu jedem noch so kleinen $\epsilon > 0$ läßt sich eine reelle Zahl $N(\epsilon)$ angeben, so dass $|z_n - z^*| \leq \epsilon$ gilt für alle Indizes $n \geq N(\epsilon)$.
Anschaulich: alle Werte z_n weichen für $n \geq N(\epsilon)$ maximal um den Wert ϵ vom Grenzwert ab.
Der Wert z^* heißt dann **„Grenzwert" („Limes")** *der Folge (z_n). Schreibweisen:*

$$z^* = \lim_{n \to \infty} z_n \quad \text{oder auch} \quad z_n \to z^* \text{ für } n \to \infty.$$

Eine nicht konvergierende Folge heißt **„divergent"**. *Konvergente Folgen mit dem Grenzwert 0 heißen auch* **Nullfolgen**.

Bemerkung 2.6: *Die Aussage „für alle $n \geq N(\epsilon)$" impliziert, dass nur „hinreichend große Indizes n" betrachtet zu werden brauchen.* **Merke:** *für Konvergenz ist das Verhalten der Folge für kleine Indexwerte völlig irrelevant. Genauer: man kann immer endlich viele Folgenelemente abändern, ohne dass sich etwas an der Konvergenz ändert: man kann o.B.d.A. (= ohne Beschränkung der Allgmeinheit) immer $N(\epsilon)$ größer wählen als der größte Index der geänderten Folgenglieder.*

Eine intuitive Interpretation der ϵ-Definition der Konvergenz lautet:

Für jedes (noch so kleine) $\epsilon > 0$ haben höchstens endlich viele Folgenglieder einen Abstand zum Grenzwert, der größer ist als ϵ.

Satz 2.7: (Eindeutigkeit von Grenzwerten)

Grenzwerte sind eindeutig, d.h., zu (z_n) gibt es höchstens ein z^* mit der obigen Eigenschaft.

Beweis: Seien z^* und z^{**} zwei Grenzwerte. Zu jedem $\epsilon > 0$ gilt für hinreichend große Indizes n:

$$|z_n - z^*| \leq \epsilon, \quad |z_n - z^{**}| \leq \epsilon$$

$$\Rightarrow |z^* - z^{**}| = |z^* - z_n + z_n - z^{**}| \leq |z^* - z_n| + |z_n - z^{**}| \leq 2 \cdot \epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann und damit auch $2 \cdot \epsilon$ beliebig klein sein kann, folgt $|z^* - z^{**}| = 0$, also $z^* = z^{**}$.

Q.E.D.

Einige einfache Beispiele mit formalem Beweis:

Beispiel 2.8: Die konstante Folge $(z_n) = (c, c, c, \ldots)$ ist konvergent mit dem Grenzwert $z^* = \lim_{n\to\infty} z_n = c$, denn für alle n gilt

$$|z_n - z^*| = |c - c| = 0 \leq \epsilon\ ,$$

wie auch immer $\epsilon > 0$ vorgegeben wird. Formal: zu $\epsilon > 0$ wähle $N(\epsilon) = 1$.

Nun ja, im obigen Beispiel war sogar das formale $N(\epsilon)$–Kriterium sehr einfach zu handhaben. Im nächsten Beispiel wird es ein klein wenig komplizierter:

Beispiel 2.9: Die Folge $x_n = \frac{1}{n}$ ist konvergent mit dem Grenzwert $x^* = \lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$. Formaler Beweis: zu beliebigem $\epsilon > 0$ wähle $N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}$. Dann folgt für alle $n \geq N(\epsilon)$:

$$|x_n - x^*| = |x_n - 0| = |x_n| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N(\epsilon)} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon.$$

Und noch ein Beispiel mit formalem Beweis:

Beispiel 2.10: Für $c \in \mathbb{C}$ gelte $|c| < 1$. Dann ist die Folge $z_n = c^n$ eine Nullfolge.

Beweis: Für $c = 0$ ist alles klar. Sei nun $c \neq 0$. Definiere $h = \frac{1}{|c|} - 1 > 0$, d.h., $|c| = \frac{1}{1+h}$. Es gilt

$$\frac{1}{|c^n|} = \frac{1}{|c|^n} = (1+h)^n = 1 + n \cdot h + \binom{n}{2} \cdot h^2 + \cdots \geq 1 + n \cdot h > n \cdot h.$$

Es folgt $|c^n| < \frac{1}{n \cdot h} \leq \epsilon$ für alle Indizes $n \geq \frac{1}{h \cdot \epsilon} =: N(\epsilon)$.

Q.E.D.

Beispiele:

$$c = 0.5: \quad (c^n) = (0.5,\ 0.25,\ 0.125,\ 0.0625,\ 0.03125\ldots).$$

Für $|c| \geq 1$ gilt diese Aussage nicht! Z.B.:

$$\begin{array}{lll} c = 1: & (c^n) = (1, 1, 1, 1, \ldots) & \text{(konvergiert gegen 1),} \\ c = i: & (c^n) = (i, -1, -i, 1, i, -1, \ldots) & \text{(konvergiert nicht),} \\ c = 2: & (c^n) = (2, 4, 8, 16, \ldots) & \text{(divergiert, bzw. „konvergiert gegen } \infty\text{“).} \end{array}$$

2.5.02↓ **Beispiel 2.11:** Einige Berechnungen mit MuPAD:

```
>> x := n -> c^n
                                n -> c^n
>> x(n) $ n = 1..10

                  2    3    4    5    6    7    8    9    10
              c, c , c , c , c , c , c , c , c , c
```

Grenzwerte werden mit `limit` berechnet. Die Hilfeseite dazu wird mittels `?limit` angefordert:

```
>> ?limit
```

Ohne Weiteres kann der Grenzwert nicht bestimmt werden, da er ja von den Eigenschaften von c abhängt:

```
>> limit(x(n), n = infinity)
Warning: cannot determine sign of ln(c) [stdlib::limit::limitMRV]

                                n
                         limit(c , n = infinity)
```

Nehmen wir an, c sei reell und $0 < c < 1$:

```
>> assume(0 < c < 1):
>> limit(x(n), n = infinity)

                                   0
```

Nehmen wir an, $c > 1$:

```
>> assume(c > 1):
>> limit(x(n), n = infinity)

                                infinity
```

Ein Beispiel einer nicht konvergierenden Folge:

Beispiel 2.12: Die Folge $x_n = (-1)^n$, also $(x_n) = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$ ist nicht konvergent (hat keinen Grenzwert). Hier ein formaler Beweis (damit in dieser Vorlesung wenigstens einmal ein sauberer Nichtexistenzbeweis vorkommt): zu $\epsilon = \frac{1}{2}$ läßt sich kein $N(\epsilon)$ finden. Angenommen, ein Grenzwert x^* existiert. Dann müßte $N(\epsilon)$ existieren mit

$$|x_n - x^*| \leq \epsilon, \quad |x_{n+1} - x^*| \leq \epsilon$$

für alle $n \geq N(\epsilon)$. Es würde folgen:

$$|x_n - x_{n+1}| = |x_n \underbrace{- x^* + x^*}_{=0} - x_{n+1}| \leq |x_n - x^*| + |x^* - x_{n+1}| \leq \epsilon + \epsilon = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Für die betrachtete Folge gilt aber $|x_n - x_{n+1}| = 2$ für jedes n. Widerspruch! Damit muß die Annahme „es existiert x^*“ falsch gewesen sein.

Die formale Definition mit ϵ und $N(\epsilon)$ ist unangenehm und man möchte diese recht technischen Betrachtungen und Abschätzungen liebend gern vermeiden. Wie geht man beim praktischen Rechnen vor? Es gibt Rechenregeln! Damit läßt sich ϵ und $N(\epsilon)$ praktisch immer verbannen:

Satz 2.13: (Rechenregeln für Grenzwerte)

Seien (x_n), (y_n) konvergente Folgen in $\mathbb{C}$, sei $c \in \mathbb{C}$ eine Konstante. Dann gilt:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot x_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, *b)* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$, **falls** $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$ **gilt (!)**,

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$.

Eine Beweisandeutung (nur für technisch Interessierte):

Beweisskizze: Seien x^* bzw. y^* die Grenzwerte von (x_n) bzw. (y_n).
a) Für $c = 0$ ist die Behauptung sicherlich richtig. Sei nun $c \neq 0$. Zu $\epsilon > 0$ gibt es ein N, so dass

$$|x_n - x^*| \leq \frac{\epsilon}{|c|}$$

gilt für alle $n \geq N$. Für diese Indizes folgt

$$|c \cdot x_n - c \cdot x^*| = |c| \cdot |x_n - x^*| \leq |c| \cdot \frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon.$$

b) Wähle ein beliebiges $\epsilon > 0$. Da (x_n) und (y_n) als konvergent vorausgesetzt sind, gibt es Werte N_x bzw. N_y mit

$$|x_n - x^*| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \text{bzw.} \quad |y_n - y^*| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

für alle $n \geq N_x$ bzw. $n \geq N_y$. Für alle $n \geq N(\epsilon) := \max(N_x, N_y)$ folgt

$$|x_n \pm y_n - (x^* \pm y^*)| = |x_n - x^* \pm (y_n - y^*)|$$
$$\leq |x_n - x^*| + |\pm (y_n - y^*)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Die Aussagen c) – e) lassen sich mit ähnlichen (etwas aufwendigeren) Abschätzungen beweisen.

Q.E.D.

Beispiel 2.14: Wir wissen bereits, dass konstante Folgen $x_n = c$ gegen c konvergieren, und dass $x_n = \frac{1}{n}$ eine Nullfolge ist. Durch Einsatz der Rechenregeln folgt unmittelbar:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0 \cdot 0 = 0,$$

usw. Durch Induktion nach k ergibt sich:

Alle Folgen der Form $x_n = \frac{1}{n^k}$ mit positiven Potenzen k sind Nullfolgen.

Manchmal muß man etwas manipulieren und umschreiben. Bei rationalen Ausdrücken in n (also Polynom(n)/Polynom(n)) gilt das allgemeine Rezept: ziehe in Zähler und Nenner die führende Potenz von n raus und kürze. Typischerweise verbleiben dann nur noch Nullfolgen im Ausdruck, die zu 0 werden, wenn man über die obigen Rechenregeln „den Grenzwert in den Ausdruck 'reinzieht“:

Beispiel 2.15:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot n^2+1}{n^2-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\cdot(2+\frac{1}{n^2})}{n^2\cdot(1-\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n}} = \frac{2+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}{1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}} = \frac{2+0}{1-0} = 2\ .$$

Hierbei wurde benutzt, dass wir in den Beispielen 2.9 und 2.14 bereits $1/n$ und $1/n^2$ als Nullfolgen identifiziert haben. Man sieht, mit etwas Geschick eingesetzt, machen die Rechenregeln die Berechnung von Grenzwerten oft sehr einfach. Manchmal muß man allerdings „tricksen“:

Beispiel 2.16:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}^2-\sqrt{n}^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n\cdot(1+\frac{1}{n})}+\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ \cdot\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}}\ \cdot\ \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}\ +\ 1\right)}$$

$$= \sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}\ \cdot\ \frac{1}{\sqrt{1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}}\ +\ 1} = 0\cdot\frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = 0.$$

Manchmal helfen alle Rechenregeln nichts, und man muß technisch abschätzen. Eine hilfreiche Aussage liefert der folgende Satz, der nur für reelle Folgen gilt. Liegen die Folgenglieder x_n in Intervallen $[a_n, b_n]$ und konvergieren die Intervallenden gegen den selben Wert, so bleibt der Folge nichts anderes übrig, als ebenfalls gegen diesen Wert zu konvergieren (die Intervalllänge $b_n - a_n$ konvergiert gegen 0):

Satz 2.17: (Intervallschachtelung)

Seien (a_n), (b_n), (x_n) reelle Folgen. Die Folgen (a_n) und (b_n) mögen gegen den selben Grenzwert konvergieren. Gilt für alle hinreichend großen Indizes $a_n \le x_n \le b_n$, so konvergiert auch (x_n) gegen

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Beweis: Sei x^* der Grenzwert von (a_n) und (b_n). Die Folge $(b_n - a_n)$ ist positiv und eine Nullfolge. Zu $\epsilon > 0$ gibt es Werte N_1 bzw. N_2 mit

$$b_n - a_n = |b_n - a_n| \le \frac{\epsilon}{2}, \quad |a_n - x^*| \le \frac{\epsilon}{2}$$

für alle $n \ge N_1$ bzw. $n \ge N_2$. Für alle $n \ge N := \max(N_1, N_2)$ folgt

$$|x_n - x^*| = |x_n - a_n + a_n - x^*| \le |x_n - a_n| + |a_n - x^*|$$

$$= x_n - a_n + |a_n - x^*| \le b_n - a_n + |a_n - x^*| \le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Q.E.D.

Beispiel 2.18: Sei $x_n = \frac{n}{n^2+1}$. Offensichtlich gilt

$$\underbrace{0}_{a_n} \le x_n = \frac{n}{n^2+1} \le \frac{n}{n^2} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{b_n}.$$

Die Intervallgrenzen $a_n = 0$ und $b_n = \frac{1}{n}$ sind beides Nullfolgen, also ist auch x_n eine Nullfolge.

Beispiel 2.19: Für positive reelle Zahlen c definieren wir $z_n = c^{1/n}$ als die positive reelle Lösung von $z^n = c$.

Fall 1: Sei $c \ge 1$. Sicherlich gilt $z_n \ge 1$. Setze $z_n = 1 + h_n$ mit $h_n \ge 0$. Es folgt

$$c = (1+h_n)^n = 1 + n\cdot h_n + \binom{n}{2}\cdot h_n^2 + \cdots \ge 1 + n\cdot h_n \quad \Rightarrow \quad 0 \le h_n \le \frac{c-1}{n}.$$

Damit ist h_n eine Nullfolge, also $z_n = 1 + h_n \to 1$ für $n \to \infty$.

Fall 2: Sei $0 < c \le 1$. Sicherlich gilt $0 < z_n \le 1$. Setze $z_n = 1/(1+h_n)$ mit $h_n \ge 0$. Analog zu Fall 1 folgt

$$\frac{1}{c} = (1+h_n)^n = 1 + n\cdot h_n + \binom{n}{2}\cdot h_n^2 + \cdots \ge 1 + n\cdot h_n \quad \Rightarrow \quad 0 \le h_n \le \frac{\frac{1}{c}-1}{n}.$$

Damit ist h_n eine Nullfolge, also $z_n = 1/(1+h_n) \to 1$ für $n \to \infty$.

Merke:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} c^{1/n} = 1 \text{ für jedes reelle } c > 0.}$$

Satz und Definition 2.20:

Sei z eine beliebige komplexe Zahl. Die Folge $x_n = (1 + \frac{z}{n})^n$ konvergiert gegen einen von z abhängenden Grenzwert $x^*(z)$, der auch als e^z oder auch als $\exp(z)$ bezeichnet wird. Die Funktion $\exp : z \mapsto e^z$ heißt **„Exponential-Funktion“**. *Der spezielle Grenzwert $e = e^1$ für $z = 1$ heißt* **„Eulersche Zahl“***:* $\boxed{\downarrow 3.5.02}$

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.71828... \ .$$

Der Beweis ist sehr technisch und bringt keine wirklichen Erkenntnisse. Nur der Vollständigkeit halber wird eine Teilskizze angegeben:

Beweisskizze: Wir betrachten nur den Fall $z = 1$. Man zeigt jeweils per Induktion, dass die reelle Folge $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ streng monoton wachsend in n ist und dass

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = x_{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)$$

streng monoton fallend in n ist. Da offensichtlich $x_n < y_n < y_2 = 4$ gilt, ist x_n monoton wachsend und nach oben beschränkt. Dies reicht, um die Konvergenz von (x_n) zu folgern (Satz 2.28). Zusatz: y_n ist monoton fallend und nach unten durch $y_n > x_{n-1} > x_1 = 2$ beschränkt, konvergiert also ebenfalls. Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) &= \lim_{n\to\infty} x_{n-1} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} x_{n-1} = \lim_{n\to\infty} x_n. \end{aligned}$$

Damit liefert jedes x_n eine untere und y_n eine obere Schranke für die Eulersche Zahl, wobei das Intervall $[x_n, y_n]$, in dem sie zu finden ist, auf die Länge 0 zusammenschrumpft.

Q.E.D.

Eine technische Vorüberlegung für den Beweis des kommenden Satzes 2.22:

Technischer Hilfssatz 2.21:

Sei (z_n) eine komplexe Nullfolge mit der Eigenschaft, dass $(n^2 \cdot z_n)$ beschränkt ist (d.h., es gibt eine Konstante $c > 0$, so dass für alle Indizes n $|z_n| \le \frac{c}{n^2}$ gilt). Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} (1 + z_n)^n = 1.$$

Der Beweis ist sehr technisch und bringt keine wirklichen Erkenntnisse. Er ist nur der Vollständigkeit halber angegeben:

Beweis: Es gilt (Aufgabe 8) für jedes $z \in \mathbb{C}$:

$$z^n - 1 = (z-1) \cdot \Big(1 + z + \cdots + z^{n-1}\Big).$$

Für $z = 1 + z_n$ folgt

$$(1+z_n)^n - 1 = z_n \cdot \Big(1 + (1+z_n) + \cdots + (1+z_n)^{n-1}\Big).$$

Die Dreiecksungleichung liefert

$$\Big|(1+z_n)^n - 1\Big| \leq |z_n| \cdot \Big(1 + |1+z_n| + \cdots + |1+z_n|^{n-1}\Big)$$

$$\leq |z_n| \cdot \Big(1 + (1+|z_n|) + \cdots + (1+|z_n|)^{n-1}\Big).$$

Mit $(1+|z_n|)^k \leq (1+|z_n|)^n$ für alle $k = 0, 1, \ldots, n-1$ folgt

$$\Big|(1+z_n)^n - 1\Big| \leq |z_n| \cdot \Big((1+|z_n|)^n + (1+|z_n|)^n + \cdots + (1+|z_n|)^n\Big)$$

$$= n \cdot |z_n| \cdot (1+|z_n|)^n.$$

Wegen $|z_n| \leq c/n^2$ gilt auch $|z_n| \leq c/n$:

$$\Big|(1+z_n)^n - 1\Big| \leq n \cdot |z_n| \cdot \Big(1 + \frac{c}{n}\Big)^n \leq n \cdot |z_n| \cdot e^c.$$

Wegen $|z_n| \leq c/n^2$ gilt $|n \cdot z_n| \leq c/n$:

$$\Big|(1+z_n)^n - 1\Big| \leq \frac{c \cdot e^c}{n}.$$

Damit gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \Big((1+z_n)^n - 1\Big) = 0$, und es folgt $\lim\limits_{n\to\infty} (1+z_n)^n = 1$.

Q.E.D.

Der folgende Satz ist fundamental und sehr wichtig:

Satz 2.22: (Funktionalgleichungen der Exponentialfunktion)

Für alle $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\boxed{e^0 = 1, \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z}, \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}, \quad (e^z)^n = e^{n\cdot z}.}$$

Trotz aller Wichtigkeit des Satzes: der Beweis bringt keine wirklichen Erkenntnisse und ist nur der Vollständigkeit halber für technisch Interessierte angegeben:

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
&\Big(1 + \frac{z_1 + z_2}{n}\Big)^n \cdot \Big(1 - \frac{z_1}{n}\Big)^n \cdot \Big(1 - \frac{z_2}{n}\Big)^n \\
&= \Big(\Big(1 + \frac{z_1 + z_2}{n}\Big) \cdot \Big(1 - \frac{z_1}{n}\Big) \cdot \Big(1 - \frac{z_2}{n}\Big)\Big)^n \\
&= \Big(1 - \frac{z_1^2 + z_1 \cdot z_2 + z_2^2}{n^2} + \frac{z_1 \cdot z_2 \cdot (z_1 + z_2)}{n^3}\Big)^n .
\end{aligned}$$

Die Folge

$$\begin{aligned}
x_n &= -\frac{z_1^2 + z_1 \cdot z_2 + z_2^2}{n^2} + \frac{z_1 \cdot z_2 \cdot (z_1 + z_2)}{n^3} \\
&= \frac{1}{n^2} \cdot \Big(z_1^2 + z_1 \cdot z_2 + z_2^2 + \frac{z_1 \cdot z_2 \cdot (z_1 + z_2)}{n}\Big)
\end{aligned}$$

erfüllt die im Hilfssatz 2.21 geforderte Bedingung $|x_n| \leq c/n^2$ mit

$$\begin{aligned}
\Big|z_1^2 + z_1 \cdot z_2 + z_2^2 + \frac{z_1 \cdot z_2 \cdot (z_1 + z_2)}{n}\Big| &\leq |z_1^2 + z_1 \cdot z_2 + z_2^2| + \frac{|z_1 \cdot z_2 \cdot (z_1 + z_2)|}{n} \\
&\leq |z_1^2 + z_1 \cdot z_2 + z_2^2| + |z_1 \cdot z_2 \cdot (z_1 + z_2)| =: c.
\end{aligned}$$

Hilfssatz 2.21 liefert damit

$$\lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{z_1 + z_2}{n}\Big)^n \cdot \Big(1 - \frac{z_1}{n}\Big)^n \cdot \Big(1 - \frac{z_2}{n}\Big)^n = \lim_{n\to\infty} (1 + x_n)^n = 1$$

und folglich gilt:

$$\begin{aligned}
1 &= \lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{z_1 + z_2}{n}\Big)^n \cdot \lim_{n\to\infty} \Big(1 - \frac{z_1}{n}\Big)^n \cdot \lim_{n\to\infty} \Big(1 - \frac{z_2}{n}\Big)^n \\
&= e^{z_1 + z_2} \cdot e^{-z_1} \cdot e^{-z_2}.
\end{aligned}$$

Mit $e^0 = \lim\limits_{n\to\infty} \Big(1 + \dfrac{0}{n}\Big)^n = \lim\limits_{n\to\infty} 1^n = 1$ folgt für $z_1 = z, z_2 = -z$:

$$1 = e^0 \cdot e^{-z} \cdot e^z = e^{-z} \cdot e^z \quad \Rightarrow \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z}.$$

Für allgemeine z_1, z_2 folgt dann:

$$1 = e^{z_1 + z_2} \cdot e^{-z_1} \cdot e^{-z_2} \quad \Rightarrow \quad e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}.$$

Hiermit folgt für $n \in \mathbb{N}$:

$$(e^z)^n = e^z \cdot e^z \cdot \ldots \cdot e^z = e^{z + z + \ldots + z} = e^{n \cdot z}.$$

Mit $e^{-z} = 1/e^z$ folgt die selbe Eigenschaft auch für negative ganzzahlige Potenzen n.

Q.E.D.

Beispiel 2.23: Einige Rechnungen mit MuPAD. Die Exponentialfunktion heißt `exp`:

```
>> limit((1 + 1/n)^n, n = infinity)

                              exp(1)
```

Mit % wird auf den letzten Wert zugegriffen:

```
>> float(%)
                            2.718281829

>> exp(20) = float(exp(20))

                      exp(20) = 485165195.4

>> exp(3 + I/2) = float(exp(3 + I/2))

         exp(3 + 1/2 I) = 17.62671695 + 9.629519358 I
```

Für reelle Argumente kann die Exponentialfunktion mittels `plotfunc2d` gezeichnet werden. Falls `x` vorher einen Wert zugewiesen bekommen hatte, muß dieser zunächst mittels `delete` gelöscht werden:

```
>> delete x:
>> plotfunc2d(exp(x), x = -2..3)
```

2.2 Weitere Konvergenzsätze

In diesem Abschnitt werden einige allgemeine Sätze formuliert, die hilfreich sind, die Konvergenz von Folgen zu prüfen. Als Vorbereitung wird zunächst das Supremumsaxiom vorgestellt. Es garantiert, dass $\mathbb{R}$ „vollständig" genug ist, um die Existenz diverser Grenzwerte zu sichern.

2.2.1 Das Supremumsaxiom für $\mathbb{R}$

Welcher Unterschied besteht zwischen der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen und der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen? In beiden Mengen ist die Arithmetik (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) definiert und verläßt die Menge nicht. Mathematisch gesprochen: beide Mengen sind **„Körper"**. Die Einführung der reellen Zahlen als Verallgemeinerung der rationalen Zahlen ist dadurch motiviert, Gleichungen wie z.B. $x^2 = 2$ lösen zu können ($\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl, also in $\mathbb{R}$, aber nicht in $\mathbb{Q}$). In diesem Sinne ist $\mathbb{R}$ „vollständiger" als $\mathbb{Q}$. Worauf läuft dies mathematisch hinaus?

Definition 2.24: (Beschränktheit)

Eine Teilmenge A von $\mathbb{R}$ heißt **„nach oben bzw. nach unten beschränkt“**, *wenn es Zahlen $M \in \mathbb{R}$ bzw. $m \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a \leq M$ bzw. $m \leq a$ für alle $a \in A$ gilt. Die Zahl M bzw. m heißt* **„obere bzw. untere Schranke“** *für A. Eine sowohl nach oben als auch nach unten beschränkte Menge heißt* **„beschränkt“**. *Es gilt $|a| \leq \max(|m|, |M|)$ für alle $a \in A$.*

Das Supremumsaxiom 2.25:

*Jede nach oben beschränkte nichtleere Teilmenge A von $\mathbb{R}$ besitzt eine kleinste obere Schranke (***„das Supremum“ von** *A):*

$$\sup A = \min\{M \in \mathbb{R}; a \leq M \ \forall a \in A\}.$$

*Jede nach unten beschränkte nichtleere Teilmenge A von $\mathbb{R}$ besitzt eine größte untere Schranke (***„ das Infimum“ von** *A):*

$$\inf A = \max\{m \in \mathbb{R}; m \leq a \ \forall a \in A\}.$$

Hierbei braucht man als Axiom eigentlich nur die Existenz eine Supremums zu fordern. Das Infimum von A ergibt sich dann automatisch als das negative Supremum der Menge der negativen Werte in A:

$$\inf A = -\sup\,\{-a; a \in A\}.$$

Die Existenz des Minimums/Maximums aller oberen/unteren Schranken, welche das Supremum/Infimum definieren, ist die gewünschte Vollständigkeit der reellen Zahlen, die $\mathbb{R}$ z.B. von $\mathbb{Q}$ unterscheidet.

Bemerkung 2.26: *Existiert in $A \subset \mathbb{R}$ ein maximales Element, so ist dieses Maximum auch das Supremum:*

$$\sup A = \max A.$$

Aber nicht jede beschränkte Menge hat ein maximales Element. Z.B. hat $A = [0, 1)$ kein Maximum, denn das Supremum $\sup A = 1$ (der einzige Kandidat für das Maximum) liegt nicht in A.

Beispiel 2.27: Beispielsweise garantiert das Supremumsaxiom, dass es eine positive reelle Zahl $\sqrt{2}$ gibt, deren Quadrat 2 ist. Betrachte dazu $A = \{a \in \mathbb{R}; a^2 \leq 2\}$. Die beiden Lösungen von $x^2 = 2$ ergeben sich als

$$\sqrt{2} = \sup A, \quad -\sqrt{2} = \inf A.$$

Das ist intuitiv plausibel, kann aber auch ganz formal bewiesen werden. Wir betrachten hier nur das Supremum und führen den Beweis von $(\sup A)^2 = 2$ für technisch Interessierte formal durch:

Offensichtlich ist die Menge A beschränkt (sicherlich gilt z.B. $A \subset [-3/2, 3/2]$). Es ist zu zeigen, dass das Supremum (nennen wir es s) in der Tat $s^2 = 2$ erfüllt:

Sicherlich gilt $s > 0$, also speziell $2 + s > 0$.

Angenommen, es gilt $s^2 < 2$. Dann kann s keine obere Schranke von A sein, denn z.B. die Zahl

$$a = s + \frac{2 - s^2}{\underbrace{2 + s}_{>0}} = \frac{2 \cdot s + s^2 + 2 - s^2}{2 + s} = \frac{2 + 2 \cdot s}{2 + s}$$

wäre echt größer als s und liegt in A, denn es gilt

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{4 + 8 \cdot s + 4 \cdot s^2}{(2 + s)^2} = \frac{(8 + 8 \cdot s + 2 \cdot s^2) - 2 \cdot (2 - s^2)}{(2 + s)^2} \\ &= \frac{2 \cdot (2 + s)^2 - 2 \cdot (2 - s^2)}{(2 + s)^2} = 2 - 2 \cdot \frac{2 - s^2}{\underbrace{(2 + s)^2}_{>0}} < 2. \end{aligned}$$

Widerspruch!
Angenommen, es gilt $s^2 > 2$. Dann kann s nicht die kleinste obere Schranke von A sein, denn z. B. die Zahl

$$M = s + \frac{2 - s^2}{\underbrace{2 + s}_{<0}} = \frac{2 \cdot s + s^2 + 2 - s^2}{2 + s} = \frac{2 + 2 \cdot s}{2 + s}$$

ist kleiner als s und ist obere Schranke von A, denn wegen

$$\begin{aligned} M^2 &= \frac{4 + 8 \cdot s + 4 \cdot s^2}{(2 + s)^2} = \frac{(8 + 8 \cdot s + 2 \cdot s^2) + 2 \cdot (s^2 - 2)}{(2 + s)^2} \\ &= \frac{2 \cdot (2 + s)^2 + 2 \cdot (s^2 - 2)}{(2 + s)^2} = 2 + 2 \cdot \frac{s^2 - 2}{\underbrace{(2 + s)^2}_{>0}} > 2 \end{aligned}$$

gilt:

$$a \in A \quad \Leftrightarrow \quad a^2 \leq 2 \quad \Rightarrow \quad a^2 < M^2 \quad \Rightarrow \quad a < M.$$

(Im letzten Schritt wird ausgenutzt, dass wir bereits wissen, dass $M = (2+2\cdot s)/(2+s) > 0$ gilt, da sicherlich $s > 0$ gilt.) Widerspruch!
Also muss $s^2 = 2$ gelten.

Q.E.D.

2.2.2 Konvergenz monotoner reeller Folgen

Die folgende Aussage ist äußerst hilfreich, denn sie garantiert Konvergenz, ohne dass der konkrete Grenzwert bekannt zu sein braucht. Die Aussage beruht auf Monotonie und ist daher nur auf reelle Folgen anwendbar. Die Konvergenz basiert auf dem Supremumsaxiom 2.25 für $\mathbb{R}$.

Satz 2.28: (Konvergenz monotoner Folgen)

Sei (x_n) eine monoton steigende bzw. fallende reelle Folge. Ist die Folge nach oben bzw. unten beschränkt, also $x_n \leq M$ bzw. $m \leq x_n$ für alle Indizes n, so ist (x_n) konvergent. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \leq M \quad \textit{bzw.} \quad m \leq \lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n; n \in \mathbb{N}\}.$$

Beweis: Betrachte eine monoton steigende und durch M nach oben beschränkte Folge (x_n). Setze $A = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$. Der gesuchte Grenzwert ist $x^* = \sup A$. Zum Beweis der Konvergenz gegen x^* sei $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Da x^* die *kleinste* obere Schranke von A ist, ist $x^* - \epsilon$ keine obere Schranke, d.h., es existiert ein Index $N(\epsilon)$ mit $x_{N(\epsilon)} > x^* - \epsilon$. Wegen der Monotonie gilt für alle Indizes $n \geq N(\epsilon)$:

$$x^* \geq x_n \geq x_{N(\epsilon)} \geq x^* - \epsilon \quad \Rightarrow \quad 0 \leq x^* - x_n \leq \epsilon \quad \Rightarrow \quad |x^* - x_n| \leq \epsilon.$$

Da x^* die kleinste obere Schranke von A ist, gilt für die obere Schranke M die Ungleichung $x^* \leq M$.

Die Konvergenz monoton fallender, nach unten beschränkter Folgen ist analog zu beweisen.

Q.E.D.

Beispiel 2.29: Betrachte

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Offensichtlich ist (x_n) monoton steigend und nach oben beschränkt:

$$x_n = 1 + \underbrace{\frac{1}{1!}}_{=\frac{1}{2^0}} + \underbrace{\frac{1}{2!}}_{=\frac{1}{2^1}} + \underbrace{\frac{1}{3!}}_{<\frac{1}{2^2}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{n!}}_{<\frac{1}{2^{n-1}}} \leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \leq 3.$$

Die Folge konvergiert gegen einen Grenzwert ≤ 3 (es ist die Eulersche Zahl 2.71828...).

2.2.3 Cauchy–Folgen und der Banachsche Fixpunktsatz

Wir betrachten einige Aussagen, die sowohl in $\mathbb{R}$ als auch allgemeiner in $\mathbb{C}$ gelten. Zunächst wird der Zusammenhang zwischen reeller und komplexer Konvergenz von Folgen durch den folgenden Satz aufgedeckt:

Satz 2.30: (Komplexe und reelle Konvergenz)

Sei $z_n = x_n + i \cdot y_n \in \mathbb{C}$ mit $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Die Folge (z_n) konvergiert dann und genau dann gegen $z^* = x^* + i \cdot y^*$ $(x^*, y^* \in \mathbb{R})$, wenn Real- und Imaginärteil einzeln konvergieren: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y^*$.

Beweis: Es gilt $|z_n - z^*|^2 = (x_n - x^*)^2 + (y_n - y^*)^2$.

Gilt $(x_n) \to x^*$ und gleichzeitig $(y_n) \to y^*$, so ist $|z_n - z^*|^2$ eine Nullfolge, also auch $|z_n - z^*|$. Dies ist per Definition die Konvergenz $(z_n) \to z^*$.

Umgekehrt, es gelte $(z_n) \to z^*$. Mit

$$0 \le |x_n - x^*| \le |z_n - z^*|, \quad 0 \le |y_n - y^*| \le |z_n - z^*|$$

folgt mit Satz 2.17 unmittelbar, dass $|x_n - x^*|$ und $|y_n - y^*|$ Nullfolgen sein müssen. Dies ist per Definition die Konvergenz $(x_n) \to x^*$, $(y_n) \to y^*$.

Q.E.D.

$\boxed{10.5.02\downarrow}$

Die Definition der Konvergenz 2.5 benötigt die Kenntnis des Grenzwerts. Der folgende Satz 2.31 ist eine Existenzaussage, mit der auch ohne Kenntnis des konkreten Grenzwerts die Konvergenz abgelesen werden kann. Zunächst die entscheidende Begriffsbildung:

Definition 2.31: (Cauchy–Folgen)

Eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ heißt **„Cauchy–Folge“**, *wenn zu jedem $\epsilon > 0$ eine reelle Zahl $N(\epsilon)$ existiert, so dass für alle $n, m \ge N(\epsilon)$ gilt: $|z_n - z_m| \le \epsilon$.*

Satz 2.32: (Die konvergenten Folgen sind die Cauchy–Folgen)

Eine Folge in $\mathbb{C}$ konvergiert dann und genau dann, wenn sie eine Cauchy–Folge ist.

Der Beweis ist technisch und bringt keine wirklichen Erkenntnisse. Er ist nur der Vollständigkeit halber angegeben:

Beweis: Wir betrachten zunächst Folgen (x_n) in $\mathbb{R}$.
Konvergenz $\Rightarrow$ Cauchy–Folge: Ist (x_n) konvergent mit Grenzwert x^*, so gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon)$, so dass

$$|x_n - x^*| \le \epsilon, \quad |x_m - x^*| \le \epsilon$$

gilt für alle $n, m \geq N(\epsilon)$. Für alle $n, m \geq N(\epsilon/2)$ folgt

$$|x_n - x_m| = |x_n - x^* + x^* - x_m| \leq |x_n - x^*| + |x^* - x_m| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

d.h., (x_n) ist eine Cauchy–Folge.
Cauchy–Folge $\Rightarrow$ Konvergenz: Sei (x_n) eine Cauchy–Folge mit $|x_n - x_m| \leq \epsilon$ für alle $n, m \geq N_x(\epsilon)$. Hieraus folgt, dass die Menge $A_n = \{x_m; m \geq n\}$ für jedes n beschränkt ist:

$$|x_m| \;=\; |x_m - x_n + x_n| \left\{ \begin{array}{l} \leq |x_n| + |x_m - x_n|, \\ \geq |x_n| - |x_m - x_n|, \end{array} \right.$$

wobei z.B. $|x_m - x_n| \leq 1$ für $m, n \geq N_x(1)$ gilt. Man kann also definieren:

$$a_n := \inf \{x_m; m \geq n\}, \quad b_n := \sup \{x_m; m \geq n\}.$$

Offensichtlich gilt $a_n \leq x_n \leq b_n$. Die Folge b_n ist monoton fallend, da die Suprema immer kleinerer Mengen betrachtet werden. Analog ist die Folge a_n monoton wachsend. Nach Satz 2.28 konvergieren damit (a_n) und (b_n) gegen gewisse Grenzwerte a^* und b^* mit $a^* \leq b^*$. Wir zeigen, dass $a^* = b^*$ gilt. Angenommen, es gilt $a^* < b^*$. Betrachte $\epsilon = (b^* - a^*)/4 > 0$. Wähle ein $n \geq N_x(\epsilon)$. Da a_n als Infimum die *größte* untere Schranke von A_n ist, ist $a_n + \epsilon$ keine untere Schranke von A_n mehr: es gibt ein $m_1 \geq n$, so dass $x_{m_1} < a_n + \epsilon$. Anlog gibt es ein $m_2 \geq n$, so dass $x_{m_2} > b_n - \epsilon$. Wegen der Monotonie von (a_n) und (b_n) gilt $a_n \leq a^*$ und $b_n \geq b^*$, also:

$$b_n - a_n \geq b^* - a^* = 4 \cdot \epsilon.$$

Damit folgt

$$x_{m_2} - x_{m_1} = \underbrace{x_{m_2} - b_n}_{> -\epsilon} + \underbrace{b_n - a_n}_{\geq 4 \cdot \epsilon} + \underbrace{a_n - x_{m_1}}_{> -\epsilon} \geq -\epsilon + 4 \cdot \epsilon - \epsilon > \epsilon.$$

Hierbei gilt $m_1, m_2 \geq n \geq N_x(\epsilon)$. Mit der Cauchy–Eigenschaft von (x_n) müßte für solche Indizes aber $|x_{m_2} - x_{m_1}| \leq \epsilon$ gelten. Widerspruch!

Damit ist gezeigt, dass *reelle* Folgen (x_n) genau dann konvergieren, wenn sie Cauchy–Folgen sind. Analog zu Satz 2.30 ist leicht gezeigt, dass eine komplexe Folge genau dann eine Cauchy–Folge ist, wenn die Folgen der Real- und Imaginärteile beide Cauchy–Folgen sind. Zusammen mit Satz 2.30 ergibt sich damit, dass auch komplexe Folgen genau dann konvergieren, wenn sie Cauchy–Folgen sind.

Q.E.D.

Auch wenn der Begriff „Cauchy–Folgen“ sehr technisch ist, ist er für Anwendungen sehr interessant. Er taucht (wenngleich nur im Beweis versteckt) beim für die Praxis sehr wichtigen Banachschen Fixpunktsatz für kontrahierende Abbildungen auf. Zunächst einige relevante Begriffe:

Definition 2.33: (Häufungspunkte von Mengen)

Ein Punkt $z^* \in \mathbb{C}$ heißt **„Häufungspunkt“** *einer Menge $A \subset \mathbb{C}$, wenn für jedes $\epsilon > 0$ die sogenannte* **„ϵ-Umgebung“** *von z^**

$$\bar{U}_\epsilon(z^*) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z^*| \leq \epsilon\}$$

mindestens einen Punkt in A enthält: $\bar{U}_\epsilon(z^*) \cap A \neq \emptyset$.

Geometrisch ist die ϵ-Umgebung eines Punktes z^* ein Kreisgebiet mit Mittelpunkt z^* und Radius ϵ, wobei in der obigen Definition der Kreisrand

$$\{z \in \mathbb{C}; |z - z^*| = \epsilon\}$$

mit zur Umgebung gerechnet wird.

Beispiel 2.34: Offensichtlich ist jeder Punkt in A ein Häufungspunkt von A (denn dieser Punkt liegt in jeder ϵ-Umgebung von sich selbst). Es kann aber auch Punkte außerhalb von A geben, die Häufungspunkte von A sind. In $\mathbb{R}$ sind z.B. die Endpunkte von Intervallen stets Häufungspunkte, selbst wenn das Intervall $A = (a, b) \subset \mathbb{R}$ offen ist. Z.B.: offensichtlich liegt für $\epsilon > 0$ der Punkt $x = \min((a + b)/2, a + \epsilon)$ sowohl in $A = (a, b)$ als auch in der ϵ Umgebung von a. Also ist a ein Häufungspunkt von A.

Für den Banachschen Fixpunktsatz brauchen wir weiterhin die Begriffsbildung „abgeschlossene Menge“. Wir definieren den Begriff „offene Menge“ gleich mit (brauchen ihn momentan aber nicht).

Definition 2.35: (abgeschlossene Mengen)

Eine Menge $A \in \mathbb{C}$ heißt **„abgeschlossen“**, *wenn jeder ihrer Häufungspunkte in A liegt. Die Menge heißt* **„offen“**, *wenn ihr Komplement $\mathbb{C} \setminus A = \{z \in \mathbb{C}; z \notin A\}$ abgeschlossen ist.*

Beispiel 2.36: Abgeschlossene Intervalle $[a, b]$ in $\mathbb{R}$ sind abgeschlossene Mengen. Die hier definierten ϵ-Umgebungen

$$\bar{U}_\epsilon(z^*) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z^*| \leq \epsilon\}$$

sind abgeschlossene Mengen in $\mathbb{C}$.
Achtung: in der Literatur werden als ϵ-Umgebungen oft die Mengen

$$U_\epsilon(z^*) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z^*| < \epsilon\}$$

betrachtet, die den Kreisrand $\{z \in \mathbb{C}; |z - z^*| = \epsilon\}$ nicht enthalten. Diese Mengen sind **nicht abgeschlossen**, denn die Punkte des Kreisrands sind Häufungspunkte. Die U_ϵ sind offene Mengen.

Wir definieren den Begriff einer kontrahierenden Abbildung:

Definition 2.37: $\boxed{\downarrow\text{entfällt}}$

Eine Abbildung $\Phi : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt **„Kontraktion in A“**, *wenn eine* **„Kontraktionskonstante“** $k \in [0, 1)$ *existiert, so dass für alle $x, y \in A$ gilt:*

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \le k \cdot |x - y|.$$

Zur Namensgebung: der Abstand zweier Bildpunkte $|\Phi(x) - \Phi(y)|$ einer Kontraktion ist stets kleiner als der Abstand der Urbildpunkte $|x - y|$.

Bemerkung 2.38: *Kontraktionen sind automatisch das, was wir später als „stetige Funktionen“ einführen werden. Für jede konvergierende Folge (z_n) konvergiert $\Phi(z_n)$, und es gilt* $\boxed{\downarrow\text{entfällt}}$

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(z_n) = \Phi\Big(\lim_{n\to\infty} z_n\Big).$$

Dies ist leicht einzusehen. Sei z^* der Grenzwert von (z_n). Die Kontraktionseigenschaft liefert

$$0 \le |\Phi(z_n) - \Phi(z^*)| < |z_n - z^*|.$$

Wegen der Konvergenz $z_n \to z^*$ ist die rechte Seite eine reelle Nullfolge. Mit Satz 2.17 folgt, dass $|\Phi(z_n) - \Phi(z^*)|$ eine Nullfolge ist, was die Konvergenz $\Phi(z_n) \to \Phi(z^*)$ bedeutet.

$\boxed{\downarrow\text{entfällt}}$

Der folgende wichtige Fixpunktsatz für kontrahierende Abbildungen geht auf Stefan Banach (polnischer Mathematiker, 1892 – 1945) zurück. Er setzt neben der Kontraktionseigenschaft als wichtige Annahme voraus, dass die Kontraktion ihren Definitionsbereich in sich selbst abbildet:

Satz 2.39: („BFS“: der Banachsche Fixpunktsatz) $\boxed{\downarrow\text{entfällt}}$

Sei $\Phi : A \to A$ eine Kontraktion in einer abgeschlossenen Menge $A \subset \mathbb{C}$ mit einer Kontraktionskonstanten $k < 1$. Dann

a) existiert ein eindeutig bestimmter Fixpunkt $z^* = \Phi(z^*) \in A$,

b) konvergiert jede Folge $z_{n+1} = \Phi(z_n)$ mit beliebigem Startwert $z_0 \in A$ gegen z^*,

c) gelten für jede solche Folge die Abschätzungen

$$|z_n - z^*| \;\le\; \underbrace{\frac{k}{1-k} \cdot |z_n - z_{n-1}|}_{\text{“a posteriori”}} \;\le\; \underbrace{\frac{k^n}{1-k} \cdot |z_1 - z_0|}_{\text{“a priori”}}.$$

Vom (wiederum sehr technischen) Beweis braucht man eigentlich nur zu wissen, dass man zeigen kann, dass die per $z_{n+1} = \Phi(z_n)$ konstruierten Folgen Cauchy–Folgen sind. Der Fixpunkt ergibt sich dann über den Grenzwert der Folgen, dessen Existenz mittels Satz 2.32 gesichert ist. Aus der Kontraktionseigenschaft folgt die Eindeutigkeit (alle Folgen konvergieren gegen denselben Grenzwert). Für technisch Interessierte ist der Beweis der Vollständigkeit halber angegeben:

entfällt↓ **Beweis:** Zeige: (z_n) ist Cauchy-Folge.

$$\begin{aligned} |z_{n+m} - z_n| &= |z_{n+m} - z_{n+m-1} + z_{n+m-1} \mp \cdots - z_{n+1} + z_{n+1} - z_n| \\ &\leq |z_{n+m} - z_{n+m-1}| + |z_{n+m-1} - z_{n+m-2}| + \cdots + |z_{n+1} - z_n| \end{aligned}$$

für jedes $n, m \geq 0$. Aus $|z_j - z_{j-1}| = |\Phi(z_{j-1}) - \Phi(z_{j-2})| \leq k \cdot |z_{j-1} - z_{j-2}|$, d.h.,

$$|z_j - z_{j-1}| \leq k \cdot |z_{j-1} - z_{j-2}| \leq k^2 \cdot |z_{j-2} - z_{j-3}| \leq \ldots$$

folgt

$$|z_{n+m} - z_n| \leq k^{m-1} \cdot |z_{n+1} - z_n| + k^{m-2} \cdot |z_{n+1} - z_n| + \cdots + |z_{n+1} - z_n|$$

$$= (1 + k + k^2 + \cdots + k^{m-1}) \cdot |z_{n+1} - z_n| = \frac{1 - k^m}{1 - k} \cdot |z_{n+1} - z_n|$$

$$\leq \frac{|z_{n+1} - z_n|}{1 - k} \overset{(\#)}{\leq} \frac{k\ |z_n - z_{n-1}|}{1 - k} \leq \frac{k^2\ |z_{n-1} - z_{n-2}|}{1 - k} \leq \ldots \overset{(\#\#)}{\leq} \frac{k^n\ |z_1 - z_0|}{1 - k}.$$

Mit $k^n \to 0$ folgt die Cauchy-Eigenschaft. Es existiert somit ein Grenzwert z^*. Mit $z_0 \in A$ und $\Phi : A \to A$ folgt $z_n \in A \Rightarrow z^*$ ist Häufungspunkt von $A \Rightarrow z^* \in A$ (abgeschlossen). Da Φ im Sinne von Bemerkung 2.38 stetig ist:

$$z^* = \lim_{n\to\infty} z_{n+1} = \lim_{i\to\infty} \Phi(z_n) = \Phi(\lim_{n\to\infty} z_n) = \Phi(z^*) .$$

Eindeutigkeit: für einen weiteren Fixpunkt $z^{**} \neq z^*$ folgt der Widerspruch

$$|z^* - z^{**}| = |\Phi(z^*) - \Phi(z^{**})| \leq k \cdot |z^* - z^{**}| < |z^* - z^{**}| .$$

Die Abschätzungen c) ergeben sich aus (#) und (##):

$$\lim_{m\to\infty} |z_{n+m} - z_n| = |z^* - z_n| \overset{(\#)}{\leq} \frac{k}{1 - k}\ |z_n - z_{n-1}| \overset{(\#\#)}{\leq} \frac{k^n}{1 - k}\ |z_1 - z_0| .$$

Q.E.D.

entfällt↓ **Interpretation und Anwendung 2.40:**

Eine Gleichung $f(z) = 0$ sei zu lösen. Der BFS gibt ein Rezept, wie man Näherungen für die Lösung konstruieren kann:

1) *Formuliere die Gleichung $f(z) = 0$ in ein äquivalentes Fixpunktproblem $z = \Phi(z)$ um.*
2) *Ist Φ kontrahierend auf einer Umgebung A der Lösung und bildet Φ diese Menge A auf sich selbst ab, so läßt sich der BFS anwenden: wähle einen beliebigen Punkt $z_0 \in A$ und iteriere $z_{n+1} = \Phi(z_n)$. Diese Folge konvergiert gegen eine Lösung des Fixpunktproblems und damit gegen eine Lösung des Ausgangsproblems $f(z) = 0$.*
3) *Hat man durch Abschätzungen eine Kontraktionskonstante k für die Menge A gefunden, kann man mit den a-priori- bzw. a-posteriori-Abschätzungen bestimmen, wie weit man noch von der Lösung entfernt ist und abbrechen, sobald eine vorgegebene Zielgenauigkeit erreicht ist.*

Mit der a-priori-Abschätzung kann man aus dem Startpunkt z_0 und dem nächsten Punkt z_1 sofort ermitteln, wie oft man iterieren muß, um die Zielgenauigkeit zu erreichen (die Iterationswerte werden dafür nicht benötigt). Nachdem die Iteration durchgeführt worden ist und Zahlenwerte für z_n vorliegen, kann man a-posteriori abschätzen, welche Approximationsgenauigkeit nun wirklich erreicht ist (die a-posteriori-Abschätzung ist prinzipiell genauer als die a-priori-Abschätzung).

Bemerkung 2.41: *Es gibt viele Wege, eine gegebene Gleichung $f(x) = 0$ in eine Fixpunktgleichung $x = \Phi(x)$ umzuformen, z.B.* ↓entfällt

$$\Phi(x) = x - g(x) \cdot f(x)$$

mit einer (praktisch beliebig wählbaren) Funktion $g(x)$. Ist $f(x)$ differenzierbar und ist die Lösung im Sinne von Definition 1.10 eine einfache Nullstelle, so ist $g(x) = 1/f'(x)$ eine ausgezeichnete Wahl. Die Iteration lautet dann

$$x_{n+1} = \Phi(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{(das „\textbf{Newton-Verfahren}“).}$$

Man kann zeigen, dass es immer eine (eventuell kleine) Umgebung A einer Nullstelle von f gibt, auf der Φ eine Kontraktion ist und für die $\Phi(A) \subset A$ gilt. Damit gilt der BFS auf einer (leider oft nicht konkret bekannten) Umgebung einer Lösung, und es gilt:

> *Für hinreichend genaue Startwerte x_0 dicht bei einer Lösung x^* von $f(x) = 0$ konvergiert die Newton-Folge $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ gegen x^*.*

Bei einfachen Nullstellen ist die Konvergenz beim Newton-Verfahren sehr schnell, da die Kontraktionskonstanten auf kleinen Umgebungen der Lösung prinzipiell sehr klein sind.

---

entfällt↓ **Beispiel 2.42:** In einer Softwareumgebung gebe es die Grundarithmetik, aber keine Wurzelfunktion. Um diese zu implementieren, soll die Gleichung $y^2 = b$ für gegebenes positives $b \in \mathbb{R}$ nach y gelöst werden. Mittels Division durch eine geeignete 4er-Potenz kann b auf das Interval $[1, 4]$ transformiert werden (in Binärdarstellung kostet dies nichts). Sei nun $a = b/4^n \in [1, 4]$. Ist $x \in [1, 2]$ eine Lösung von $x^2 = a$, so ist $y = 2^n \cdot x$ die gesuchte Lösung des Ausgangsproblems $y^2 = b$.

Das verbleibende Problem ist also, ein $x \in [1, 2]$ zu finden, das das Nullstellenproblem $f(x) = x^2 - a = 0$ mit $a \in [1, 4]$ erfüllt. Hierzu soll das Newton–Verfahren benutzt werden. Betrachte also

$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - a}{2 \cdot x} = \frac{x^2 + a}{2 \cdot x} = \frac{1}{2} \cdot \Big(x + \frac{a}{x}\Big).$$

Die entsprechende Iteration lautet also

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big).$$

Das Verfahren konvergiert sehr schnell gegen $x^* = \sqrt{a}$. Beispiel: $a = 2$, $x_0 = 1.5$:

$$x_0 = 1.5, \quad x_1 = 1.416666666..., \quad x_2 = 1.414215686...,$$

$$x_3 = 1.414213562..., \quad x_4 = 1.414213562..., \quad \ldots$$

Die folgende Analyse ist wiederum sehr technisch und an technisch Interessierte addressiert:

Analyse: betrachte das Intervall $A = [\sqrt{a}, \frac{1+a}{2}]$, das die Lösung $\sqrt{a}$ enthält. (Dieses Intervall fällt hier vom Himmel.) Die folgenden Rechnungen zeigen, dass dieses Intervall in der Tat so ist, dass der BFS angewendet werden kann.

Es ist zunächst zu zeigen, dass $\Phi(A) \subset A$ gilt. In Erinnerung an die Schule berechnen wir dazu

$$\Phi'(x) = \frac{1}{2} \cdot \Big(1 - \frac{a}{x^2}\Big) = \frac{x^2 - a}{2 \cdot x^2} \geq 0$$

für $x \in [\sqrt{a}, \frac{1+a}{2}]$. Die Funktion ist also in diesem Bereich monoton steigend, und damit gilt

$$\Phi(\sqrt{a}) = \sqrt{a} \leq \Phi(x) \leq \Phi\Big(\frac{1+a}{2}\Big) = \frac{1+a}{4} + \frac{a}{1+a} \leq \frac{1+a}{2}$$

für alle $x \in [\sqrt{a}, \frac{1+a}{2}]$. Als Kontraktionskonstante auf A schätzt man ab:

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = \frac{1}{2} \cdot \Big|x + \frac{a}{x} - y - \frac{a}{y}\Big| = \frac{1}{2} \cdot \Big|x - y - \frac{a \cdot (x - y)}{x \cdot y}\Big|$$

$$= \frac{|x-y|}{2} \cdot \left|1 - \frac{a}{x \cdot y}\right| = \frac{|x-y|}{2} \cdot \left(1 - \frac{a}{x \cdot y}\right) \leq \frac{|x-y|}{2} \cdot \left(1 - \frac{a}{(\frac{a+1}{2})^2}\right)$$
$$= |x-y| \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2.$$

Also, in Abhängigkeit von a ist

$$k = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2$$

eine Kontraktionskonstante für Φ über A. Für alle $a \in [1,4]$ gilt $k \leq 0.18$, d.h., Φ ist auf A in der Tat eine Kontraktion.

Speziell, für $a = 2$ ist $k = 1/18 \approx 0.0555\ldots$. Starten wir mit $x_0 = 3/2$, so ergibt sich $x_1 = 17/12$ und die a-priori-Abschätzung liefert

$$|x_n - \sqrt{2}| \leq \frac{k^n}{1-k} \cdot |x_0 - x_1| = \frac{3}{34 \cdot 18^n}.$$

Nach $n = 5$ Schritten ergibt sich beispielsweise

$$|x_5 - \sqrt{2}| \leq 4.7 \cdot 10^{-8},$$

d.h., x_5 beschreibt garantiert die ersten 7 bis 8 Dezimalstellen von $\sqrt{2}$ korrekt. (In Wirklichkeit ist x_5 schon wesentlich genauer, aber mehr gibt die a-priori-Abschätzung nicht her.)

Bemerkung 2.43: *Das letzte Beispiel hat gezeigt, dass das Abschätzen von Kontraktionskonstanten mühselig ist. Es geht aber auch einfacher! Für stetig differenzierbares Φ gilt, dass* ↓entfällt

$$k = \sup\{|\Phi'(x)|; x \in A\}$$

die bestmögliche (weil kleinste) Kontraktionskonstante über einem Intervall $A \subset \mathbb{R}$ ist. Um dies einzusehen, brauchen wir aber den Mittelwertsatz der Differentialrechnung, der erst später bereitgestellt wird.

2.2.4 Teilfolgen und Häufungspunkte

↓ab hier ↓wieder ↓behandelt

Neben der Konvergenz gibt es den (schwächeren) Begriff von „Teilkonvergenz“, der sich in sogenannten „Häufungspunkten von Folgen“ (im Unterschied zum schon eingeführten Begriff „Häufungspunkte von Mengen“) manifestiert.

Definition 2.44: (Häufungspunkte von Folgen)

Ein Punkt $z^* \in \mathbb{C}$ heißt **„Häufungspunkt“** *der Folge (z_n), wenn in jeder ϵ-Umgebung von z^* unendlich viele Folgenglieder liegen, also: zu jedem $\epsilon > 0$ existieren unendlich viele Folgenglieder z_n mit $|z_n - z^*| \leq \epsilon$.*

Beispiel 2.45: Die Folge $x_n = (-1)^n$, also $(x_n) = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$ hat die beiden Häufungspunkte $x_1^* = 1$ und $x_2^* = -1$.
Der Punkt $x_1^* = 1$ ist Häufungspunkt, denn für alle Folgenglieder mit geradem Index n (dies sind unendlich viele) gilt $|x_n - x_1^*| = 0 \le \epsilon$ für jedes $\epsilon > 0$.
Der Punkt $x_2^* = -1$ ist Häufungspunkt, denn für alle Folgenglieder mit ungeradem Index n (dies sind unendlich viele) gilt $|x_n - x_2^*| = 0 \le \epsilon$ für jedes $\epsilon > 0$.

Bemerkung 2.46: *Sei $n_1 < n_2 < \ldots$ eine streng monoton steigende Folge von Indizes in $\mathbb{N}$. Die Folge $(z_{n_i}) = (z_{n_1}, z_{n_2}, \ldots)$ heißt* **„Teilfolge"** *der Folge (z_n).*

z^* ist genau dann Häufungspunkt der Folge (z_n), wenn es eine gegen z^* konvergierende Teilfolge von (z_n) gibt.

Zu einem gegebenen Häufungspunkt z^* folgt eine explizite Konstruktion einer konvergenten Teilfolge. Zu $\epsilon = 1/k$ gibt es unendlich viele Folgenglieder z_n mit $|z_n - z^*| \le 1/k$. Wähle n_i als den ersten Folgenindex, für den der Abstand zwischen z_n und dem Häufungspunkt den Wert $1/k$ unterschreitet:

$$n_k := \min \left\{ n; n > n_{k-1}; |z_n - z^*| \le \frac{1}{k} \right\} \quad (n_0 := 0).$$

Nach Konstruktion gilt $|z_{n_k} - z^*| \le \frac{1}{k}$ für alle $k = 1, 2, \ldots$ und damit auch $|z_{n_j} - z^*| \le \frac{1}{j} \le \frac{1}{k}$ für alle $n_j \ge n_k$. Damit konvergiert (z_{n_k}) gegen z^*.

Umgekehrt, gibt es eine gegen z^* konvergente Teilfolge von (z_n), so liegen in jeder ϵ-Umgebung von z^* alle bis auf endliche viele Glieder der Teilfolge. Also ist z^* ein Häufungspunkt von (z_n).

Beispiel 2.47: Für die Folge $(x_n) = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$ aus Beispiel 2.45 konvergiert die Teilfolge $(x_2, x_4, \ldots) = (1, 1, 1, \ldots)$ gegeben den Häufungspunkt 1 und die Teilfolge $(x_1, x_3, \ldots) = (-1, -1, -1, \ldots)$ gegeben den Häufungspunkt -1.

Satz 2.48:

Eine konvergente Folge besitzt genau einen Häufungspunkt: den Grenzwert.

Beweis: Für den Grenzwert z^* einer konvergierenden Folge (z_n) gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon)$, so dass alle Folgenglieder mit Indizes $\ge N(\epsilon)$ in der ϵ-Umgebung von z^* liegen. Damit ist der Grenzwert ein Häufungspunkt. Gäbe es einen weiteren davon verschiedenen Häufungspunkt z^{**}, gäbe es für $\epsilon = |z^{**} - z^*|/3 > 0$ mindestens einen Folgenpunkt z_n mit Index $n \ge N(\epsilon)$ in dieser

ϵ-Umgebung von z^{**}, und es würde folgen:

$$3 \cdot \epsilon = |z^* - z^{**}| = |z^* - z_n + z_n - z^{**}| \leq |z^* - z_n| + |z_n - z^{**}| \leq 2 \cdot \epsilon.$$

Widerspruch!

Q.E.D.

Satz 2.49: (Bolzano (1781–1848) und Weierstrass (1815–1897))

Eine Folge heißt **beschränkt**, *wenn die Menge aller Folgenpunkte beschränkt ist. Es gilt: Jede beschränkte Folge besitzt mindestens einen Häufungspunkt.*

Wir verzichten auf die strenge technische Durchführung des Beweises und geben nur die Idee an:

Beweisidee: Die Folge liege innerhalb eines Quadrates in der komplexen Ebene. Zerlege dieses Quadrat in 4 gleichgrosse Teilquadrate der halben Seitenlänge. Mindestens eines der Teilquadrate enthält unendliche viele der Folgenglieder. Wähle eines dieser Teilquadrate aus und zerlege es wiederum in 4 Teilquadrate usw. Die so konstruierte Folge von Quadraten schrumpft auf einen Punkt zusammen (dies ist der Häufungspunkt), in dessen Nähe nach Konstruktion unendlich viele der Folgenpunkte existieren.

Q.E.D.

Bemerkung 2.50: *Nach Bemerkung 2.46 heißt dies:*

$$\boxed{\textit{Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.}}$$

2.3 Unendliches, uneigentliche Konvergenz

In diesem Abschnitt geht es um eine oft nützliche Schreibweise, die in der hier vorgestellten Form nur bei reellen Folgen sinnvoll ist. Die „unendlichen Werte“ $\pm\infty$ sind keine reellen Zahlen, sondern dienen nur als nützliche Abkürzungen, um gewisse Situationen zu beschreiben. Wir lassen $\pm\infty$ als („uneigentliche“) Grenzwerte reeller Folgen zu:

Definition 2.51: ($\pm\infty$ als Grenzwert)

- *Eine reelle Folge* (x_n) **„konvergiert (uneigentlich) gegen ∞“**, *wenn die Folgenglieder jede beliebig vorgegebene Schranke* $c > 0$ *überschreiten: zu jedem reellen* c *existiert eine reelle Zahl* $N(c)$, *so dass* $x_n \geq c$ *gilt für alle Indizes* $n \geq N(c)$. *Schreibweise:*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \infty \ .$$

- *Eine reelle Folge* (x_n) **„konvergiert (uneigentlich) gegen $-\infty$"**, *wenn die Folgenglieder jede beliebig vorgegebene Schranke $c < 0$ unterschreiten: zu jedem reellen c existiert eine reelle Zahl $N(c)$, so dass $x_n \leq c$ gilt für alle Indizes $n \geq N(c)$. Schreibweise:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \ .$$

Beispiel 2.52: Die Folgen $x_n = n$, $x_n = n^2$, $x_n = \sqrt{n}$, $x_n = 2^n$ konvergieren gegen ∞. Die Folgen $x_n = -n$, $x_n = -n^2$, $x_n = -\sqrt{n}$, $x_n = -(2^n)$ konvergieren gegen $-\infty$.

Beispiel 2.53: Achtung: die Folgen $x_n = (-1)^n \cdot n$ (also $(-1, 2, -3, 4, -5, \ldots)$) oder auch $x_n = (-2)^n$ (also $(-2, 4, -8, 16, -32, \ldots)$) konvergieren **nicht** gegen ∞ oder $-\infty$, sie divergieren!

Man darf getrost mit ∞ und $-\infty$ rechnen, wobei folgende Rechenregeln gelten:

entfällt↓ **Rechenregeln für $\pm\infty$ 2.54:**

Sei c eine reelle Zahl.

- $c \pm \infty = \pm\infty$,
- $c \cdot (\pm\infty) = \pm\mathrm{sign}(c) \cdot \infty$ **für** $c \neq 0$. *Hierbei ist* $\mathrm{sign}(c)$ *das Vorzeichen von c.*
- $\frac{1}{\pm\infty} = 0$,
- $\infty + \infty = \infty$, $-\infty - \infty = -\infty$,
- $\infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$, $\infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$,
- $\infty^\infty = \infty$, $\infty^{-\infty} = 0$,
- $c^\infty = \infty$ *für* $c > 1$, $c^\infty = 0$ *für* $0 < c < 1$,
- $c^{-\infty} = 0$ *für* $c > 1$, $c^{-\infty} = \infty$ *für* $0 < c < 1$.

---

entfällt↓ **Beispiel 2.55:** Die Folge $x_n = n^3 + n$ konvergiert gegen ∞:

$$\lim_{n\to\infty} (n^3 + n) = \lim_{n\to\infty} n^3 + \lim_{n\to\infty} n = \infty + \infty = \infty \ .$$

Aus dem obigen Ergebnis folgt sofort das nächste Ergebnis:

---

entfällt↓ **Beispiel 2.56:** Die Folge $x_n = \frac{1}{n^3+n}$ konvergiert gegen 0:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3 + n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} (n^3 + n)} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Beim Rechnen mit $\pm\infty$ muß man aber etwas Vorsicht walten lassen. Wenn man auf eine der folgenden Situationen stößt, darf man nicht weiterrechnen, sondern muß die betrachteten Grenzwerte anders ermitteln:

Undefinierte Ergebnisse beim Rechnen mit $\pm\infty$ 2.57: ↓entfällt

- $0 \cdot (\pm\infty) =$ *„undefiniert"*,
- $\infty - \infty =$ *„undefiniert"*, $-\infty + \infty =$ *„undefiniert"*,
- $c^{\infty} =$ *„undefiniert" für* $c \le 0$ *und* $c = 1$,
- $c^{-\infty} =$ *„undefiniert" für* $c \le 0$ *und* $c = 1$,
- $\frac{1}{0} =$ *„undefiniert"*.

Beispiel 2.58: Betrachte die Folge $x_n = n^3 - n$: ↓entfällt

$$\lim_{n\to\infty}(n^3 - n) \overset{(??)}{=} \lim_{n\to\infty} n^3 - \lim_{n\to\infty} n \overset{(??)}{=} \infty - \infty \overset{(??)}{=} \text{„undefiniert"}.$$

Dies heißt nicht, dass kein Grenzwert existiert, sondern nur, dass wir den Grenzwert über die Rechenregeln mit $\pm\infty$ nicht berechnen können. Man muß in einem solchen Fall genauer untersuchen. Z.B funktioniert folgendes Argument:

$$\lim_{n\to\infty}(n^3 - n) = \lim_{n\to\infty} n^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} n^3 \ \cdot \ \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \infty \ \cdot \ \left(1 - \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n^2}\right) = \infty \ \cdot \ \left(1 - \frac{1}{\infty}\right) = \infty \ \cdot \ (1 - 0) = \infty\ .$$

Ein weiteres solches Beispiel:

Beispiel 2.59: Betrachte die Folge $x_n = \frac{2\cdot n^3 + n}{n^4 + 1}$: ↓entfällt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot n^3 + n}{n^4 + 1} \overset{(??)}{=} \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(2\cdot n^3 + n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(n^4 + 1)} \overset{(??)}{=} \frac{\infty}{\infty} \overset{(??)}{=} \text{„undefiniert"}.$$

Dies sagt wiederum gar nichts darüber aus, ob ein Grenzwert existiert oder nicht. In diesem Fall führt wieder ein wenig Manipulation zum Erfolg:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot n^3 + n}{n^4 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 \cdot \left(2 + \frac{1}{n^2}\right)}{n^4 \cdot \left(1 + \frac{1}{n^4}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{n \cdot \left(1 + \frac{1}{n^4}\right)}$$

$$= \frac{2 + \frac{1}{\infty}}{\infty \cdot \left(1 + \frac{1}{\infty}\right)} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

2.4 Wachstum von Folgen, Landau-Symbole

↓16.5.02

↓ab hier

↓wieder

↓behandelt

Algorithmen werden typischerweise auf Problemklassen angewendet, die einen „Größenparameter“ n haben: Invertierung von $n \times n$ Matrizen, Sortieren einer Liste mit n Elementen, Untersuchungen auf Graphen mit n Knoten usw. Die Laufzeit des Algorithmus wächst mit der durch n gegebenen Größe des Problems, und man möchte oft eine einfach zu lesende Kostenabschätzung in Abhängigkeit von n angeben. Hierzu dienen die sogenannten „Landau-Symbole“ O („Big-Oh“), o („Small-Oh“) etc.:

Notation 2.60:

Seien (f_n), (g_n) Folgen komplexer Zahlen.

- $f_n = O(g_n)$ *heißt, dass die Folge* $|f_n|/|g_n|$ *nach oben beschränkt ist.*
- $f_n = o(g_n)$ *heißt, dass die Folge* f_n/g_n *eine Nullfolge ist.*
- $f_n = \Omega(g_n)$ *heißt, dass die Folge* $|g_n|/|f_n|$ *nach oben beschränkt ist.*
- $f_n = \omega(g_n)$ *heißt, dass die Folge* g_n/f_n *eine Nullfolge ist.*
- $f_n = \Theta(g_n)$ *heißt, dass die Folgen* $|f_n/g_n|$ *und* $|g_n/f_n|$ *nach oben beschränkt sind: es existieren positive Konstanten* c *und* C*, so dass* $c \cdot |g_n| \leq |f_n| \leq C \cdot |g_n|$ *gilt für alle hinreichend großen* n.

Hierbei nimmt man implizit an, dass man sich für große Werte von n interessiert. Eigentlich sollte man genauer sagen: $f_n = O(g_n)$ „im Limes $n \to \infty$“ etc.

Beispiel 2.61: $n^2+1 = O(n^2)$, $n^2+1 = O(n^3)$, $n^2+1 = O(n^4)$, $n^2+1 = O(2^n)$,

$$\frac{1}{n+1} = O\Big(\frac{1}{n}\Big), \quad \frac{1}{n+1} = O\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big), \quad n^2 = o(n^3), \quad n^2 = o(2^n), \quad \frac{1}{n+1} = o\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big),$$

$$2 \cdot n+1 = \Omega(n),\ 2 \cdot n^2+1 = \omega(n),\ \frac{n^3}{2} = \Omega(n^3),\ \frac{2^n}{7} = \omega(n^2),\ 2 \cdot n+1 = \Theta(n),\ \frac{n^3}{2} = \Theta(n^3).$$

Beispiel 2.62: Man kann n lineare Gleichungen für n Unbekannte numerisch stets mit höchstens etwa $n^3/3$ Multiplikationen lösen. Also:

„Die Kosten der Lösung eines linearen $n \times n$ Systems ist $O(n^3)$.“

Ist die Koeffizientenmatrix eine obere oder untere Dreiecksmatrix, kommt man mit höchstens $n^2/2$ Multiplikationen aus. Die Kosten sind in diesem Fall $O(n^2)$.

Die Kosten, alle Eigenwerte und -vektoren einer $n \times n$-Matrix numerisch zu bestimmen, sind $O(n^3)$.

Das Sortieren einer Liste mit n Elementen kostet $O(n \cdot \log_2(n))$ Vergleichsoperationen. (Genauer: es existieren Sortieralgorithmen, die mit diesem Aufwand auskommen).
